

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**GRADO EN MATEMÁTICAS**  
**TRABAJO FIN DE GRADO**  
**CURSO ACADÉMICO 2023-2024**

TÍTULO:

**Teorema de Hilbert en espacios modelo.**

AUTOR:

**David Cerverón Morales**

## Resumen

En 1901, Hilbert demostró que el plano hiperbólico no podía ser inmerso isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ . En este trabajo trataremos de generalizar dicho resultado extendiendo la hipótesis sobre el ambiente, sustituyéndolo por un espacio modelo. Para la demostración, utilizaremos la novedosa técnica conocida como pares de Codazzi.

## Palabras clave

- Teorema de Hilbert,
- Inmersiones isométricas,
- Espacios Modelo,
- Curvatura constante no positiva.

## Abstract

On the year 1901, Hilbert demonstrated that the hiperbolic plane cannot be isometrically immersed into  $\mathbb{R}^3$ . In this paper we will try to generalize this result by extending the hypothesis about the environment, replacing  $\mathbb{R}^3$  with spaces of constant curvature. For the prove we will use a new technique known as Codazzi pairs.

## Key words

- Hilbert's theorem,
- Isometrically immersion,
- Space form,
- Non-positive curvature.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Variedades Riemanianas</b>	<b>6</b>
2.1. Variedades Diferenciables . . . . .	6
2.2. Métrica Riemaniana . . . . .	9
2.2.1. Isometrías . . . . .	11
2.2.2. Longitud de arco y distancia entre puntos a través de una curva. . .	11
2.3. Conexión de Levi-Civita . . . . .	12
2.3.1. Variedades Riemannianas Completas . . . . .	14
2.4. Curvatura . . . . .	15
2.4.1. Curvatura seccional . . . . .	16
2.5. Inmersiones . . . . .	17
2.5.1. Inmersiones de hipersuperficies. . . . .	20
<b>3. Espacios Modelo</b>	<b>21</b>
<b>4. Resultados Previos</b>	<b>23</b>
4.1. Existencia de una Red Local de Tschebyshev en superficies. . . . .	24
<b>5. Teorema de Hilbert</b>	<b>28</b>
<b>6. Conclusión</b>	<b>32</b>
<b>Referencias</b>	<b>37</b>
<b>A. Demostración alternativa del Teorema de Hilbert.</b>	<b>39</b>
A.1. Teorema de Hadamard. . . . .	39
A.2. Teorema de Hilbert. . . . .	39
<b>B. Detalles del desarrollo del trabajo</b>	<b>41</b>

## 1. Introducción

El siglo XIX, Gauss publicó “Disquisiciones generales circa superficies curvas” que asentó las bases de lo que ahora conocemos como teoría clásica de superficies. Introduciendo conceptos como la aplicación de Gauss esférica, la curvatura que hoy llamamos gaussiana y la curvatura total que se usa como invariante asociado a una superficie.

A partir de 1830, Minding (para más información véase [15] y [23]), comenzó a trabajar en superficies de revolución de curvatura constante negativa, donde fue capaz de integrar por cuadraturas la ecuación diferencial de los meridianos, con lo que consiguió probar que estaban divididas en tres grupos, que se conocen como *Minding top*, *Minding bobbing* y un tercer grupo formado por la pseudoesfera generada por la tratriz, junto con superficies semejantes.

Más tarde, en 1840, Minding [16] publicó un resultado sobre funciones trigonométricas en superficies de curvatura constante negativa, resultados similares a los publicados por Lobachevsky sobre su geometría hiperbólica en 1829, sin embargo, Minding, no llegó a relacionar ambos resultados.

De hecho, fue Beltrami [2] en 1868 quien dio ese paso final. Relacionó las geometrías no Euclídeas con superficies en un espacio Euclídeo, haciendo un paralelismo entre las geodésicas de dichas superficies con las rectas de los espacios no Euclídeos. En particular, probó que localmente la pseudoesfera tiene la misma geometría que el espacio de hiperbólico de Lobachevsky.

Ya en 1901, Hilbert probó que el plano hiperbólico no podía ser inmerso isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ , zanjando así negativamente la cuestión sobre si existía una superficie de curvatura negativa que tenga globalmente la geometría del espacio hiperbólico, sin que aparezcan singularidades. Un año más tarde, probó el siguiente resultado:

**Teorema 1.1 (Hilbert (1902))** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa y con curvatura gaussiana constante menor que cero, entonces no existe para  $\Sigma$  una inmersión isométrica en  $\mathbb{R}^3$ .*

Más general que el anterior, ya que ahora se extiende a todas las superficies con curvatura de Gauss constante negativa.

En este momento, hemos llegado a la cuestión que queremos resolver en este documento, vamos a generalizar el teorema **Hilbert (1902)** probando que sus tesis se satisfacen para superficies con curvatura de Gauss constante,  $K < 0$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{S}^3$  y  $K < -1$  en  $\mathbb{H}^3$ . Para ello, nos basaremos en [8] y es ahí donde se pueden observar los resultados finales.

## 2. Variedades Riemannianas

En esta sección, mostraremos el marco teórico en el que se basa el teorema, generalizando los conceptos vistos en las asignaturas de “Curvas y superficies” de segundo de carrera y “Teoría global de superficies” de tercero. Con el fin de que cualquier persona que tenga dichos conocimientos entienda con una mayor profundidad dicho teorema.

Comenzaremos dando una introducción al estudio variedades diferenciables, que en cierto modo generaliza el concepto de superficie. Continuaremos dotando a las variedades diferenciables de una métrica y estudiaremos brevemente las propiedades intrínsecas a la geometría de las mismas. Por último, estudiaremos las inmersiones isométricas definiendo ciertos conceptos de la geometría extrínseca de las mismas cuando las dotamos de una métrica inducida por el ambiente.

Para ello tomaremos información de la bibliografía usando principalmente [3] para los conceptos de la teoría clásica de superficies y [4] para las generalizaciones y demostraciones de los teoremas más importantes.

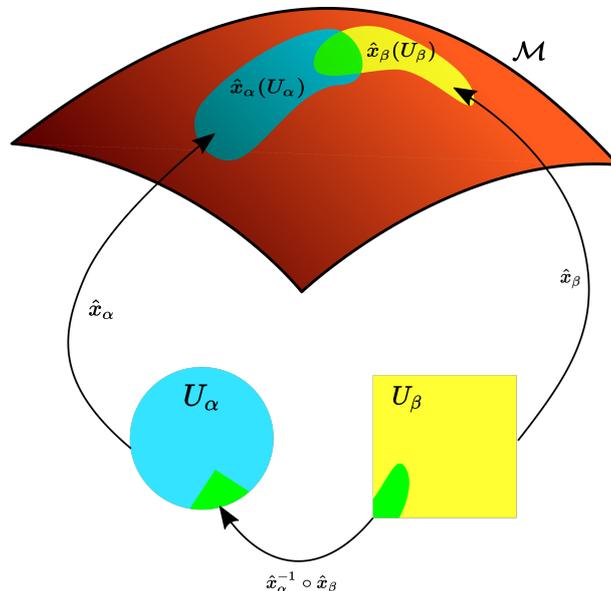
### 2.1. Variedades Diferenciables

Definiremos las  $n$ -variedades diferenciables como conjuntos abstractos sobre los que definiremos una estructura diferenciable, la cual induce una topología sobre el mismo. Diremos que es de dimensión  $n$  pues impondremos que sea localmente homeomorfa a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . En adelante, asumiremos que la diferenciabilidad es de clase  $C^\infty$  a menos que se indique lo contrario. Denotaremos por  $\mathcal{M}$  a tal conjunto.

**Definición 2.1** *Consideraremos la familia de aplicación biyectivas,  $\{\hat{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}, \alpha \in \Omega\}$  de un abierto  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  a un conjunto  $\mathcal{M}$  y siendo  $\Omega$  un conjunto arbitrario de índices, tales que:*

1.  $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} \hat{x}_\alpha(U_\alpha)$ .
2. *para todo par  $\alpha, \beta \in \Omega$  tales que  $\hat{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \hat{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$  tenemos que  $\hat{x}_\alpha^{-1}(W)$  y  $\hat{x}_\beta^{-1}(W)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  además la aplicación  $\hat{x}_\alpha^{-1} \circ \hat{x}_\beta : U_\beta \rightarrow U_\alpha$  es diferenciable  $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ .*
3.  $\{U_\alpha, \hat{x}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  *es un conjunto maximal respecto a las condiciones anteriores, esto es, si  $(U, \hat{x})$  es tal que  $\exists \alpha \in \Omega / U \cap U_\alpha \neq \emptyset$  y  $\hat{x}^{-1} \circ \hat{x}_\alpha, \hat{x}_\alpha^{-1} \circ \hat{x}$  son diferenciables  $\Rightarrow (U, \hat{x}) \in \{U_\alpha, \hat{x}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ .*

Al conjunto  $\mathcal{M}$  junto con la familia  $\{(U_\alpha, \hat{x}_\alpha), \alpha \in \Omega\}$ , se lo conoce como  $n$ -Variedad diferenciable. Además, a una familia  $\{(U_\alpha, \hat{x}_\alpha), \alpha \in \Omega\}$  que cumple con las condiciones 1 y 2 de la definición se la conoce como una estructura diferenciable en  $\mathcal{M}$



**Figura 1:** Muestra gráficamente la definición de variedad diferenciable.

A cada par  $(U_\alpha, \hat{x}_\alpha)$  se le conoce como *parametrización local* o *sistema de coordenadas* o *carta local* de  $\mathcal{M}$ , al abierto  $U_\alpha$  como *espacio de coordenadas*. Las composiciones  $\hat{x}_\alpha^{-1} \circ \hat{x}_\beta$  de la condición 2 se llaman *cambios de coordenadas*, *cambios de variables* o *cambios de cartas* y a la familia  $\{U_\alpha, \hat{x}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  se le llama un *atlas* sobre  $\mathcal{M}$  y se denota por  $\mathcal{A}$ .

Cambio de cartas		Estructura
Continuo	$\leftrightarrow$	Variedad Topológica
Diferenciable	$\leftrightarrow$	Variedad Diferenciable
Analítica	$\leftrightarrow$	Variedad Analítica
Afín	$\leftrightarrow$	Variedad Afín
Projectiva	$\leftrightarrow$	Variedad Projectiva
	$\dots$	

**Tabla 1:** Tabla donde nos muestra dependiendo de lo que exijamos al cambio de cartas, el tipo de estructura que encontramos en la variedad. Véase [14].

**Observación 2.2** En la definición, a los cambios de variables,  $\hat{x}_\alpha^{-1} \circ \hat{x}_\beta$  les hemos exigido la hipótesis de diferenciable  $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ , con lo que obtenemos una variedad diferen-

ciable. Si exigiéremos otras hipótesis, obtendríamos distintos tipos de estructura sobre  $\mathcal{M}$ , según aparece en la tabla 1.

**Observación 2.3 (Topología)** La estructura diferenciable induce una topología sobre  $\mathcal{M}$ . Diremos que el conjunto  $O \subset \mathcal{M}$  es un abierto de  $\mathcal{M}$  si  $\hat{x}_\alpha^{-1}(O \cap U_\alpha)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall (U_\alpha, \hat{x}_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Además,  $\mathcal{M}$  es compacto si existe un recubrimiento finito de  $\mathcal{M}$  por abiertos de dicha topología sobre  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.4 (Curva y Vector tangente)** Llamaremos curva de  $\mathcal{M}$  a una aplicación diferenciable  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  con  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Podemos escribir  $c = \hat{x} \circ u(t)$  donde  $u : I \rightarrow U/t \mapsto u(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  es diferenciable.

Sea  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva y  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $c(0) = p$ , llamaremos vector tangente a  $c$  en  $p$  a  $c'(0)$ , que calcularemos:

$$c'(0) = \left. \frac{d(\hat{x} \circ u(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_i u'_i(t) \hat{x}_{u_i}(u(t)) \Big|_{t=0} = \sum_i u'_i(0) \hat{x}_{u_i}(q) \quad (1)$$

donde  $p = \hat{x}(q)$ ,  $q \in U$ .

**Definición 2.5 (Espacio Tangente)** Diremos que un espacio tangente de  $\mathcal{M}$  en el punto  $p = \hat{x}(q)$ ,  $q \in U$  (denotado  $T_p\mathcal{M}$ ), es aquel que contiene todos los posibles vectores tangentes a curvas de  $\mathcal{M}$  que pasan por  $p$ . Se puede probar que el conjunto  $T_p\mathcal{M}$  satisface las siguientes propiedades:

- Es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .
- El conjunto de operadores  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \right\}$  sobre  $p$  nos da una base de  $T_p\mathcal{M}$  para cada  $p \in \mathcal{M}$ .

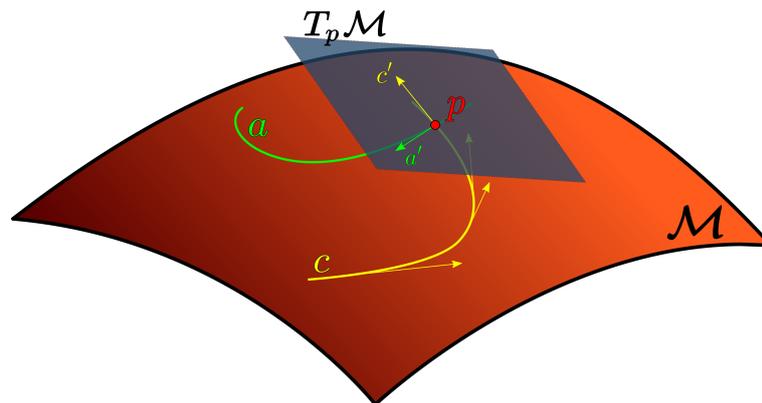
Se llama fibrado tangente de  $\mathcal{M}$ , denotado  $T\mathcal{M}$ , al conjunto  $\{(p, T_p\mathcal{M}), p \in \mathcal{M}\}$

**Definición 2.6 (Campos Vectoriales Tangentes)** Se define un campo de vectores tangentes o campo tangente como una aplicación  $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}/p \mapsto X(p) \in T_p\mathcal{M}$ . En parámetros locales,  $\hat{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ , se tiene que

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Al conjunto de los campos tangentes diferenciables en  $\mathcal{M}$  se denota por  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .

**Definición 2.7** Denotaremos por  $\mathfrak{C}^\infty(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$  al conjunto de las funciones diferenciables de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}$ .



**Figura 2:** Plano tangente de una variedad diferenciable

**Observación 2.8** Sea  $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ , entonces  $X(f)$  es la derivada direccional de  $f$ , es decir,

$$X(f) = \left( \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) f = \sum_i a_i f_{u_i}$$

Todos los conceptos en base a coordenadas locales, se puede probar que no dependen de la parametrización. Esto se debe a la exigencia sobre los cambios de cartas, es decir, que sean difeomorfismos.

**Definición 2.9 (Corchete de Lie)** Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  Llamamos corchete de Lie al único campo vectorial tangente tal que:

$$[X, Y] = XY - YX$$

## 2.2. Métrica Riemanniana

Uno de los conceptos centrales que se estudia en la teoría clásica de superficies de  $\mathbb{R}^3$  es la métrica inducida por el ambiente Euclídeo, esto es, el producto interno para los vectores del espacio vectorial tangente.

A continuación, veremos qué propiedades se exigen a las correspondencias que asignan a cada punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  un producto interno del espacio tangente para ser considerado métrica Riemanniana.

**Definición 2.10** Una métrica Riemanniana es una correspondencia:

$$\begin{aligned} I : \mathcal{M} &\rightarrow L^2((T_p \mathcal{M})^2, \mathbb{R}) \\ p &\mapsto I_p(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p \end{aligned}$$

diferenciable sobre  $p$ , que asigna a cada punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  un producto interno de  $T_p\mathcal{M}$ . Para  $X, Y, Z \in T_p\mathcal{M}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$  deben cumplirse las siguientes condiciones para cada  $p \in \mathcal{M}$ :

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es bilineal

$$\langle aX + bZ, Y \rangle_p = a \langle X, Y \rangle_p + b \langle Z, Y \rangle_p$$

$$\langle X, aY + bZ \rangle_p = a \langle X, Y \rangle_p + b \langle X, Z \rangle_p$$

2.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es no negativa

$$\langle X, X \rangle_p > 0, \forall X \neq 0$$

$$\langle X, X \rangle_p = 0 \Leftrightarrow X \equiv 0$$

3.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es simétrica

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle Y, X \rangle_p$$

**Observación 2.11** Al fijar  $p$ , tenemos que  $I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es un producto escalar, podemos definir de la manera usual una matriz  $(g_{ij}(p))$  simétrica y definida positiva tal que  $\langle X, Y \rangle_p = X^t(g_{ij})Y$ , para cada  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$

Además,  $I_p$  es diferenciable pues las funciones  $g_{ij}(p)$  lo són para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

**Observación 2.12** La primera forma fundamental es la forma cuadrática asociada a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , que es una forma bilineal. Es decir:

$$\langle v, v \rangle_p, \forall p \in T_p\mathcal{M}$$

En la bibliografía [4] se utiliza la notación de formas, es decir, se define:

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial u_l} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \\ 1 & \text{si } i = l \end{cases}$$

y la multiplicación de formas:

$$dx_i \wedge dx_j \left( \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial u_m} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \text{ ó } j \neq m \\ 1 & \text{si } i = l \text{ y } j = m \end{cases}$$

donde generalmente el símbolo  $\wedge$  se omite. En el caso de que  $i = j$  es común verlo escrito como  $dx_i^2$ . Tenemos:

$$I_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) dx_i dx_j \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Definición 2.13** El módulo de un vector tangente  $X$  se define como:

$$\|X\|_p^2 = I_p(X, X) = \langle X, X \rangle_p \in \mathbb{R}$$

El ángulo entre dos vectores tangentes se define como:

$$\angle(X, Y) = \arccos \frac{\langle X, Y \rangle_p}{\|X\|_p \|Y\|_p}$$

**Definición 2.14** Al par  $(\mathcal{M}, I)$  se le conoce como Variedad Riemanniana.

### 2.2.1. Isometrías

**Definición 2.15** Sean  $(\mathcal{M}, I)$  y  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{I})$  dos Variedades Riemannianas, sea un difeomorfismo  $f : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ ,  $p \in \mathcal{M}$  y sea  $df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\tilde{\mathcal{M}}$  su aplicación diferencial correspondiente. Se dice que  $f$  es una isometría si

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall u, v \in T_p\mathcal{M},$$

para cada  $p$  de  $\mathcal{M}$ .

### 2.2.2. Longitud de arco y distancia entre puntos a través de una curva.

Sea  $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva que une los puntos  $p = c(a) \in \mathcal{M}$  y  $q = c(b) \in \mathcal{M}$ . Llamaremos *longitud de arco de  $c$  entre  $p$  y  $q$*  al valor

$$d_c(p, q) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt \geq 0$$

es fácil ver que si  $c$  es una curva cerrada ( $p = c(a) = c(b)$ ) y no constante tenemos que  $d_c(p, p) > 0$  por lo que no es una métrica de la variedad, sin embargo, si tomamos la distancia como el ínfimo de estos valores, esto es,

$$d(p, q) = \inf \{d_c(p, q), c \text{ es una curva cuyos extremos son } p \text{ y } q\}, \quad (2)$$

que puede probarse que sí es una distancia en  $\mathcal{M}$  que nombraremos por *distancia intrínseca*.

### 2.3. Conexión de Levi-Civita

Un concepto fundamental de la teoría clásica de superficies es la derivada covariante, que se puede definir como la componente tangencial a una superficie de la derivada de un campo vectorial tangente a la superficie. Por ejemplo, dicho concepto se utiliza a la hora de buscar la aceleración tangencial de una curva regular  $c$  dentro de una superficie  $\Sigma$ , dicha aceleración tangencial de  $c$ . Sin embargo, a pesar de la forma con la que hemos presentado a la derivada covariante es un concepto intrínseco, mirar [3].

Es en este apartado que intentaremos generalizar dicho concepto, lo que llamaremos conexión de Levi-Civita y que posteriormente utilizaremos para definir las geodésicas.

**Definición 2.16 (Conexión afín y Levi-Civita)** *Una conexión afín sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  es una aplicación  $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  que notaremos por  $\nabla_X Y$ ,  $\forall (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .*

1. *Linealidad frente a la suma y el producto por  $f$  respecto a la primera componente,*

$$\nabla_{f_1 X + f_2 Z} Y = f_1 \nabla_X Y + f_2 \nabla_Z Y.$$

2. *Linealidad frente a la suma respecto a la segunda componente*

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

3. *Regla del producto respecto a la segunda componente*

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X (Y) + X(f)Y,$$

donde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ .

Además, se dice que  $\nabla$  es:

4. *Compatible con la métrica si cumple:*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

5. *Libre de torsión o simétrica si cumple:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

**Teorema 2.17 (Levi-Civita)** *Dada  $(\mathcal{M}, I)$  una Variedad Riemanniana, existe una única conexión afín  $\nabla$  compatible con la métrica  $I$  y libre de torsión .*

**Observación 2.18** *Tal métrica es conocida por conexión de Levi-Civita o conexión Riemanniana*

Por las propiedades exigidas en la definición de la conexión, podemos describirla unívocamente en coordenadas locales usando los elementos de la base de  $T_p\mathcal{M}$ :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad \forall i, j$$

A los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  los llamaremos *Símbolos de Christoffel* que calcularemos usando la fórmula:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} \right) \quad (3)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} \right) g^{km}$$

Donde la matriz  $(g^{km})$  es la inversa de  $(g_{ij})$

**Definición 2.19 (Geodésicas)** *Un campo vectorial  $Y$  a lo largo de una curva  $c$  regular se dice paralelo a lo largo de la curva  $c$  si  $\nabla_{c'} Y = 0$*

*Una curva no constante  $\gamma$  se llama geodésica si su campo tangente  $\gamma'$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$ . Es decir, si se cumple:*

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

**Observación 2.20** *Puede probarse que todas las curvas minimizantes en  $(\mathcal{M}, I)$  son arcos de geodésicas.*

Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva regular en  $\mathcal{M}$  y  $[a, b] \subset I$ ,  $I$  es un abierto de  $\mathbb{R}$ . Se prueba que:

**Teorema 2.21** *Dado  $t_0 \in [a, b]$  y  $v \in T_{c(t_0)}\mathcal{M}$ , existe un único campo paralelo  $X$  sobre  $\mathcal{M}$  tal que  $X(t_0) = v$ .*

**Definición 2.22 (Desplazamiento Paralelo)** *Sea  $c : I \rightarrow M$  es una curva en  $\mathcal{M}$  y  $[a, b] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ . Se llama desplazamiento paralelo de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  a lo largo de  $c$  a la aplicación  $z_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} : T_{c(\mathbf{a})}\mathcal{M} \rightarrow T_{c(\mathbf{b})}\mathcal{M}$  tal que  $z_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(v)$  es el valor en  $\mathbf{b}$  del único campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  paralelo a lo largo de  $c$  tal que  $X(\mathbf{a}) = v$ .*

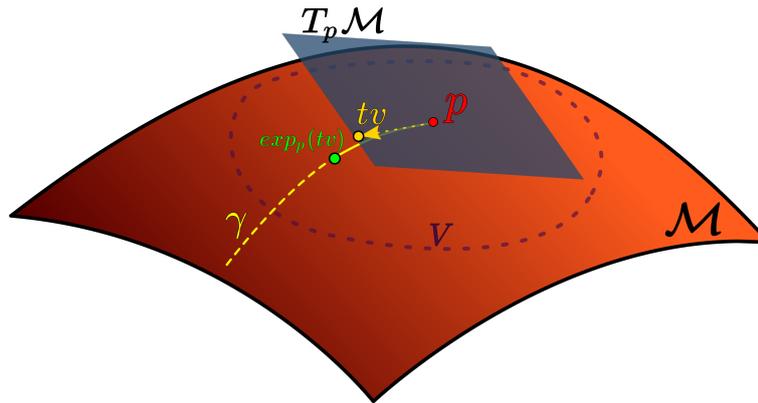
**Observación 2.23** *Sean  $Y_1$  e  $Y_2$  dos desplazamientos paralelos a lo largo de  $c$ , entonces  $\langle Y_1, Y_2 \rangle_{c(t)}$  es constante para todo  $t \in I$ .*

**Teorema 2.24 (Existencia y unicidad de geodésicas)** *Para cada punto  $p \in \mathcal{M}$  y cada  $v \in T_p\mathcal{M}$ , tal que  $\langle v, v \rangle_p = 1$  existe un  $\epsilon > 0$  para el cual solo existe una única geodésica  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  parametrizada por la longitud de arco que cumple con  $c(0) = p$  y  $c'(0) = X$ .*

**Definición 2.25 (Aplicación Exponencial)** Fijado un punto  $p \in \mathcal{M}$  sea  $\gamma_v^{(p)}$  la única geodésica parametrizada por la longitud de arco que pasa por  $p$  en la dirección de  $v$ . Para un abierto  $W$  de  $0 \in T_p\mathcal{M}$  la función

$$\begin{aligned} \exp_p : W \subseteq T_p\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ tv &\mapsto \gamma_v^{(p)}(t) \end{aligned}$$

Se conoce como aplicación exponencial en el punto  $p$ .



**Figura 3:** Función Exponencial.

Se puede probar que dado  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\exp_p : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

**Definición 2.26** Sea  $V \subseteq \mathcal{M}$  un entorno de  $p \in \mathcal{M}$  se llama entorno normal de  $p$  si la aplicación exponencial  $\exp_p$  restringida a  $V$  es un difeomorfismo sobre la imagen.

### 2.3.1. Variedades Riemannianas Completas

Cuando a un conjunto  $\mathcal{X}$  se dota de métrica se le conoce como espacio métrico. Además, conocemos como *espacio métrico completo* cuando todas las sucesiones de Cauchy en  $\mathcal{X}$  son convergentes. Dicho en otras palabras, que  $\mathcal{X}$  no tiene “huecos”.

Veamos como podemos adaptar este concepto a las variedades Riemannianas, donde consideramos  $(\mathcal{M}, d)$  como un espacio métrico, siendo  $d$  la distancia intrínseca ya definida previamente.

**Definición 2.27 (Geodésicamente Completa)** Se dice que una Variedad Riemanniana  $\mathcal{M}$  es geodésicamente completa si para toda geodésica  $\gamma(t)$  que empieza en  $p$  está definida  $\forall t \in \mathbb{R}$ , es decir, la función  $\exp_p$  esta definida  $\forall v \in T_p\mathcal{M}$  y  $\forall p \in \mathcal{M}$

**Teorema 2.28 (Teorema de Hopf-Rinow)** *Sea  $\mathcal{M}$  una Variedad Riemanniana,  $p \in \mathcal{M}$  y  $d$  la distancia intrínseca en  $\mathcal{M}$ . Son equivalentes:*

- $\exp_p$  está definida en todo  $T_p\mathcal{M}$ .
- Los conjuntos cerrados y acotados de  $\mathcal{M}$  son compactos.
- $(\mathcal{M}, d)$  es completo como espacio métrico.
- $(\mathcal{M}, I)$  es geodésicamente completo.
- Existe una secuencia de subconjuntos compactos  $K_n \subset \mathcal{M}, K_n \subset K_{n+1}$  tal que  $\bigcup_n K_n = \mathcal{M}$  y si  $q_n \notin K_n, \Rightarrow d(p, q_n) \rightarrow +\infty$ .

Además, si se da cualquiera de las anteriores, para cualquier  $q \in \mathcal{M}$  existe un arco de geodésica  $\gamma$  que minimiza la distancia entre  $p$  y  $q$ .

## 2.4. Curvatura

En la teoría clásica de superficies, la curvatura gaussiana de una superficie se define como un concepto extrínseco, a la misma, asociado a la variación de la aplicación de Gauss en sus puntos. Más tarde, se prueba haciendo cuentas sobre las ecuaciones de compatibilidad, que dicha curvatura es un concepto intrínseco, es decir, podemos calcularla a partir de la parametrización y su métrica. En concreto, se pensaba que la curvatura de Gauss es expresable en función de los símbolos de Christoffel. En este contexto, coincide con el concepto de la curvatura seccional que definiremos en este apartado.

Dicho esto, comenzaremos por definir el tensor de curvatura:

**Definición 2.29** *El tensor de curvatura  $R$  sobre una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, I)$  es una aplicación dado por  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  donde*

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

donde  $\nabla$  es la Conexión de Levi-Civita.

Llamamos tensor de curvatura de 4 variables  $a(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle, \forall X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

**Observación 2.30 (Propiedades)** *Sea  $R$  el tensor de curvatura y  $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  el tensor de curvatura de 4 componentes,  $\forall X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$*

- $R$  es bilinear en  $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

- El operador  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  es lineal.
- Identidad De Bianchi:  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
- $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
- $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
- $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

En coordenadas locales podemos describir el tensor de curvatura tal y como hemos hecho con la conexión de Levi-Civita, usando coeficientes:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \frac{\partial}{\partial u_k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial u_l},$$

donde

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s + \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s. \quad (4)$$

Además,  $\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_s} \right\rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks}$ , siendo  $(g_{ls})$  la matriz asociada a  $I_p$ .

#### 2.4.1. Curvatura seccional

**Definición 2.31 (Curvatura Seccional)** Sea  $\sigma$  un subespacio bidimensional del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$ , y sean  $x, y \in \sigma$  dos vectores linealmente independientes, llamamos curvatura seccional de  $\sigma$  en  $p$  a:

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2} \quad (5)$$

**Observación 2.32** La curvatura seccional es invariante frente a la elección de la base  $x$  e  $y$  de  $\sigma \subseteq T_p\mathcal{M}$ .

**Observación 2.33** Conocer  $K(\sigma)$  para todo  $\sigma$  determina completamente el tensor de curvatura  $R$ .

**Corolario 2.34**  $(\mathcal{M}, I)$  es una variedad Rimaniana con curvatura seccional constante  $K_0$  si, y solo si, en cada  $p \in \mathcal{M}$  se cumple:

$$(X, Y, Z, T) = K_0[\langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle], \quad \forall X, Y, Z, T \in T_p\mathcal{M}$$

## 2.5. Inmersiones

A diferencia de la teoría clásica de superficies, donde existe un ambiente ( $\mathbb{R}^3$ ) que contiene a las superficies y las dota de una métrica, hemos considerado a las variedades Riemannianas como conjuntos abstractos en sí, dotados de una estructura diferenciable y de una métrica Riemanniana no inducida que no está inmersa dentro de una variedad Riemanniana de mayor dimensión.

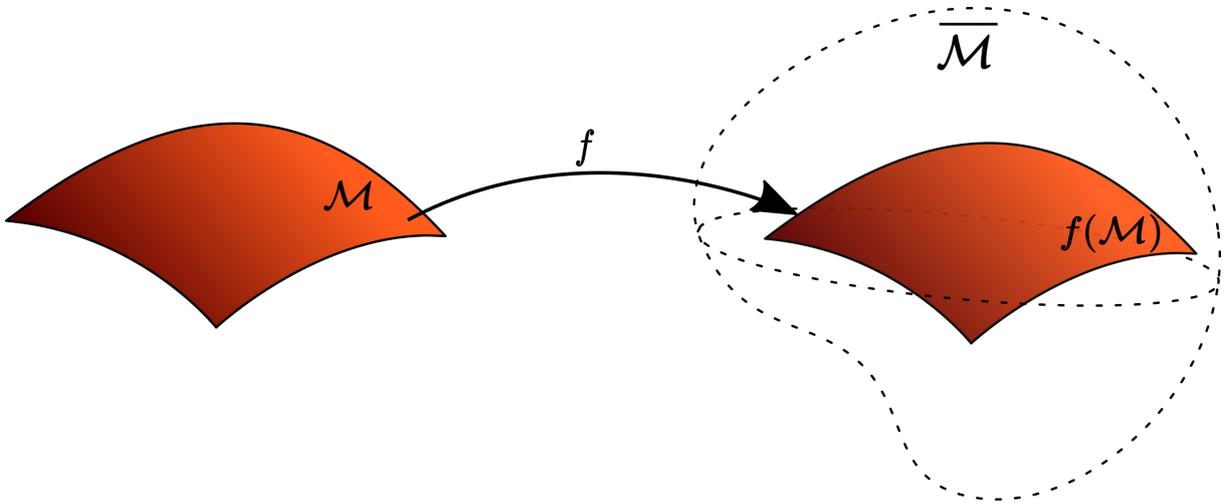
En el contexto de las variedades Riemannianas se pueden generalizar los conceptos de ambiente y métrica inducida por el de sus subvariedades.

A continuación, vamos a definir el concepto de inmersión de una  $n$ -variedad en una  $(n+k)$ -variedad, donde  $k > 0$ .

**Definición 2.35** Sean  $\mathcal{M}^n$  y  $\mathcal{N}^m$  dos variedades Riemannianas con  $m = n+k$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$  la aplicación  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es una inmersión de  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$  si es diferenciable y  $d\varphi_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$  es inyectiva,  $\forall p \in \mathcal{M}$ .  $k$  se llama codimensión de la inmersión.

Si además,  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$  es homeomorfismo, se dice que  $\varphi$  es un embebimiento de  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$ .

Diremos que  $\mathcal{M}$  es una subvariedad de  $\mathcal{N}$  si  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$  y la aplicación inclusión  $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  es un embebimiento.



**Figura 4:** Representación de una inmersión

**Observación 2.36** Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$  una inmersión de una  $n$ -Variedad Riemanniana en una  $m$ -Variedad Riemanniana, donde  $k = m - n > 0$ , entonces, por el teorema de la función inversa, el cual también se cumple para aplicaciones diferenciables entre Variedades

Riemannianas, para cada  $p \in \mathcal{M}$  existe un entorno  $U \subset \mathcal{M}$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \overline{\mathcal{M}}$  es una subvariedad de  $\overline{\mathcal{M}}$ .

En cada punto de  $p \in \mathcal{M}$  el producto interno de  $T_p\overline{\mathcal{M}}$  se descompone en:  $T_p\overline{\mathcal{M}} = T_p\mathcal{M} \oplus (T_p\mathcal{M})^\perp$ , donde  $(T_p\mathcal{M})^\perp$  se llama complemento ortogonal de  $T_p\mathcal{M}$  en  $T_p\overline{\mathcal{M}}$  y

$$v = v^T + v^N \quad v \in T_p\overline{\mathcal{M}}, \quad v^T \in T_p\mathcal{M}, \quad v^N \in (T_p\mathcal{M})^\perp$$

$v^T$  es la *componente tangencial* de  $v$  y  $v^N$  es la *componente normal* de  $v \in T_p\overline{\mathcal{M}}$

Denotaremos a la conexión de Levi-Civita de  $\overline{\mathcal{M}}$  por  $\overline{\nabla}$ , entonces tenemos que la conexión Riemanniana de  $\mathcal{M}$  es  $\nabla$  y se cumple:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T,$$

con  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{\mathcal{M}})$  extensiones diferenciables de  $X, Y$ .

**Definición 2.37** Sea  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{\mathcal{M}})$  dos extensiones cualesquiera de  $X, Y$

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\perp$$

En [4] se prueba que  $B$  es bilineal y simétrica.

**Definición 2.38 (Campos normales)** Se define un campo vectorial normal a  $\mathcal{M}$  como una aplicación:

$$\begin{aligned} X^\perp : \mathcal{M} &\rightarrow T\mathcal{M}^\perp \\ p &\mapsto X^\perp(p) \end{aligned}$$

Además, llamaremos por  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^\perp$  el conjunto de los campos normales diferenciables en  $\mathcal{M}$ .

Se prueba que, si  $p \in \mathcal{M}$  y  $\nu \in (T_p\mathcal{M})^\perp$ , entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} H_\nu : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle B(x, y), \nu \rangle_p \end{aligned}$$

es una forma bilineal y simétrica.

**Definición 2.39 (Segunda forma fundamental)** Llamaremos segunda forma fundamental de la inmersión  $f$  en  $p$  respecto al vector normal  $\nu$  a la forma cuadrática

$$\begin{aligned} II_\nu : T_p\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto H_\nu(x, x) \end{aligned}$$

**Teorema 2.40 (Fórmula de Gauss)** Sean  $p \in \mathcal{M}$  y  $x, y \in T_p\mathcal{M}$  vectores ortonormales. Entonces,

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle_p - |B(x, y)|_p^2 \quad (6)$$

donde  $\bar{K}$  es la curvatura seccional de  $\bar{\mathcal{M}}$

**Definición 2.41 (Operador de forma)** Sea  $\nu \in T_p\mathcal{M}^\perp$  llamaremos operador de forma o aplicación de Weingarten  $S_\nu : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$  a la única aplicación lineal auto-adjunta tal que

$$\langle S_\nu x, y \rangle = H_\nu(x, y)$$

Además sean  $p \in \mathcal{M}$ ,  $x \in T_p\mathcal{M}$  y  $T_\nu\mathcal{M} \in T_p\mathcal{M}^T$ . Si  $N \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\perp$  es una extensión local de  $\nu$ , entonces se cumple que:

$$S_\nu x = -(\bar{\nabla}_x N)^T$$

Podemos apreciar que la definición del operador de forma es una generalización del endomorfismo de Weingarten de la teoría clásica de superficies.

**Definición 2.42** Sea  $f$  una inmersión, se dice que es geodésica en  $p \in \mathcal{M}$  si  $II_\nu$  es idénticamente nula en  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\forall \nu \in T_p\mathcal{M}^{\text{bot}}$ . Se dice que es totalmente geodésica si  $f$  es geodésica en  $p$ ,  $\forall p \in \mathcal{M}$ .

**Observación 2.43** Se puede caracterizar el hecho de que  $f$  es una inmersión geodésica en  $p$  observando las geodésicas de  $\mathcal{M}$  que salen de dicho punto.  $f : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$  es inmersión geodésica en  $p$  si, y solo si, toda geodésica de  $\mathcal{M}$  que sale de  $p$  es también geodésica de  $\bar{\mathcal{M}}$  en  $p$ .

Dada una base ortonormal (b.o.n.)  $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  de  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ , donde  $U$  es un entorno de  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $f|_U$  es un embebimiento, se tiene que

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m H_{E_i}(x, y) E_i, \quad \forall x, y \in T_p\mathcal{M}.$$

Se puede probar que el vector

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\text{traza}(S_{E_i})) E_i$$

no depende de la b.o.n. de  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ .

**Definición 2.44** El vector  $H$  definido arriba se llama vector curvatura media de la inmersión  $f$  y  $f$  se dice mínima si, y solo si,  $H(p) = 0$ ,  $\forall p \in \mathcal{M}$

**Observación 2.45** Toda inmersión totalmente geodésica es mínima, pero no al contrario. Por ejemplo el catenoide es mínima pero no es totalmente geodésica, pues existen geodésicas que no lo son de  $\mathbb{R}^3$

### 2.5.1. Inmersiones de hipersuperficies.

A continuación, reformularemos el teorema de Gauss para el caso en el que las variedades tienen codimensión 1, es decir, que  $\overline{\mathcal{M}}$  es una  $(n+1)$ -variedad Riemanniana. También se llaman hipersuperficies de  $\overline{\mathcal{M}}$ .

**Teorema 2.46 (Formula de Gauss)** Sean  $p \in \mathcal{M}$  y  $\nu \in (T_p\mathcal{M})^\perp$ ,  $|\nu| = 1$ . una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $S_\nu(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Entonces,  $H(e_i, e_i) = \lambda_i$  y  $H(e_i, e_j) = 0$ ,  $i \neq j$  y la fórmula de Gauss dada en el teorema 2.39 se escribe así:

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \quad (7)$$

**Definición 2.47** Llamamos curvatura extrínseca o Gauss-Kronecker a  $k_{ext} = \lambda_i \lambda_j = \det(S_\nu)$ , donde  $p$  y  $\nabla$  están en el contexto del teorema 2.45.

Nombramos curvatura intrínseca de  $\mathcal{M}$  a su curvatura seccional y se denota por  $K_{int}$ .

**Corolario 2.48** Si la curvatura seccional del espacio ambiente  $\overline{\mathcal{M}}$  y de  $\mathcal{M}$  son constantes  $c$  y  $K_{int}$ , respectivamente. Entonces la fórmula de Gauss quedaría:

$$K_{int} = k_{ext} + c. \quad (8)$$

**Proposición 2.49** Sea  $(g_{ij})$  la matriz de  $I$ ,  $(h_{ij}^{(\nu)})$  la matriz de  $II_\nu$  y  $S_\nu$  el operador de forma, se tiene:

$$\det(S_\nu) \det(g_{ij}) = \det(h_{ij}^{(\nu)}) \quad (9)$$

*Demostración.* De la definición 2.35, tenemos que  $\langle S_\nu x, y \rangle = H_\nu(x, y)$ ,  $\forall x, y \in T_p\mathcal{M}$  que en forma vectorial podemos reescribir:

$$(S_\nu x)^t (g_{ij}) y = x^t S_\nu^t (g_{ij}) y = x^t (h_{ij}^{(\nu)}) y \Rightarrow S_\nu^t (g_{ij}) = (h_{ij}^{(\nu)})$$

donde  $(h_{ij}^{(\nu)})$  es la matriz asociada a  $H_\nu$ . Sacando determinantes:

$$\det(S_\nu) \det(g_{ij}) = \det(h_{ij}^{(\nu)})$$

■

### 3. Espacios Modelo

En el 300 a.C. Euclides publicó *Los Elementos*, obra que se sustenta de 5 postulados con los cuales construye la geometría plana.

1. Por dos puntos pasa una única recta.
2. Un segmento rectilíneo puede prolongarse en una recta.
3. Hay una única circunferencia para cada centro y diámetro.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Al incidir una recta con otras dos, los ángulos internos del mismo lado son menores que el ángulo recto, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Donde este último es equivalente a: dada una recta y un punto exterior a la misma, existe una única recta paralela a la primera que pasa por el punto exterior. Es por esto que se conoce como el postulado de las paralelas.

Dada la aparente complejidad del quinto postulado, se pensaba que éste se podía demostrar a partir de los cuatro anteriores. Todos los intentos, fracasos.

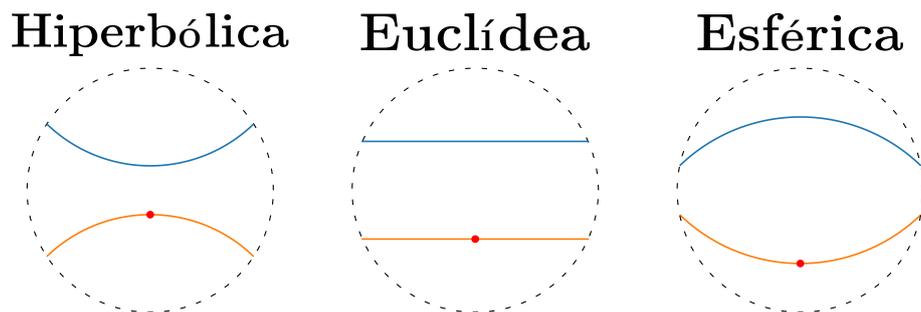
Tuvieron que pasar 22 siglos hasta que Gauss [17], Bolyai [19] y Lobachevsky [18] probaran de forma independiente que el postulado de las paralelas no es consecuencia de los cuatro primeros. Para ello, al negar el quinto postulado suponiendo la existencia de más de una paralela, llegaban a una geometría consistente. Lo que ahora conocemos como geometría hiperbólica. Más tarde, Riemann hizo lo propio con la negación sobre el postulado de las paralelas donde no existe ninguna. Llamada geometría esférica.

Los espacios modelo, cumplen con una generalización de los cuatro postulados de Euclides, donde consideramos a las geodésicas como rectas, y la versión del postulado de las paralelas que cumple vendrá condicionada por el signo de su curvatura seccional. Ver figura 5

**Definición 3.1 (Espacio Modelo)** *Llamamos espacios modelo a Variedades Riemannianas 3-dimensionales completas, simplemente conexas y con curvatura seccional constante  $c$  y lo denotaremos por  $\mathbb{M}^3(c)$ .*

Del *teorema de Cartan* tenemos que salvo isometrías hay tres tipos de espacios modelo según su curvatura seccional  $c$

- Con curvatura seccional nula, el espacio Euclídeo ( $\mathbb{R}^3$ ), con métrica Riemanniana usual,  $I = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ .
- Con curvatura seccional  $c = 1$ , el espacio esférico  $\mathbb{S}^3 = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x \in \mathbb{R}^4\}$  con la métrica usual de  $\mathbb{R}^4$ ,  $I = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ .
- Con  $c = -1$ , el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3 = \{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x \in \mathbb{R}^4, x_0 > 0\}$  con la métrica lorentziana de  $\mathbb{R}^4$ ,  $I = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ .



**Figura 5:** Muestras las distintas versiones del 5 postulado.

## 4. Resultados Previos

En esta sección comenzaremos definiendo en abstracto el concepto de par de Codazzi, con el que podemos probar varios resultados, entre ellos el **Lema 4.4** que probaremos a continuación.

La potencia de este tipo de resultados reside en el hecho de que si al realizar una inmersión puedes probar que la métrica inducida sobre la subvariedad y su segunda forma fundamental forman un par de Codazzi, entonces es posible utilizar todos los enunciados demostrados en abstracto.

**Definición 4.1 (Par fundamental)** *Sea un par de formas cuadráticas reales  $(I, II)$  definidas sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$ , donde  $I$  es una métrica Riemanniana. Para cada  $p \in \mathcal{M}$  se define el endomorfismo de Weingarten  $A_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$  que cumple con:*

$$II(X, Y) = I(A_p(X), Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

A  $(I, II)$  se conoce como par fundamental de  $\mathcal{M}$

**Definición 4.2 (Par de Codazzi)** *Un par fundamental  $(I, II)$  se dice de Codazzi si satisface la ecuación de Mainardi-Codazzi, esto es*

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (10)$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $(\mathcal{M}, I)$  y  $A$  el endomorfismo de Weingarten.

**Definición 4.3** *Si  $\mathcal{M}$  es una 2-variedad Riemanniana, se le conoce como superficie abstracta y la denotaremos por  $\Sigma$ .*

**Definición 4.4** *Llamamos curvaturas principales del par fundamental  $(I, II)$  de  $\Sigma$  a los autovalores del operador de forma  $A$  y los denotamos por  $k_1$  y  $k_2$ .*

*Diremos que están estrictamente separadas si existen dos constantes  $c_1$  y  $c_2$  tales que en  $\Sigma$  se cumple la desigualdad:*

$$k_1 \leq c_1 < c_2 \leq k_2.$$

Sea  $(I, II)$  par de Codazzi sobre  $\Sigma$  y  $A$  su endomorfismo de Weingarten, entonces definiremos la *curvatura extrínseca*  $K_{ext}$  como el determinante de  $A$  y la *curvatura media*  $H$  es la mitad de la traza de  $A$ .

Observamos que a priori no hay una relación entre la curvatura extrínseca del par fundamental y la curvatura de Gauss de la métrica  $I$  definida en el apartado anterior.

#### 4.1. Existencia de una Red Local de Tschebyshev en superficies.

De la teoría de superficies sabemos que si  $\Sigma$  es una superficie simplemente conexa inmersa en un ambiente Euclídeo y si tiene curvatura  $K < 0$ , entonces para cada punto  $p \in \Sigma$ , el plano tangente  $T_p\Sigma$  contiene exactamente dos direcciones asintóticas. Bajo esta hipótesis sobre  $K$ , se puede probar que existe una parametrización de  $\Sigma$  tal que:

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= 2fdudv \end{aligned}$$

donde el hecho de que  $e = g = 0$  se debe a que las curvas de coordenadas de dicha parametrización son líneas asintóticas dichas direcciones asintóticas. Si además  $E = G = 1$ , entonces a dicha parametrización se le llama *Red Local de Tschebyshev*.

Se puede probar que es cierto para 2-variedades diferenciables dotadas de un par de Codazzi.

**Lema 4.5** *Sea  $(I, II)$  un par de Codazzi en una superficie  $\Sigma$  con  $K_{ext} = k < 0$  constante, entonces existen coordenadas locales  $(u, v)$  y una función diferenciable  $\omega(u, v)$  tal que  $0 < \omega < \pi$ , que cumplen:*

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2 \\ II &= 2\sqrt{-k}\sin\omega dudv \end{aligned}$$

Además,

1. Si  $\Sigma$  es simplemente conexa entonces existen funciones globales  $u, v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $(u, v)$  son coordenadas locales, en todo punto, en las condiciones anteriores.
2. Si  $\Sigma$  es simplemente conexa y  $I$  es completa, entonces la aplicación anterior  $(u, v) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo global.

*Demostración.*

Consideramos coordenadas locales (globales en el caso de que  $\Sigma$  sea simplemente conexa) tales que:

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= 2fdudv \end{aligned}$$

con  $f > 0$ . Denotamos por  $D = EG - F^2$ , donde  $E = I\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right)$ ,  $F = I\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$  y  $G = I\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$  y usando (3) tenemos:

$$\begin{aligned} D_u &= E_u G + E G_u - 2F_u F \\ &= 2(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F)G + 2(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G)E - 2(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \frac{1}{2}E_v)F \\ &= 2(\Gamma_{11}^1 E)G + 2(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G)E - 2(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F)F \\ &= 2D(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \end{aligned}$$

de este resultado y usando un cálculo análogo, podemos deducir:

$$\frac{D_u}{2D} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \quad \frac{D_v}{2D} = \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1$$

Usando (10) y teniendo en cuenta que  $e = II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right)$ ,  $f = II\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$  y  $g = II\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left\langle T_S\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S \frac{\partial}{\partial v} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S \frac{\partial}{\partial u} - S \left[ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right], \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle S \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle + \left\langle S \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &= - \left\langle S \frac{\partial}{\partial v}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle + \left\langle S \frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle S \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial u} \left\langle S \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &= - \left\langle S \frac{\partial}{\partial v}, \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle - e_v \\ &\quad + \left\langle S \frac{\partial}{\partial u}, \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle + f_u \\ &= f_u - e_v + e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

de forma similar tenemos

$$\left\langle T_S\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = g_u - f_v + e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2$$

y como sabemos que  $e = g = 0$  entonces es evidente que

$$\frac{f_u}{f} = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \quad \frac{f_v}{f} = \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1$$

entonces,

$$\frac{D_u}{2D} - \frac{f_u}{f} = 2\Gamma_{12}^2 \quad \frac{D_v}{2D} - \frac{f_v}{f} = 2\Gamma_{12}^1$$

Usando (9) tenemos que  $k = \frac{-f}{D}$  es constante y negativa, entonces

$$0 = (k)_u = \frac{-2ff_uD + f^2D_u}{D^2} \Rightarrow -2f_uD + fD_u$$

Por otro lado,

$$2\Gamma_{12}^2 = \frac{D_u}{2D} - \frac{f_u}{f} = \frac{-2f_uD + fD_u}{2fD} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = 0.$$

Si derivamos  $(k_{ext})_v$  y siguiendo un proceso equivalente, tenemos:

$$2\Gamma_{12}^1 = \frac{D_v}{2D} - \frac{f_v}{f} = 0 \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} = 0.$$

Calcularemos  $E_v$  y  $G_u$

$$E_v = 2I \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) = 0 \quad G_u = 2I \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = 0$$

con lo que tenemos que  $E$  es función de  $u$  y  $G$  de  $v$ . Reemplazamos  $u$  y  $v$  por  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ , respectivamente, Donde,

$$\tilde{u} = \int \sqrt{E(u)} du \quad \tilde{v} = \int \sqrt{G(v)} dv$$

donde tenemos

$$I = d\tilde{u}^2 + 2F\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{v}^2$$

$$II = 2f\tilde{u}\tilde{v}$$

al calcular  $K_{ext} = k$

$$k = \frac{-f^2}{1 - F^2} \Rightarrow F^2 + \left( \frac{f}{\sqrt{-k}} \right)^2 = 1$$

Podemos definir una función diferenciable  $\omega$  tal que:

$$F = \cos \omega \quad \frac{f}{\sqrt{-k}} = \sin \omega$$

además, como  $0 < 1 - F^2 = 1 - \cos^2 \omega = \sin^2 \omega$  por lo tanto  $0 < \omega < \pi$ , y con esto, el par  $(I, II)$  quedará como se buscaba.

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2 \\ III &= 2\sqrt{-k} \sin \omega dudv \end{aligned}$$

Como  $\Sigma$  es simplemente conexa,  $(u, v) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo local. Por último, consideremos la nueva métrica Riemanianna

$$III = du^2 - 2 \cos \omega dudv + dv^2,$$

entonces

$$I + III = 2(du^2 + dv^2)$$

por lo tanto  $du^2 + dv^2$  es una métrica completa y llana por ser  $I$  completa, por tanto:

$$(u, v) : (\Sigma, du^2 + dv^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es una isometría global y, por lo tanto, ha de ser un difeomeorfismo global. ■

## 5. Teorema de Hilbert

En esta sección se demuestra una extensión del anteriormente mencionado teorema de Hilbert, para inmersiones isométricas de  $k_{ext} < 0$  en espacios modelo, usando la técnica de pares de Codazzi. Esto se debe a que es posible probar que la forma bilineal  $I$  y la forma cuadrática  $II$  inducidas por una inmersión isométrica de una superficie en un espacio modelo  $\mathbb{M}^3(c)$  forma un par de Codazzi y por lo tanto, nos encontramos en las condiciones del **Lema 4.4**.

**Teorema 5.1 (de Hilbert)** *Sea  $\Sigma$  superficie con curvatura constante  $K$  isométricamente inmersa en  $\mathbb{M}^3(c)$ . Entonces*

1. Si  $K < 0$ , la inmersión no es completa para  $c \in \{0, 1\}$
2. Si  $K < -1$ , la inmersión no es completa para  $c = -1$

*Demostración.* Realizaremos una reducción al absurdo. Al suponer que existe dicha inmersión isométrica.

Por lo comentado arriba se cumplen las condiciones del **lema 4.1**, luego existe un par de parámetros globales  $(u, v) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2 \\ II &= 2\sqrt{-k} \sin \omega dudv \end{aligned}$$

donde podemos ver que  $E = G = 1, F = \cos \omega$  y  $e = g = 0, f = \sqrt{-k} \sin \omega$  donde  $0 < \omega(u, v) < \pi$ . Usando las ecuaciones de estructura, que podemos derivar de (3):

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \cos \omega \\ -\sin \omega \omega_u &= \Gamma_{11}^1 \cos \omega + \Gamma_{11}^2 \\ 0 &= \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \cos \omega \\ 0 &= \Gamma_{12}^1 \cos \omega + \Gamma_{12}^2 \\ -\sin \omega \omega_v &= \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \cos \omega \\ 0 &= \Gamma_{22}^1 \cos \omega + \Gamma_{22}^2 \end{aligned}$$

Tenemos tres pares de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \omega \omega_u \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \omega \omega_v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

En primer lugar, resolvamos (11) usando la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \omega = \sin^2 \omega \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos \omega \\ -\sin \omega \omega_u & 1 \end{vmatrix} = \cos \omega \sin \omega \omega_u$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega & -\sin \omega \omega_u \end{vmatrix} = -\sin \omega \omega_u$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\cos \omega \sin \omega \omega_u}{\sin^2 \omega} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \omega_u \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\sin \omega \omega_u}{\sin^2 \omega} = \frac{-1}{\sin \omega} \omega_u \end{aligned}$$

Analogamente resolvemos (13):

$$\begin{vmatrix} -\sin \omega \omega_v & \cos \omega \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin \omega \omega_v$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sin \omega \omega_v \\ \cos \omega & 0 \end{vmatrix} = \cos \omega \sin \omega \omega_v$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\sin \omega \omega_v}{\sin^2 \omega} = \frac{-1}{\sin \omega} \omega_v \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{\cos \omega \sin \omega \omega_v}{\sin^2 \omega} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \omega_v \end{aligned}$$

Resolvemos (12) viendo que:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos \omega \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tenemos:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$$

Usando la fórmula de Gauss (8), las definiciones (4), (5) y los resultados de calcular (11), (12) y (13), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
k + c &= \left( -\frac{\omega_u}{\sin \omega} \right)_v - \frac{\omega_u \cos \omega \omega_v}{\sin \omega^2} \iff \\
-(k + c) &= \frac{\omega_{uv} \sin \omega - \omega_u \omega_v \cos \omega}{\sin \omega^2} + \frac{\omega_u \cos \omega \omega_v}{\sin \omega^2} \\
-(k + c) &= \frac{\omega_{uv}}{\sin \omega}
\end{aligned}$$

donde  $w$  satisface la EDP:

$$\omega_{uv} = c_0 \sin \omega \quad (14)$$

con  $c_0 = -(k + c)$  y  $0 < \omega(u, v) < \pi$ .

Como,  $\omega_{uv} = c_0 \sin \omega > 0 \Rightarrow (\omega_u(u, v))_v > 0$  lo que quiere decir que  $\omega_u$  es (estrictamente) creciente respecto de  $v$ , es decir:

$$\omega_u(u, v) > \omega_u(u, 0), \forall v > 0.$$

Integrando respecto de  $u$  tenemos

$$\omega(b, v) - \omega(a, v) = \int_a^b \omega_u(u, v) du > \int_a^b \omega_u(u, 0) du = \omega(b, 0) - \omega(a, 0) \quad (15)$$

Como  $\omega_u$  no es idénticamente nula, salvo traslación, podemos suponer que  $\omega_u(0, 0) \neq 0$ . Además,  $\omega(-u, -v)$  también verifica la EDP (14). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\omega_u(0, 0) > 0$ .

Tomamos  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < u_1 < u_2 < u_3$  y  $\omega_u(u, 0) > 0, \forall u \in (0, u_3)$ . Definimos:

$$\epsilon = \min\{\omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0), \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0)\} > 0 \quad (16)$$

Partiendo de la desigualdad (15) y como  $\omega_u$  es creciente en  $v$  tenemos:

$$\omega(u_1, v) - \omega(0, v) > \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0) \geq \epsilon$$

$$\omega(u_3, v) - \omega(u_2, v) > \omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0) \geq \epsilon$$

y como  $0 < \omega(u, v) < \pi$ , se tiene que:

$$\epsilon < \omega(u, v) < \pi - \epsilon, \forall u \in (u_1, u_2), v \geq 0$$

Teniendo esto en cuenta, integramos en el rectángulo  $[u_1, u_2] \times [0, v]$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \omega_{uv} dudv &= \int_0^v [\omega_u(u_1, v) - \omega_u(u_2, v)] dv = \\ &= \omega_u(u_2, v) - \omega_u(u_1, v) - \omega_u(u_2, 0) + \omega_u(u_1, 0) \end{aligned}$$

por otro lado, usando (14) tenemos:

$$\int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \omega_{uv} dudv = c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin(\omega) dudv > c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin(\epsilon) dudv = c_0(u_2 - u_1)v \sin(\epsilon)$$

si lo juntamos

$$\begin{aligned} \omega_u(u_2, v) - \omega_u(u_1, v) - \omega_u(u_2, 0) + \omega_u(u_1, 0) &> c_0(u_2 - u_1)v \sin(\epsilon) \\ \Rightarrow \omega_u(u_2, v) - \omega_u(u_1, v) &> \omega_u(u_2, 0) - \omega_u(u_1, 0) + c_0(u_2 - u_1)v \sin(\epsilon) \end{aligned}$$

ahora tomando límite

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \omega_u(u_2, v) - \omega_u(u_1, v) \geq \lim_{v \rightarrow +\infty} \omega_u(u_2, 0) - \omega_u(u_1, 0) + c_0(u_2 - u_1)v \sin(\epsilon) = +\infty$$

Con lo que llegamos a una contradicción con la suposición de que  $w$  es acotada. ■

**Observación 5.2** *El teorema 1.1 de Hilbert es un corolario del que hemos demostrado, pues  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{M}^3(0)$ . Por eso, el teorema 5.1 generaliza el teorema 1.1 y se cumple así el objetivo que nos habíamos propuesto en esta memoria.*

## 6. Conclusión

Siguiendo con el trabajo de Hilbert, el matemático Cohn-Vossen propuso una extensión del teorema de **Hilbert (1902)** debilitando la hipótesis de Hilbert sobre la curvatura de Gauss de la superficie, proponiendoe ahora que no sea constante y esté acotada superiormente por una constante negativa. Este problema fue conocido como la conjetura Hilber-Cohn-Vossen.

En 1955, Heinz [12] realiza un avance para probar Hilbert-Cohn-Vossen, donde consigue resolver el problema para grafos enteros. Más tarde, en 1964, Efimov [?], [6] demuestra que la conjetura de Hilber-Cohn-Vossen es cierta.

**Teorema 6.1 (Efimov, 1964)** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa, no existe una  $C^2$ -inmersión al espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  si la curvatura gaussiana de  $\Sigma$  está acotada superiormente por una constante menor que 0.*

A partir de este punto, se ha trabajado en generalizar este teorema en dos líneas de trabajo distintas:

1. Debilitando aún mas la hipótesis sobre la curvatura, manteniendo la superficie en un ambiente Euclídeo.
2. Cambiando el ambiente, sustituyendo  $\mathbb{R}^3$  por 3-Variedades Riemannianas. En particular, espacios modelo o espacios producto.

Siguiendo la primera línea de trabajo, fue el propio Efimov [7] quien extendió su propio teorema, tomando en cuenta una nueva condición sobre la curvatura:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \varepsilon_1 d(p, q) + \varepsilon_2, \quad p, q \in \Sigma. \quad (17)$$

Que es conocida como *hipótesis débil* de Efimov. Siendo la *Hipótesis fuerte* aquella utilizada en el teorema de 1964, acotada superiormente por una constante negativa. El resultado queda así:

**Teorema 6.2 (Efimov (1968))** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa con curvatura negativa, cuya curvatura cumple con (17) entonces no admite una  $C^2$ -inmersión en  $\mathbb{R}^3$ .*

De dicho resultado se puede extraer ciertos corolarios. Para ver más, véase [5]:

**Corolario 6.3** *Sea  $\Sigma$  superficie completa con curvatura de Gauss  $K$  negativa que está  $C^2$ -inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Necesariamente se tiene, que  $\inf K = 0$ .*

Ya en 2015, Gálvez, Martínez y Teruel, [9], en el caso de una superficie completa cuya curvatura de Gauss cumple con la hipótesis fuerte de Efimov, probaron que dicha superficie es compacta finitamente agujerada, además el entorno de dichos agujeros tiende a infinito y son asintóticos a rectas. Lo que nos indica que para realizar una  $C^2$ -inmersión de una superficie bajo las hipótesis de Efimov, hay que “romperla” para mantener la completitud de la métrica, en este caso, solo hace falta una cantidad finita de puntos.

Y es con la conjetura de Milnor en 1966, cuando debilitamos lo máximo posible la hipótesis sobre la curvatura, que dice así,

**Conjetura 6.4** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa sin puntos umbilicales,  $C^2$ -inmersa en  $\mathbb{R}^3$  y tal que la suma de los cuadrados de las curvaturas principales de  $\Sigma$  están acotadas inferiormente por una constante positiva. Entonces o  $\Sigma$  es llana o su curvatura tiene que cambiar necesariamente de signo.*

Sea  $\Sigma$  una superficie completa inmersa en  $\mathbb{R}^3$  que cumple con las condiciones de la conjetura de Milnor, es decir, sus curvaturas principales  $\lambda_1, \lambda_2$  cumplen  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \geq \epsilon > 0$  y  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Entonces,  $\Sigma$  no puede tener curvatura de Gauss negativa para todos sus puntos. Por lo tanto, extendería a Efimov.

Por otro lado, de ser cierta la conjetura de Milnor, bajo las hipótesis de la conjetura, las únicas superficies inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  serían los cilindros generalizados (superficies llanas) y aquellas que la curvatura de Gauss cambia de signo.

Para terminar por esta línea de trabajo, Smyth y Xavier, véase [22], donde probaron:

**Teorema 6.5** *Sea  $\sigma$  una superficie de curvatura no positiva, isométricamente inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Si una de las curvaturas principales  $\lambda_i$  cumple con  $\lambda_i^2 \geq \epsilon > 0$  entonces dicha superficie es un cilindro generalizado.*

Este teorema es una prueba parcial de la conjetura de Milnor cuando la curvatura gaussiana  $K$  de  $\Sigma$  es menor que 0 y  $\lambda_i^2 \geq \epsilon > 0, i \in \{1, 2\}$ .

Utilizaremos un diagrama de curvaturas, que no es otra cosa que una representación gráfica de las curvaturas de Gauss y media en un plano cartesiano donde el eje de abscisas representa la curvatura media, el de ordenadas la curvatura gaussiana y la región de puntos tales que  $H^2 - k < 0$  representa la zona donde no existe ninguna superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , En la figura 6 están representados los enunciados de Hilbert, Efimov y Milnor; y en la figura 7 los de Milnor y Smyth-Xavier, para una versión animada ver <https://www.geogebra.org/classic/kgkfx4pa>.

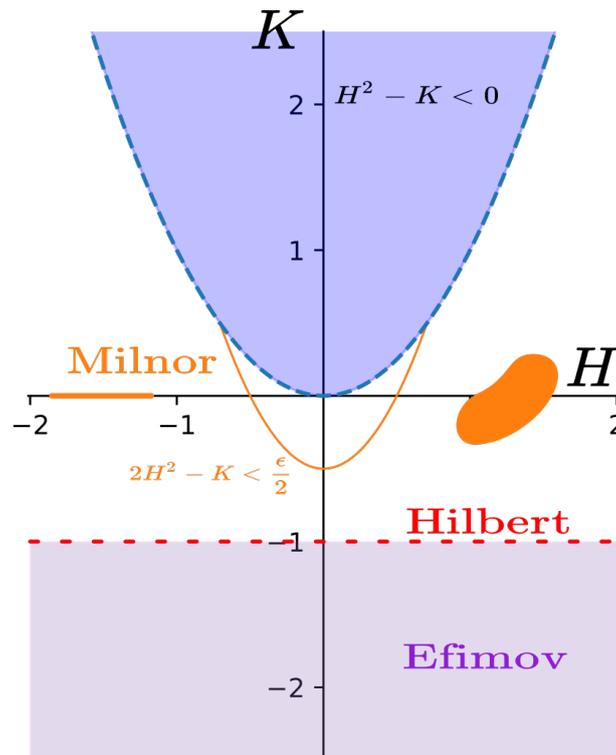
Pasando a la segunda línea de trabajo, ahora vemos los avances sobre la hipótesis del ambiente, que sigue siendo un problema abierto, lo enunciado sobre espacios modelo quedaría así:

**Conjetura 6.6** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa, no existe una inmersión isométrica a un espacio modelo con curvatura seccional  $c$ :*

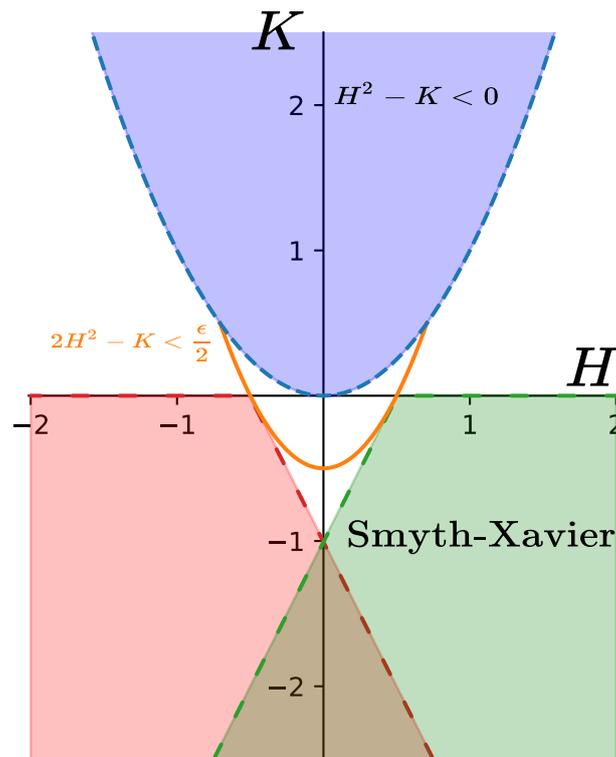
- *Si  $c = 1$ , si  $\Sigma$  tiene curvatura  $K < -\epsilon < 0$ , entonces no tiene inmersión isométrica en  $\mathbb{S}^3$ .*
- *Si  $c = -1$ , si  $\Sigma$  tiene curvatura  $K < -1 - \epsilon < -1$ , entonces no tiene inmersión isométrica en  $\mathbb{H}^3$ .*

Veamos algunos avances que se ha realizado:

En 2001, Schlenker [21] trató de demostrarlo para  $\mathbb{S}^3$  con  $K < -\epsilon < 0$  y  $\mathbb{H}^3$  con  $K < -1 - \epsilon < -1$ . Sin embargo tuvo que añadir una restricción sobre el módulo del gradiente de la curvatura.



**Figura 6:** Diagrama de curvaturas donde podemos ver representados los teoremas de Hilbert y Efimov, así como la conjetura de Milnor.



**Figura 7:** Diagrama de curvaturas donde podemos ver representados la conjetura de Milnor y el teorema de Smyth-Xavier.

Dicho teorema, no es equivalente al resuelto por Efimov en 1964. Como se han añadido restricciones adicionales, se dice que es un teorema *tipo Efimov*.

Por otro lado, usando técnicas de pares de Codazzi sobre superficies abstractas, como las que hemos utilizado para demostrar el **teorema 6.1**, en el año 2015 Gálvez, Martínez y Teruel en [10], demostraron un teorema para superficies abstractas, cuyos corolarios son teoremas tipo Efimov en los ambientes  $\mathbb{H}^3$  y  $\mathbb{S}^3$  para superficies completas con y sin borde.

Por otro lado, cuando se considera el entorno como un espacio producto, vemos los avances de Gálvez, J. A. y Teruel, J. L. [11], que probaron:

**Teorema 6.7** *Sea  $M^2$  una superficie Riemanniana con un polo. Si la curvatura de  $M^2$  es no negativa entonces no hay un grafo  $\Sigma$  vertical entero en  $M^2 \times \mathbb{R}$  con curvaturas extrínsecas acotadas superiormente por una constante negativa*

Resultado que muestra la validez del teorema de Efimov para superficies que son grafos completos y donde el ambiente es  $M^2 \times \mathbb{R}$ . Donde un polo es un punto  $p \in M^2$  tal que la aplicación exponencial está definida para todo el plano tangente  $T_p M^2$ .

Para finalizar, en 2021 Alexandrov [1] hace un “state of the art” sobre este mismo problema y sus avances en distintos campos de la matemáticas.

## Referencias

- [1] Alexandrov, V., (2021). *Around Efimov's differential test for homeomorphism*. Beiträge Zur Algebra Und Geometrie, **62(1)**, 7–20.
- [2] Beltrami, E., (1868). *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giorn. di Mat., Napoli, **6**, 285-315.
- [3] Do Carmo, M. P., (1990). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza.
- [4] Do Carmo, M. P., (1992). *Geometria Riemanniana*. Birkhäuser.
- [5] Da Silva-Araújo, L. P., (2019) Oproblema de Hilbert & Cohn-Vossen nos espaços tridimensionais. Trabajo fin de máster, Universidad de Brasília, Brasil.
- [6] Efimov, N. V., (1964) *Generation of dingullsrities of Surfaces on Negative Curvature (Russian)*. Math. Bull. **30**, 139-142.
- [7] Efimov, N. V., (1968) *Differential Criteria for Homeomorphism of Certain Mappings with Applications to the theory of surfaces*, Mat. Sbornik, **118**, 475-488.
- [8] Gálvez, J. A., (2009) *Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space forms*, Matemática Contemporánea, Vol. 37, 01-42.
- [9] Gálvez, J. A., Martínez, A. and Teruel, J. L., (2015). *Complete surfaces with ends of non positive curvature*. Advances in Mathematics (New York. 1965) **281**, 1202-1215.
- [10] Gálvez, J. A., Martínez, A. and Teruel, J. L., (2015). *Complete surfaces with non-positive extrinsic curvature in  $H^3$  and  $S^3$* . Journal of Mathematical Analysis and Applications, **430(2)**, 1058-1064.
- [11] Gálvez, J. A. and Teruel, J. L., (2015). *Complete surfaces with negative extrinsic curvature in  $M^2 \times R$* . Journal of Mathematical Analysis and Applications, **423(1)**, 538-546.
- [12] Heinz, E., (1995). *Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind*. Math. Ann. **129**, 451-454.
- [13] Hilbert, D., (1901). *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2**, 87-99.
- [14] Lee, J. M., (1997). *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Springer.

- [15] Minding, F., (1839). *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von un veränderlichen Krümmungsmasse*, J. Reine Angew. Math., **19**, 370-387.
- [16] Minding, F., (1840). *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien und Krümmen Flächen*, J. Reine Angew. Math., **20**, 323-327.
- [17] Robertson, E. and O'Connor, J., Biography Jahann Carl Friederich Gauss. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss/> (Consultado el 12 de mayo de 2024)
- [18] Robertson, E. and O'Connor, J., Biography Nikolai Ivanovich Lobachevsky. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lobachevsky/> (Consultado el 12 de mayo de 2024)
- [19] Robertson, E. and O'Connor, J., Biography János Bolyai. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolyai/> (Consultado el 12 de mayo de 2024)
- [20] Robertson, E. and O'Connor, J., History of Non-Euclidean geometry. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean\\_geometry/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry/) (Consultado el 12 de mayo de 2024)
- [21] Schlenker, J.M., (2001) *Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique*. Ann. Sci. École Norm. **34**, 79-130
- [22] Smyth, B. and Xavier, F., (1987) *Efimov's theorem in dimension greater than two*, Invent. Math. **90**, no3 443-450.
- [23] Teruel, J.L., (2015) Superficies completas de curvatura no positiva. Tesis doctoral Universidad de Granada, España.

## A. Demostración alternativa del Teorema de Hilbert.

En este anexo, probaremos el teorema de Hilbert (1901), usando un resultado para superficies abstractas demostrado por Gálvez, Martínez y Teruel en el artículo [10] usando pares de Codazzi. También usaremos algún resultado sobre las superficies de Hadamard

### A.1. Teorema de Hadamard.

Enunciaremos un resultado demostrado por Hadamard que nos indica cuándo la aplicación exponencial sobre una variedad con curvatura seccional no positiva es un difeomorfismo global, para ver una demostración, consultar [4].

**Teorema A.1 (Hadamard)** *Sea  $\mathcal{M}$  una  $n$ -Variedad Riemanniana, completa, simplemente conexa y con curvatura seccional  $K(p, \sigma) \leq 0$ ,  $\forall p \in \mathcal{M}$  y  $\forall \sigma \in T_p \mathcal{M}$ .*

*Entonces, la aplicación exponencial  $\exp_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es un difeomorfismo global y por lo tanto,  $\mathcal{M}$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición A.2** *Diremos que una Superficie  $\Sigma$  es de Hadamard si cumple con las hipótesis del teorema de Hadamard.*

### A.2. Teorema de Hilbert.

**Teorema A.3 (Hilbert (1901))** *El plano hiperbólico no puede ser inmerso isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión y consideramos  $I$  la métrica inducida en  $\mathbb{H}^2$  por  $f$  y  $II$  la segunda forma fundamental asociada al operador de forma  $A = -dN$ , donde  $N$  es la aplicación de Gauss de  $f$ .

Como  $K_{\mathbb{H}^2} = -1 = k_1 k_2$ , donde  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  son las curvaturas principales, entonces  $\exists c > 0$  constate tal que  $k_1 \leq -1 < 0 < c \leq k_2$  por lo tanto,  $k_i$  están estrictamente separadas.

Ahora, si asumimos que  $(\mathbb{H}^2, I)$  es un espacio métrico completo, entonces, estamos en las condiciones del teorema 1 de [10]. Por lo tanto, en virtud de dicho teorema tenemos que  $\mathbb{H}^2$  es homeomorfo al plano y

$$2\pi \geq \int_{\mathbb{H}^2} |K_{\mathbb{H}^2}| dA_I = \int_{\mathbb{H}^2} dA_I = A(\mathbb{H}^2), \quad (18)$$

tiene área finita.

Por otro lado, bajo esas mismas suposiciones tenemos que  $\mathbb{H}^2$  es una 2-Variedad Riemanniana, completa, simplemente conexa y con curvatura seccional  $K_{\mathbb{H}^2} = -1 < 0$ . Entonces, es una superficie de Hadamard se puede probar que tiene área infinita.

Hemos llegado a una contradicción y en consecuencia,  $\mathbb{H}^2$  no puede ser inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  ■

**Observación A.4** *Podemos apreciar que la demostración se puede extender para demostrar el teorema de Hilbert de 1902 para superficies simplemente conexas.*

*Sea  $\Sigma$  una superficie con curvatura de Gauss constante negativa y simplemente conexa, entonces al modificar la ecuación (18) podemos acotar superiormente el área de  $\Sigma$  y volvemos a caer en la contradicción, por ser  $\Sigma$  una superficie de Hadamard.*

## B. Detalles del desarrollo del trabajo

Tarea	Tiempo (horas)
Recopilación de materiales	10
Estudio de bibliografía	60
Elaboración de las figuras	30
Redacción de la memoria	60
Total	160

**Tabla 2:** *Tiempo aproximado de dedicación al trabajo*

Asignatura	Páginas	Descripción
Curvas y Superficies	12 y 21-24	La definición de curva y la curvatura de Gauss, media y superficies Mínimas.
Teoría global de superficies	10-26	Se generalizan los conceptos que damos en esta asignatura.
EDP	32-35	Se relaciona de forma tangencial en la demostración del teorema 5.1.

**Tabla 3:** *Asignaturas relacionadas con el trabajo*