UNIVERSITAT D'ALACANT
Facultat de Ciències
Facultad de Ciencias

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO 2023-2024

TÍTULO:

EL TEOREMA DE NOETHER Y UNA APLICACIÓN A DUALIDAD ELECTROMAGNÉTICA

AUTOR:

JAVIER LAGUNA RICART

Resumen

Estudiaremos el teorema de Noether mediante el formalismo lagrangiano en sistemas de partículas y en teorías clásicas de campos. Seguidamente, lo aplicaremos al estudio de las simetrías en el electromagnetismo. En particular, expondremos una densidad lagrangiana para el electromagnetismo distinta de la habitual que nos permitirá establecer una conexión clara entre simetrías del sistema y simetrías sobre las ecuaciones de Maxwell. A continuación, presentaremos una transformación, llamada transformación de dualidad, que llevará a la conservación de la helicidad óptica. Seguidamente, mostraremos el enlace que supone esta cantidad entre la descripción clásica y cuántica de la luz, pues mide el entrelazamiento de las líneas de campo electromagnético y es el límite clásico de la diferencia de fotones polarizados a derechas y a izquierdas. Por último, observaremos una familia infinita de transformaciones que llevan a cantidades conservadas que se interpretan como extensiones a mayor orden de la helicidad.

Palabras clave: teorema de Noether, simetrías, helicidad, dualidad electromagnética, electromagnetismo.

Abstract

We will study Noether's theorem using the Lagrangian formalism in particle systems and classical field theories. Subsequently, we will apply it to the study of symmetries in electromagnetism. In particular, we will present a Lagrangian density for electromagnetism that differs from the usual one, which will allow us to establish a clear connection between system symmetries and the symmetries of Maxwell's equations. Then, we will examine a specific transformation, called the duality transformation, which leads to the conservation of optical helicity. Next, we will explore the link this quantity provides between the classical and quantum descriptions of light, as it measures the entanglement of electromagnetic field lines and is also the classical limit of the difference between right-handed and left-handed polarized photons. Finally, we will observe an infinite family of transformations that leads to conserved quantities interpreted as higher-order extensions of helicity.

Keywords: Noether's theorem, symmetries, helicity, electromagnetic duality, electromagnetism.

Índice

1. Introducción

El teorema de Noether, uno de los resultados más fundamentales y profundos en la física teórica, debe su nombre a la eminente matemática alemana Emmy Noether. Publicado en 1918 [12], el teorema establece una conexión vital entre las simetrías en física y las leyes de conservación.

La aparición de la teoría general de Einstein hizo necesaria la formulación de las leyes físicas conocidas en este formalismo. David Hilbert, uno de los matemáticos más influyentes de la época, estaba trabajando en los fundamentos de la teoría de la relatividad general y se enfrentó a problemas relacionados con las leyes de conservación en este nuevo marco teórico. En este contexto, Hilbert recurrió a Emmy Noether, quien ya había demostrado su excepcional habilidad matemática en el campo del álgebra abstracta y la teoría de invariantes [17].

En respuesta a este problema, Noether formuló su teorema, que reveló que cada simetría continua de un sistema físico corresponde a una ley de conservación.

Más allá de su impacto directo en la teoría de la relatividad y la física clásica, el teorema de Noether se ha convertido en una herramienta esencial en la mecánica cuántica, la teoría de campos y muchas otras áreas de la física moderna [20]. Su capacidad para unificar y explicar las leyes de conservación ha influido en generaciones de físicos y matemáticos, consolidando el lugar de Emmy Noether como una de las mentes más brillantes de la historia de la ciencia.

En este trabajo desarrollaremos el teorema en el contexto de sistemas de partículas y campos clásicos y daremos un enfoque centrado en el electromagnetismo. Descrita por las ecuaciones de Maxwell, es una teoría de campos con una rica estructura de simetrías. Es invariante, por ejemplo, bajo traslaciones temporales, que llevan a la conservación de la energía; o bajo rotaciones, que llevan a la conservación del momento angular. Nosotros nos centraremos en su simetría bajo un tipo de transformación muy concreto, la transformación de dualidad.

Esta transformación resulta interesante porque lleva a la conservación de la helicidad óptica. Tal cantidad mide el entrelazamiento de las líneas de campo eléctrico y magnético y coincide con el límite clásico de la diferencia de fotones polarizados a derechas y a izquierdas. Tal concordancia establece una relación profunda entre las descripciones clásica y cuántica del electromagnetismo.

Por último, expondremos una familia infinita de simetrías del electromagnetismo que extienden a la helicidad a mayor rango y daremos una interpretación de la misma.

2. Teorema de Noether en sistemas de partículas

Para el desarrollo de esta sección se ha usado como referencia principal [9].

La formulación lagrangiana de la mecánica se deduce a partir de las leyes de Newton en coordenadas generalizadas, de forma que en sentido estricto no supone una ampliación de la teoría. Sin embargo, proporciona una perspectiva diferente que facilita mucho la solución de los problemas de mecánica. Es un hecho conocido que estas ecuaciones también se pueden obtener a través del llamado *principio de acción extremal*,[1] que afirma que las trayectorias físicas son aquellas coincidentes con puntos críticos de una nueva magnitud física llamada *acción* [9].

Asimismo, la formulación lagrangiana nos permite estudiar la relación entre simetrías y leyes de conservación que de ella emerge. Es decir, permite enunciar el teorema de Noether y explorar sus consecuencias, objetivo principal de este trabajo.

2.1. Ligaduras

Matemáticamente, definimos **una variedad diferenciable** [11] de dimensión m o una m-variedad como un conjunto M tal que cumple las siguientes condiciones:

1. M es un espacio topológico.

2. Existe una familia de pares $\{(U_i, \phi_i)\}$ tales que $\{U_i\}$ es un recubrimiento por abiertos de M $(\cup_i U_i = M)$ y ϕ_i es un homeomorfismo entre U_i y un abierto de $\mathbb{R}^n$. Es decir, M es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

3. Dados U_i y U_j tales que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $\varphi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$, es infinitamente diferenciable en el sentido habitual.

Es decir, una variedad diferenciable será un objeto sobre el que sea posible extender el concepto de proximidad, continuidad y convergencia (espacio topológico), que se comporte "como el espacio euclídeo" de manera local, permitiendo asociar coordenadas o parámetros a sus puntos en cada región del mismo (localmente euclídeo) y de manera que tales coordenadas varíen de manera continua y diferenciable entre las distintas regiones, lo que nos permite extender el análisis real sobre el objeto (tercera condición).

[1] Es muy habitual llamar a este principio *de mínima acción*. Aunque en muchos casos las trayectorias obtenidas resulten mínimos, existen otros en los que se corresponden con máximos, o incluso con puntos de inflexión de la acción. Un ejemplo de este hecho se puede ver en [9] páginas 112-113.

En el formalismo lagrangiano es posible cambiar el sistema de coordenadas cartesiano por otro que case mejor con el problema de estudio con relativa sencillez. A estas nuevas coordenadas se les llamará *coordenadas generalizadas*. El concepto de variedad resulta de gran utilidad en mecánica analítica ya que las coordenadas generalizadas y los cambios de coordenadas son ejemplos de estas.

El número de grados de libertad y la región en la que estará permitido el movimiento de las partículas, dada por las ligaduras del sistema, determinarán la elección de estas coordenadas. Esta región será, por construcción, una variedad diferencial, recibirá el nombre de *variedad de configuración* y la denotaremos por $\mathbb{Q}$.

De manera más precisa, si existen fuerzas externas, a priori desconocidas, pero cuyo efecto sobre un sistema con N partículas es una serie de $K < 3N$ ligaduras diferenciables

$$f_I(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n, t) = 0, \quad I = 1, ..., K \tag{1}$$

entonces el conjunto de puntos solución de estas ecuaciones define la variedad diferenciable que buscamos. Existen otros tipos de ligadura, pero no se van a considerar en este trabajo.

Así, las coordenadas generalizadas $q^\alpha,\ \alpha = 1, ..., 3n$ serán aplicaciones invertibles y diferenciables,

$$\begin{aligned} q^\alpha &= q^\alpha(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n, t) & (2)\\ \vec{x}_i &= \vec{x}_i(q^1, ..., q^{3N}, t), & (3) \end{aligned}$$

de manera que siempre se puedan elegir adecuadamente para que las k últimas se relacionen con $\vec{x}$ mediante una secuencia de funciones

$$q^{n+I} = R_I(f_1(\vec{x}), ..., f_K(\vec{x})), \quad I = 1, ..., k. \tag{4}$$

De esta forma, las restricciones del problema dependen únicamente de las últimas coordenadas

$$f_I = f_I(q^{n+1}, ..., q^{n+k}) \tag{5}$$

y cada q^{n+I} se expresará como $q^{n+I} = R_I(0, ..., 0)$. Es decir, serán constantes y las restricciones del problema se satisfarán automáticamente. Por tanto, las $n = 3N - k$ coordenadas restantes podrán moverse libremente.

A modo de ilustración, la variedad de configuración del péndulo simple es $\mathbb{Q} = \mathbb{S}^1$ (la circunferencia unidad), ya que se toma el ángulo que forma el cordel con la vertical como coordenada generalizada libre. De manera similar, para un péndulo doble la variedad de configuración es $\mathbb{Q} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, una circunferencia por cada uno de los ángulos respectivos a cada péndulo.

2.2. Fibrado tangente

Más adelante será necesario restringir el estudio de la dinámica del sistema a la variedad $\mathbb{Q}$ sin hacer referencia al espacio euclídeo en el que pueda estar embebido. Se requerirá un estudio de las propiedades intrínsecas de las variedades. Por este motivo se construye el fibrado tangente, $T\mathbb{Q}$, que se compone por los espacios tangentes a $\mathbb{Q}$ en cada punto.

$$T\mathbb{Q} = \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \{p\} \times T_p\mathbb{Q} \tag{6}$$

Un hecho que ejemplifica la necesidad de definición de esta variedad es que el lagrangiano, la función principal del formalismo, no toma valores solo en $\mathbb{Q}$, sino que depende tanto de las coordenadas generalizadas como de sus velocidades y posiblemente del tiempo. El fibrado tangente generaliza el espacio de velocidad de fase.

2.3. Equivalencia entre lagrangianos

El lagrangiano de un cierto sistema L determina su movimiento mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{7}$$

Sin embargo, esta relación no es biunívoca. Dos lagrangianos diferentes, si cumplen determinadas propiedades, pueden llevar a las mismas ecuaciones del movimiento.

Sea L_1 y L_2 dos lagrangianos diferentes, denotaremos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L_i}{\partial q^\alpha} \equiv \Lambda_{i\alpha}. \tag{8}$$

Entonces, si ambos lagrangianos generan las mismas ecuaciones se tendrá que

$$\Lambda_{1\alpha} = \Lambda_{2\alpha} \quad \alpha = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Así, expandiendo (8) y restando ambos resultados,

$$\Lambda_{1\alpha} - \Lambda_{2\alpha} = \frac{\partial^2(L_1 - L_2)}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\beta + \frac{\partial^2(L_1 - L_2)}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\beta + \frac{\partial^2(L_1 - L_2)}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial(L_1 - L_2)}{\partial q^\alpha} \equiv 0. \tag{10}$$

Como $\ddot{q}^\beta$ son independientes y aparecen exclusivamente en el primer término, cada $\partial^2(L_1 - L_2)/(\partial\dot{q}^\beta\partial\dot{q}^\alpha)$ debe ser nulo para cada β lo que implica que

$$\frac{\partial(L_1 - L_2)}{\partial \dot{q}^\alpha} = F(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^{\alpha-1}, \dot{q}^{\alpha+1}, ..., \dot{q}^n, t). \tag{11}$$

Al cumplirse esta ecuación para cada α,

$$L_1 - L_2 = f_\alpha(q^1, ..., q^n, t)\dot{q}^\alpha + G(q^1, ..., q^N, t) \tag{12}$$

para ciertas funciones f_α y G.

Si escribimos (10) teniendo en cuenta la forma de las soluciones

$$\Lambda_{1\alpha} - \Lambda_{2\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta - \frac{\partial Q}{\partial q^\alpha} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\beta + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{13}$$

Al igual que en el paso anterior, los $\dot{q}^\beta$ son independientes y solamente aparecen multiplicando en el primer término, ya que ni las f_α ni Q dependen de ellos. Por tanto, la expresión entre paréntesis se ha de anular. Las ecuaciones resultantes son, precisamente, las condiciones de existencia local de una función Φ tal que

$$f_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{14}$$

de acuerdo con el teorema de Clairaut [1]. Así pues,

$$L_1 - L_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt}. \tag{15}$$

Es decir, si dos lagrangianos generan las mismas ecuaciones de movimiento, entonces difieren en la derivada total de una cierta función.

Antes de finalizar la sección, cabe aclarar que la prueba anterior no asegura que si dos lagrangianos generan la misma dinámica, entonces difieren en la derivada total de una cierta función. Esto se debe a que hemos supuesto no solo que el sistema de ecuaciones es el mismo, sino que cada una de las ecuaciones se obtiene en ambos lagrangianos por derivación respecto a la misma coordenada. Es fácil ver que la segunda afirmación es falsa tomando en consideración los dos siguientes lagrangianos

$$L_1 = \dot{q}^1\dot{q}^2 - q^1q^2, \quad L_2 = \frac{1}{2}\left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2\right]. \tag{16}$$

2.4. Coordenadas cíclicas

Una ecuación de la forma

$$f(q, \dot{q}) = C \tag{17}$$

define una subvariedad de $T\mathbb{Q}$ de dimensión $2n-1$. Si f es una constante del movimiento y el desplazamiento empieza en la subvariedad, es decir, si las condiciones iniciales $(q_0, \dot{q}_0)$

cumplen la ecuación (17), entonces esta se cumplirá en toda la dinámica del sistema y se dirá que $f = C$ define una *subvariedad invariante* de la misma. Por tanto, encontrar una cantidad conservada es equivalente a reducir en uno los grados de libertad del problema.

En ocasiones, las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan una cantidad conservada de manera muy sencilla. Dadas unas coordenadas generalizadas, puede pasar que el lagrangiano no dependa explícitamente de una de ellas, digamos q^β. La ecuación de Lagrange asociada a ella será por tanto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = 0. \tag{18}$$

Es decir, el **momento generalizado conjugado** de q^β, $p_\beta = \partial L/\partial \dot{q}^\beta$, es una cantidad conservada. A las coordenadas como q^β se les llama **coordenadas cíclicas**. Sin embargo, como veremos en la sección 2.6, este no es un requisito indispensable para la obtención de leyes de conservación.

2.5. Grupos continuos de transformaciones y grupos de Lie

El teorema de Noether emplea ciertos conjuntos de transformaciones de coordenadas con propiedades que permiten extender el análisis real sobre ellos: los grupos de Lie. Antes de dar su definición necesitamos algunos conceptos previos. Las definiciones de esta sección se han obtenido de [18].

Definición 2.1 *Un **grupo** es un conjunto con una operación sobre sus elementos $(G, \cdot)$, cumpliendo las siguientes propiedades:*

1. *Si $a, b \in G$, entonces $a \cdot b \in G$.*
2. *Si $a, b, c \in G$, entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
3. *$\exists e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$.*
4. *$\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*

Este tipo de estructura algebraica nos resulta de especial interés porque muchos tipos de transformaciones de coordenadas se pueden entender como grupos con la operación composición.

Por ejemplo, las transformaciones generales de Lorentz (aquellas que no varían la forma cuadrática $x^2 := (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$) forman un grupo. De todas estas transformaciones, aquellas que preservan la orientación temporal y la orientación de la base, las llamadas transformaciones de Lorentz propias, forman a su vez un subgrupo de ellas.

Definición 2.2 *Un grupo $(G, \cdot)$ es un* ***grupo continuo*** *si cumple además que*

1. *G es un espacio topológico*

2. *La aplicación $f\colon G \times G \to G$, tal que $f(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua.*

Estas condiciones indican que es posible introducir el concepto de proximidad entre elementos, de convergencia y de continuidad (por ser espacio topológico) y que la pequeñez en la variación de un elemento conlleva la pequeñez en la variación de su producto con otro elemento (continuidad de f).

Definición 2.3 *Diremos que el grupo continuo $(G, \cdot)$ es un* ***grupo de Lie*** *si G es una variedad diferenciable.*

Las transformaciones de Lorentz antes mencionadas, así como otros muchos grupos de transformaciones de coordenadas, son grupos de Lie. Estamos especialmente interesados en este tipo de grupos ya que es posible asociar a cada transformación un conjunto de parámetros $\epsilon = (\epsilon^1, ..., \epsilon^m)$ de manera unívoca, permitiendo extender conceptos de análisis sobre las propias transformaciones. En la siguiente sección se hará evidente la utilidad de esta propiedad empleándola explícitamente en la demostración del teorema de Noether.

2.6. Teorema de Noether

Una vez presentados estos conceptos estamos en disposición de probar el teorema de Noether. Esta proposición afirma que las cantidades conservadas surgen de transformaciones de coordenadas continuas que dejan invariante al lagrangiano y, por tanto, no afectan a la dinámica. De hecho, observaremos que la condición se puede relajar a las transformaciones respecto a las que el lagrangiano sea invariante gauge.

Sea $\phi(\epsilon, q)$ un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico, es decir, una familia de transformaciones que varían de manera continua con el valor de ϵ, cumpliendo además que $\phi(0, q)$ es la transformación identidad.

Buscamos encontrar cómo afectan estas transformaciones al lagrangiano L. Esta función se evalúa sobre $T\mathbb{Q}$ por lo que requeriremos también de la transformación inducida sobre ella. La expresión

$$\dot{q}(t, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial t} q(t, \epsilon) := \frac{\partial}{\partial t} \phi(\epsilon, q) \tag{19}$$

nos indica cómo cambian las variables $\dot{q}$. Así pues, denotaremos como $T\phi$ a la transformación de coordenadas que lleva el par $(q(t), \dot{q}(t))$, donde $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}\mathbb{Q}$, al par $(q(t,\epsilon), \dot{q}, (t,\epsilon))$, donde $q, (t,\epsilon) \in T_{q(t,\epsilon)}\mathbb{Q}$.

Llamaremos L_ϵ a la función que surge de sustituir las variables usuales por sus transformaciones en el lagrangiano, es decir,

$$L_\epsilon(T\phi(q,\dot{q}),t) \equiv L(q,\dot{q},t). \tag{20}$$

Llamaremos $T\psi$ a la inversa de $T\phi$. De esta forma, podemos escribir la expresión anterior como

$$L_\epsilon(q,\dot{q},t) = L\left(\psi(q), \frac{\partial}{\partial t}\psi(q), t\right). \tag{21}$$

Hemos omitido la dependencia explícita de ϵ para simplificar la notación.

Nos interesan el tipo de transformaciones que dejan invariante el lagrangiano. Matemáticamente, esta propiedad se puede expresar como

$$\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} = 0. \tag{22}$$

Teniendo en cuenta la dependencia de L_ϵ, (21), podemos obtener que

$$\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \psi(q^\alpha)}\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}\frac{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}{\partial \epsilon}. \tag{23}$$

El último sumando de la expresión anterior puede expresarse como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}\frac{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon}\right] - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(q^\alpha)}\right]\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon} \tag{24}$$

donde hemos reemplazado la derivada parcial con respecto del tiempo por una derivada total para enfatizar su papel como derivada respecto las variables físicas al margen del parámetro de transformación.

Así pues, sustituyendo este valor en la expresión anterior obtenemos

$$\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} = \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right]\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \psi(q^\alpha)}{\partial \epsilon}\right]. \tag{25}$$

El primer término de la izquierda coincide con las ecuaciones de Euler-Lagrange, luego para las soluciones de la dinámica se anula. Si denotamos $\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$ por δ

$$\delta L_\epsilon = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta q^\alpha\right] \tag{26}$$

Pero hemos supuesto que L_ϵ es invariante bajo estas transformaciones. Por lo tanto, en particular se cumple que $\delta L_\epsilon = 0$. Luego

$$\Gamma \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \tag{27}$$

es una constante de movimiento.

Como ya habíamos adelantado, es posible relajar la condición de invarianza bajo traslaciones. En la sección 2.3 vimos que dos lagrangianos son equivalentes si difieren en una derivada temporal total de una función Φ. Luego cabría esperar que si

$$L_\epsilon = L + \dot{\Phi}(q, t, \epsilon) \tag{28}$$

entonces se obtuviera el mismo resultado. Efectivamente, la condición anterior implica que

$$\delta L_\epsilon = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \dot{\Phi} \right|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \delta \Phi \tag{29}$$

de forma que de la expresión (25) se sigue que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha - \delta \Phi \right] = 0 \tag{30}$$

y, por tanto,

$$\Gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha - \delta \Phi \tag{31}$$

es una constante del movimiento.

Si un lagrangiano L cumple la condición (29) bajo una cierta familia de transformaciones se dirá que es **invariante gauge** bajo esa familia.

Así pues, el teorema de Noether puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema 2.4 *Si L es invariante gauge bajo una familia continua y uniparamétrica de transformaciones puntuales, entonces la cantidad*

$$\Gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha - \delta \Phi$$

es una constante de movimiento.

Como hemos visto a lo largo de la demostración, la conservación de las cantidades depende exclusivamente de la primera derivada de la transformación evaluada en $\epsilon = 0$, es decir, de la transformación infinitesimal empleada. Este hecho es determinante y se usará en la práctica a la hora de obtener cantidades conservadas a lo largo de la segunda parte del trabajo.

3. Teorema de Noether en teorías de campos clásicas

La verdadera importancia del teorema de Noether se encuentra en teorías de campos, para las que se desarrolló por primera vez con el objetivo de resolver el problema de la conservación de la energía en relatividad general [17, 12][2], y en mecánica cuántica. A continuación vamos a hacer un desarrollo teórico del mismo siguiendo principalmente los libros [20, 9].

3.1. Problema de variaciones en campos

En la sección anterior hablamos de la posibilidad de deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la búsqueda de extremales del funcional acción. En este apartado obtendremos las ecuaciones de Euler-lagrange para campos clásicos siguiendo este mismo principio.

Los sistemas de partículas tienen un número finito de grados de libertad y se obtiene una ecuación de EL por cada uno de ellos. Los campos clásicos son sistemas *continuos* y, por tanto, tienen un número infinito de grados de libertad. Este hecho hace necesaria la sustitución de los elementos habituales en sistemas de partículas por otros análogos que se ajusten a la continuidad del problema. Los cambios principales serán el del lagrangiano del sistema, L, por la *densidad lagrangiana*, $\mathcal{L}$, y el de las variables q por las variables de campo u_I con $I = 1, ..., N$. Estas diferencias aparecen de manera natural al entender los campos clásicos como el paso al límite de ciertos sistemas discretos y se explican en profundidad con diferentes ejemplos en [9, 20]. El resto de diferencias, también presentes en los ejemplos, surgirán del desarrollo del principio de acción extremal.

En esta sección vamos a realizar el desarrollo para $\mathbb{R}^4$ con la métrica euclídea, aunque el desarrollo para el espacio de Minkowski es completamente análogo.

Sea $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3)$ y $u = (u_1, ..., u_N)$. Dada una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(u, \vec{\nabla} u, x)$, definiremos la acción como

$$S = \int \mathcal{L}(u, \vec{\nabla} u, x)\ d^4x \tag{32}$$

donde $\vec{\nabla} u$ representa a las $4N$ derivadas de la forma $\partial u_I / \partial x^\alpha$. A lo largo del desarrollo se empleará tanto $u_{I,\alpha}$ como $\partial_\alpha u_I$ para denotar estas derivadas.

Supondremos que la densidad lagrangiana depende exclusivamente de las funciones u_I y sus derivadas primeras. Es posible generalizar el procedimiento para admitir densidades

[2] Consultada la traducción de [12] al inglés en [13]

lagrangianas que dependan de las derivadas de u hasta un cierto orden arbitrario. Sin embargo, esto lleva a que las ecuaciones de movimiento sean de orden mayor a dos, algo muy poco frecuente [20]. En este trabajo nos restringiremos al desarrollo teórico de las lagrangianas que dependan, a lo sumo, de las primeras derivadas de u.

Definiremos el *lagrangiano* del sistema que modela $\mathcal{L}$ como

$$L = \int \mathcal{L}\ d^3x \tag{33}$$

donde $d^3x = dx^1dx^2dx^3 = dxdydz$. De manera que la acción también se puede expresar, como

$$\int L\ dt. \tag{34}$$

Buscamos N funciones $u_I(x)$ tales que $(u_1, ..., u_N)$ sea un punto extremal de S y las funciones tomen valores en una cierta región R de $\mathbb{R}^4$ fijando sus valores en la frontera de R, que denotaremos por ∂R.

Supondremos que tenemos una familia uniparamétrica de funciones sobre R, (un grupo de Lie), $u_I(x, \varepsilon)$ cumpliendo la condición de contorno y asumiremos, sin pérdida de generalidad, que la solución física se encuentra en $\varepsilon = 0$.

Como todas las funciones cumplen las condiciones de contorno, se tiene que

$$u_I(x, \varepsilon) = u_i(x, 0) =: u_i(x)\ \forall x \in \partial R. \tag{35}$$

Por tanto, en la frontera, la derivada con respecto al parámetro es nula.

$$\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \forall x \in \partial R. \tag{36}$$

El principio de acción extremal afirma que la acción física se corresponde con un punto extremal del funcional acción. Es decir,

$$\delta S := \left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_R \mathcal{L}\ d^4x\right]_{\varepsilon=0} = 0. \tag{37}$$

Como R no depende de ε podemos introducir la derivada en la integral. Luego solamente necesitamos calcular $\delta\mathcal{L}$. Aplicando la regla de la cadena

$$\delta\mathcal{L} = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_I}\frac{\partial u_I}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\frac{\partial u_{I,\alpha}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_I}\delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_{I,\alpha}. \tag{38}$$

De forma que

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I}\delta u_I + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_{I,\alpha} \right) \, d^4x = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I}\delta u_I + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta u_I \right) \, d^4x$$
$$= \int_R \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}} \right)\delta u_I + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I \right) \right] \, d^4x = 0. \quad (39)$$

El sumando de la derecha en la última expresión se puede sustituir por una integral de superficie mediante el teorema de la divergencia.

$$\int_R \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}} \right)\delta u_I \right] d^4x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I \right) \, dn^\alpha \quad (40)$$

El sumando de la izquierda es idénticamente nulo debido a (36) (técnicas como esta son muy frecuentes y se utilizarán varias veces a lo largo del trabajo) de donde

$$\delta S = \int_R \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}} \right)\delta u_I \right] d^4x = 0 \quad (41)$$

La ecuación anterior debe cumplirse para cualquier familia de transformaciones, luego el término entre paréntesis ha de ser idénticamente nulo. Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I} = 0 \quad \forall I = 1, ..., N \quad (42)$$

Y así obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos.

A la expresión obtenida en el paréntesis de (41) la llamaremos derivada funcional y la denotaremos por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_I} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_I} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}. \quad (43)$$

3.1.1. Equivalencia entre densidades lagrangianas

En el apartado 2.3 observamos que en mecánica de partículas si dos lagrangianos difieren en la derivada total de una cierta función arbitraria, entonces ambos dan lugar a a las mismas ecuaciones de EL.

Existe una condición similar que garantiza la equivalencia entre dos densidades lagrangianas. Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos densidades lagrangianas tales que

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \partial_\alpha \Phi^\alpha(u, x), \quad (44)$$

donde $\Phi = (\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$ es una función vectorial arbitraria, entonces sus ecuaciones de EL son la misma [9].

3.2. Teorema de Noether

A continuación, vamos a realizar una prueba del teorema de Noether en campos. Los argumentos serán muy similares a los empleados en el caso de partículas, aunque la continuidad de los sistemas nos llevará a ecuaciones de continuidad. Por tanto, serán *las corrientes conservadas* resultantes, si cumplen ciertas condiciones muy poco restrictivas, las que llevarán a la obtención de cantidades conservadas.

Al igual que en el caso anterior, supondremos que tenemos una familia continua de transformaciones para las variables de campo, que denotaremos por $u_I \to u_I(x,\varepsilon)$ tal que para $\varepsilon = 0$ es la solución de las ecuaciones de EL ($\delta\mathcal{L}/\delta u_I = 0$). Estas hipótesis son las mismas que empleamos en la sección anterior, luego por (39) tenemos que

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_I} - \frac{\partial}{x^\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\right]\delta u_I + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I\right] = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I\right]. \tag{45}$$

De la misma manera que en partículas, la equivalencia entre densidades lagrangianas permite relajar las condiciones sobre la acción de la familia de transformaciones sobre la lagrangiana. Si la transformación deja esta función invariante, entonces $\delta\mathcal{L} = 0$ y diremos que la transformación es **simétrica**. Sin embargo, basta con que exista una función vectorial $\Phi = (\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$ tal que

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha \Phi^\alpha \tag{46}$$

para que se obtenga el resultado deseado. En ese caso diremos que la transformación es **quasisimétrica**.

Suponiendo que la familia de transformaciones es quasisimétrica,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I\right] = \partial_\alpha\Phi^\alpha \Longrightarrow \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I - \Phi^\alpha\right] = 0. \tag{47}$$

Es decir,

$$\partial_\alpha G^\alpha = 0, \quad G^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}}\delta u_I - \Phi^\alpha \tag{48}$$

La ecuación obtenida no es una ley de conservación (una derivada temporal igualada a 0), sino una cuadridivergencia nula, *una ecuación de continuidad.*

3.2.1. Corrientes conservadas

Si $\partial_\alpha G^\alpha = 0$, diremos entonces que G^α es una **corriente conservada**. Al igual que sucede con la ecuación de continuidad en mecánica de fluidos, que lleva a la conservación de la masa, o la ecuación de continuidad de mecánica cuántica, que lleva a la conservación de la probabilidad, esta expresión nos puede llevar, bajo ciertas consideraciones bastante razonables, a una cantidad conservada.

Nuestro objetivo será mostrar que G^0, integrado sobre todo el espacio, no varía en el tiempo.

Sea V una región cerrada del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea R la región del espacio-tiempo que barre V en un tiempo $t_1 - t_0$. Es decir, $R = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \colon x^0 \in [t_0, t_1], (x^1, x^2, x^3) \in V\}$. Entonces, el teorema de la divergencia nos asegura que

$$0 = \int_R \partial_\alpha G^\alpha = \int_{\partial R} G^\alpha dn_\alpha, \tag{49}$$

donde la primera igualdad se debe a que G^α es una corriente conservada. Como

$$\partial R = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in R \colon x^0 \in \{t_0, t_1\} \text{ o } (x^1, x^2, x^3) \in \partial V\}, \tag{50}$$

podemos calcular dn_α en cada punto de la frontera. Para los puntos tales que $t = t_0$, $dn_\alpha = (-d^3x, 0, 0, 0)$. Análogamente, para puntos con $t = t_1$, $dn_\alpha = (d^3x, 0, 0, 0)$. En el resto de puntos de ∂R, necesariamente se tendrá que $dn_\alpha = 0$. Así, si tomamos un rectángulo de altura $dx_0 \equiv dt$ y de ancho $d\vec{\Sigma}$, el elemento de superficie de ∂V, tendremos que $dn_\alpha = (0, dx_0 d\vec{\Sigma})$. Este hecho nos permite escribir la integral de superficie como suma de cada una de estas tres partes de la frontera

$$\int_V G^0(t_1) d^3x - \int_V G^0(t_0) d^3x + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\partial V} \vec{G} \cdot d\vec{\Sigma} = 0, \tag{51}$$

donde $\vec{G} = (G^1, G^2, G^3)$. Supongamos que tomamos V como una esfera rellena y aumentamos su volumen cada vez más haciendo tender su radio a infinito, cubriendo todo $\mathbb{R}^3$. Entonces, si $\vec{G}$ decrece con la distancia a un ritmo suficientemente rápido (a un ritmo mayor que r^{-2}) podemos lograr que la última integral se haga arbitrariamente pequeña. Así, en el paso al límite tendremos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} G^0(t_1) d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} G^0(t_0) d^3x. \tag{52}$$

Es decir, la cantidad $Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} G^0(t, x^1, x^2, x^3) d^3x$, que llamaremos **carga**, es constante con respecto al tiempo, ya que t_0 y t_1 se han elegido de manera arbitraria.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} G^0(t, x^1, x^2, x^3) d^3x = 0 \tag{53}$$

Así pues, hemos encontrado una cantidad, o carga, conservada. De esta forma, el teorema de Noether en campos se puede expresar de la siguiente manera:

Teorema 3.1 *Si una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ es quasisimétrica (con función vectorial Φ^α) respecto a una familia de transformaciones continuas u_I, entonces*

$$G^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{I,\alpha}} \delta u_I - \Phi^\alpha \tag{54}$$

es una corriente conservada. Además, si G^0 decrece suficientemente rápido con la distancia o, en particular, si se anula fuera de una región acotada, entonces la carga

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} G^0(t, x^1, x^2, x^3) d^3x \tag{55}$$

es una cantidad conservada.

4. Cantidades conservadas por transformación de dualidad en electromagnetismo

En esta sección seguiremos principalmente los argumentos expuestos en [5] para obtener una formulación alternativa del electromagnetismo basada en la que llamaremos la densidad lagrangiana electromagnética. Esta enunciación permitirá establecer una correspondencia entre las simetrías del sistema y las de las ecuaciones de Maxwell y facilitará observar su simetría por dualidad y su respectiva cantidad conservada, la helicidad electromagnética.

Una vez establecida esta conexión, se estudiará su interpretación física, así como otras cantidades relacionadas, que surgirán como generalizaciones de esta.

En el siguiente desarrollo se emplearán coordenadas cartesianas en el espacio de Minkowski. Como es habitual, los índices representados con letras griegas $\alpha, \beta, ...$ tomarán valores 0, 1, 2 y 3, haciendo referencia al tiempo y a las tres coordenadas espaciales x, y y z respectivamente. Los índices representados con letras latinas tomarán valores 1, 2 y 3. Se tomará el sistema de unidades de forma que $\hbar = c = 1$ y se empleará la métrica $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

4.1. La densidad electromagnética

El papel de los campos eléctrico y magnético en las ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && (57) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (58) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= +\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, && (59) \end{aligned}$$

es muy similar. De hecho, si se realiza la transformación

$$\begin{aligned} \vec{E} \to \vec{E}' &= -\vec{B} \\ \vec{B} \to \vec{B}' &= \vec{E} \end{aligned} \quad (60)$$

las ecuaciones se mantienen invariantes. Esta simetría recuerda a las de la densidad lagrangiana que lleva a la conservación de ciertas cantidades. En efecto, se puede extender a una transformación continua, llamada **rotación de dualidad**

$$\begin{aligned} \vec{E} \to \vec{E}' &= \cos(\theta)\vec{E} + \sin(\theta)\vec{B} && (61) \\ \vec{B} \to \vec{B}' &= \cos(\theta)\vec{B} - \sin(\theta)\vec{E}, && (62) \end{aligned}$$

que también conserva la forma de las ecuaciones de Maxwell.

Estas ecuaciones se pueden obtener a partir del principio variacional [7] a través de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \quad (63)$$

que llamaremos **densidad lagrangiana estándar**.

La transformación de dualidad induce una transformación en el cuadripotencial magnético que se puede obtener mediante sustitución de la siguiente manera: si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} && (64) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, && (65) \end{aligned}$$

donde $\phi = A^0$ y $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$, entonces las transformaciones asociadas a estas coordenadas generalizadas se pueden expresar como

$$-\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right]\cos\theta + \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]\sin\theta \quad (66)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = -\left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right]\sin\theta + \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]\cos\theta. \quad (67)$$

Para el teorema de Noether solamente nos interesan transformaciones infinitesimales, luego se puede simplificar a

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}\delta\phi - \partial_t \delta A &= \delta\theta[\vec{\nabla} \times \vec{A}] \quad (68) \\ \vec{\nabla} \times \delta\vec{A} &= \delta\theta[\vec{\nabla}\phi] + \delta\theta[\partial_t \vec{A}]. \quad (69) \end{aligned}$$

Es posible resolver esta ecuación diferencial para obtener las transformaciones, observando que la densidad lagrangiana, si bien no es invariante, difiere con la original en la cuadridivergencia de una función arbitraria, obteniendo a partir de este hecho las cantidades conservadas. Este es el método por el que se obtuvo originalmente en [4].

Sin embargo, en este trabajo seguiremos el procedimiento empleado en [5] para resolver este problema. Este acercamiento permite expresar la transformación de dualidad explícitamente, de manera análoga a la rotación de dualidad, definiendo una nueva densidad lagrangiana, que llamaremos **densidad lagrangiana electromagnética**.

Mediante su uso obtendremos la cantidad asociada a esta transformación de manera sencilla y estableceremos una relación entre las simetrías del sistema y las de las ecuaciones de Maxwell.

Para lograr este objetivo es necesario definir de manera análoga al cuadrivector potencial magnético, A^α, un potencial eléctrico C^α tal que

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \\ G^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha C^\beta - \partial^\beta C^\alpha, \end{aligned} \quad (70)$$

donde G será el dual de F. Es decir,

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}. \quad (71)$$

Estos potenciales nos permiten definir la **transformación de dualidad**, que induce la rotación anterior como

$$A^\alpha \to A^{\alpha'} = \cos(\theta)A^\alpha + \sin(\theta)C^\alpha \quad (72)$$

$$C^\alpha \to C^{\alpha'} = \cos(\theta)C^\alpha - \sin(\theta)A^\alpha. \quad (73)$$

Al observar esta transformación parece lógico añadir a la densidad lagrangiana estándar, en la que solamente participa el potencial magnético, un término que involucre al eléctrico, logrando así la simetría buscada.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{8}(\partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha)(\partial^\alpha C^\beta - \partial^\beta C^\alpha). \quad (74)$$

Naturalmente, las coordenadas generalizadas serán cada una de las componentes de ambos potenciales. Al emplear coordenadas adicionales estamos trasladando el problema a un espacio de mayor dimensión, en el que el electromagnetismo en vacío será solamente una solución particular.

Para que la densidad lagrangiana electromagnética sea modelo para el electromagnetismo, es decir, para que induzca las transformaciones de Maxwell, será necesario imponer una ligadura a las soluciones del sistema de manera que permanezca la relación esperada entre ambos potenciales. De (70) se deduce que han de cumplir que,

$$\partial^\alpha C^\beta - \partial^\beta C^\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{75}$$

De esta forma, las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange con esta densidad lagrangiana,

$$\partial_\beta(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = 0 \tag{76}$$

$$\partial_\beta(\partial^\alpha C^\beta - \partial^\beta C^\alpha) = 0, \tag{77}$$

coincidirán las ecuaciones de Maxwell.

Por motivos que veremos más adelante, cabe recalcar que mediante el uso de esta densidad lagrangiana se obtienen todas las ecuaciones de Maxwell directamente del principio variacional. En cambio, mediante el uso de la densidad lagrangiana estándar solamente se obtiene la mitad de ellas y es necesario calcular el dual para obtener el resto. Esto es así porque las condiciones de dualidad están implícitas en el lagrangiano con restricción.

4.2. Teorema de Noether

A continuación, vamos a buscar las condiciones particulares que ha de cumplir una transformación de nuestras coordenadas para mantener invariante la lagrangiana electromagnética. De esta forma observaremos la estrecha relación entre la simetría de las ecuaciones de Maxwell y la del sistema bajo esta formulación.

Dada una transformación de coordenadas infinitesimal arbitraria

$$A^\alpha \to A^{\alpha'} = A^\alpha + \delta A^\alpha \tag{78}$$

$$C^\alpha \to C^{\alpha'} = C^\alpha + \delta C^\alpha \tag{79}$$

por ser $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\alpha A_\beta, \partial_\alpha C_\beta)$ se tiene que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}\delta(\partial_\alpha A^\beta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha C^\beta)}\delta(\partial_\alpha C^\beta). \tag{80}$$

Además, como se cumple que

$$\delta(\partial_\alpha A_\beta) = (\partial_\alpha A_\beta)' - \partial_\alpha A_\beta = \partial_\alpha(A'_\beta - A\beta) = \partial_\alpha(\delta A_\beta) \tag{81}$$

y sucede de igual manera con C_α, se puede expresar la ecuación anterior como

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}\partial_\alpha(\delta A^\beta) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha C^\beta)}\partial_\alpha(\delta C^\beta). \tag{82}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right]\delta A_\beta - \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right]\delta A_\beta + \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha B_\beta)}\right]\delta B_\beta - \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha B_\beta)}\right]\delta B_\beta. \tag{83}$$

Por tanto, agrupando y derivando obtenemos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\beta\left[\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}\delta A_\alpha + G^{\alpha\beta}\delta C_\alpha\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\partial_\beta F^{\alpha\beta}\right]\delta A_\alpha - \frac{1}{2}\left[\partial_\beta G^{\alpha\beta}\right]\delta C_\alpha \tag{84}$$

llegando a

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\beta\left[\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}\delta A_\alpha + G^{\alpha\beta}\delta C_\alpha\right)\right] = 0. \tag{85}$$

La última expresión se iguala a cero para tratar con transformaciones que dejen invariante la densidad lagrangiana.

Hasta este punto hemos considerado transformaciones de coordenadas arbitrarias. Sin embargo, estas en general no serán verdaderas transformaciones físicas a menos que mantengan las ligaduras impuestas para el electromagnetismo. Nos restringiremos, por tanto, a aquellas que cumplan

$$\partial^\alpha C^{\beta'} - \partial^\beta C^{\alpha'} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu). \tag{86}$$

Además, definiremos los tensores de campo transformados como

$$F^{\alpha\beta'} = \partial^\alpha A^{\beta'} - \partial^\beta A^{\alpha'} \tag{87}$$

$$G^{\alpha\beta'} = \partial^\alpha C^{\beta'} - \partial^\beta C^{\alpha'}. \tag{88}$$

De esta forma, toda transformación de coordenadas con significado físico dejará invariantes las ecuaciones de Maxwell. Este hecho no es de extrañar ya que para nuestro lagrangiano particular se corresponden con las de Euler-Lagrange.

Además, existe otra propiedad importante de las transformaciones significativas. Si se calcula $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\alpha A'_\beta, \partial_\alpha C'_\beta) - \mathcal{L}(\partial_\alpha A_\beta, \partial_\alpha C_\beta)$ a primer orden para una transformación de este tipo se obtiene

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{4}G_{\beta\alpha}\left[\partial^\alpha C^{\beta'} - \partial^\beta C^{\alpha'} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)\right], \tag{89}$$

que es idénticamente nulo. Por tanto, toda transformación con significado físico de la lagrangiana electromagnética preservará la forma de las ecuaciones de Maxwell y representará una simetría del sistema.

4.3. Carga asociada a la rotación de dualidad

La transformación de dualidad (72)-(73), como transformación infinitesimal, se puede escribir como

$$\begin{aligned} A^\alpha &\to A^{\alpha'} = A^\alpha + \theta C^\alpha \\ C^\alpha &\to A^{\alpha'} = C^\alpha - \theta A^\alpha \end{aligned} \tag{90}$$

e induce a su vez la siguiente transformación sobre los tensores de campo.

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &\to F^{\alpha\beta'} = F^{\alpha\beta} + \theta G^{\alpha\beta} \\ G^{\alpha\beta} &\to G^{\alpha\beta'} = G^{\alpha\beta} - \theta F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{91}$$

Podemos sustituir esta relación en (85) para obtener la siguiente ecuación

$$\theta\partial_\gamma\left[\frac{1}{2}(A_\alpha G^{\gamma\alpha} - C_\alpha F^{\gamma\alpha})\right] = 0. \tag{92}$$

La expresión anterior es cierta para todo valor de θ. Por tanto, lleva a la siguiente ecuación de continuidad.

$$\partial_\gamma h^\gamma = 0 \quad h^\gamma = \frac{1}{2}(A_\alpha G^{\gamma\alpha} - C_\alpha F^{\gamma\alpha}). \tag{93}$$

Sin embargo, la densidad h^0 no es invariante. Este hecho no resulta un problema, ya que, de la misma manera que hicimos en 3.2.1, podemos integrar sobre todo el espacio, obteniendo una cantidad que sí lo sea. Definimos

$$\mathcal{H} = \int_V h^0 d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \left(A_\alpha G^{0\alpha} - C_\alpha F^{0\alpha}\right) d^3\vec{r}. \tag{94}$$

Si llamamos $\vec{C} = (C^x, C^y, C^z)$ y $\vec{A} = (A^x, A^y, A^z)$, podemos expresar la relación anterior en forma vectorial como

$$\mathcal{H} = \int_V h^0 d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{C}\cdot\vec{E}\right) d^3\vec{r}. \tag{95}$$

Esta cantidad, llamada **helicidad óptica** o helicidad electromagnética, se mantiene constante a lo largo del tiempo, ya que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_V h^0 d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial h^0}{\partial t} d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\int_V \partial_i h^i d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\int_{\partial V} \vec{h}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{96}$$

donde, de la misma manera que antes, definimos $\vec{h} = (h^x, h^y, h^z)$. La última igualdad se debe a que asuminos que esta cantidad decrece suficientemente rápido con la distancia. Además esta cantidad es invariante guage, ya que si realizamos la transformación

$$\begin{aligned} A^\alpha &\to A^{\alpha'} = A^\alpha - \partial^\alpha \chi \\ C^\alpha &\to C^{\alpha'} = C^\alpha - \partial^\alpha \psi, \end{aligned} \tag{97}$$

donde $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ y $\chi = \chi(\vec{r}, t)$, entonces

$$F^{\alpha\beta'} = \partial^\alpha A^{\beta'} - \partial^\beta A^{\alpha'} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha - \partial^{\alpha\beta}\chi\ + \partial^{\beta\alpha}\chi = F^{\alpha\beta} \tag{98}$$

$$G^{\alpha\beta'} = \partial^\alpha C^{\beta'} - \partial^\beta C^{\alpha'} = \partial^\alpha C^\beta - \partial^\beta C^\alpha - \partial^{\alpha\beta}\psi + \partial^{\beta\alpha}\psi = G^{\alpha\beta}. \tag{99}$$

Luego $\vec{B}' = \vec{B}$, $\vec{E}' = \vec{E}$ y

$$\vec{A}'\cdot\vec{B}' = A_i' B^{j'} = A_i B^i - \partial_i \chi B^i = \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\chi\cdot\vec{B} \tag{100}$$

$$\vec{C}'\cdot\vec{E}' = C_i' E^{j'} = C_i E^i - \partial_i \psi E^i = \vec{C}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{E}, \tag{101}$$

de forma que

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{A}'\cdot\vec{B}' - \vec{C}'\cdot\vec{E}'\right) d^3\vec{r} = \mathcal{H} - \int_V \left(\vec{\nabla}\chi\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{E}\right) d^3\vec{r}. \tag{102}$$

Además, de la identidad $\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi(\vec{\nabla}\cdot)\vec{a}$ [14] se sigue que

$$\vec{\nabla}\chi\cdot\vec{B} = -\chi\vec{\nabla}\vec{B} + \vec{\nabla}(\chi\vec{B}) = \vec{\nabla}(\chi\vec{B}), \tag{103}$$

luego

$$\int_V \vec{\nabla}\chi\cdot\vec{B} = \int_V (\chi\vec{B}) = \int_{\partial V} \psi\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{104}$$

y realizando los mismos cálculos para $\psi\cdot\vec{E}$ obtenemos la igualdad que buscábamos

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \int_V \left(\vec{\nabla}\chi\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{E}\right) d^3\vec{r} = \mathcal{H}. \tag{105}$$

Podemos simplificar la expresión todavía más si tenemos en cuenta el siguiente hecho: las ecuaciones de Maxwell en el vacío nos indican que tanto el campo magnético como el eléctrico son campos transversales. Además, en el anexo A hemos visto que la integral sobre todo el espacio del producto escalar de un campo transversal por otro longitudinal es nula, luego

$$\mathcal{H} = \int_V \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\perp}\cdot\vec{B} + \vec{A}_{\parallel}\cdot\vec{B} - \vec{C}^{\perp}\cdot\vec{E} - \vec{C}_{\parallel}\cdot\vec{E}\right) d^3\vec{r} = \int_V \frac{1}{2}(\vec{A}^{\perp}\cdot\vec{B} - \vec{C}^{\perp}\cdot\vec{E}) d^3\vec{r}. \quad (106)$$

Por tanto,

$$\mathcal{H} = \int_V \frac{1}{2}(\vec{A}^{\perp}\cdot\vec{B} - \vec{C}^{\perp}\cdot\vec{E}) d^3\vec{r}. \quad (107)$$

Una vez expresada esta cantidad en función de campos transversales, su invarianza gauge se hace más evidente de acuerdo a lo expuesto en el anexo A.

La interpretación física y la importancia de esta cantidad se discutirán en la siguiente sección. Antes de explicar sus implicaciones vamos a proporcionar una simetría estrechamente relaciona con ella. La transformación infinitesimal

$$A^{\alpha} \to A^{\alpha'} = A^{\alpha} + \phi A^{\alpha} \quad (108)$$

$$C^{\alpha} \to C^{\alpha'} = C^{\alpha} + \phi C^{\alpha} \quad (109)$$

induce una transformación en los tensores electromagnéticos

$$F^{\alpha\beta} \to F^{\alpha\beta'} = F^{\alpha\beta} + \phi F^{\alpha\beta} \quad (110)$$

$$G^{\alpha\beta} \to G^{\alpha\beta'} = G^{\alpha\beta} + \phi G^{\alpha\beta}. \quad (111)$$

Es fácil ver que se trata de una transformación con sentido físico ya que cumple (86). Por tanto, representa una simetría del sistema. Siguiendo un procedimiento análogo al realizado con la helicidad llegamos a que

$$\partial_{\gamma} d^{\gamma} = 0, \quad d^{\gamma} = \frac{1}{2}(A_{\alpha}F^{\alpha\gamma} + C_{\alpha}G^{\alpha\gamma}). \quad (112)$$

Obteniendo un invariante gauge

$$\mathcal{D} = \int d^0 d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\int (\vec{A}\cdot\vec{E} + \vec{C}\cdot\vec{B}) d^3\vec{r}. \quad (113)$$

Sin embargo, esta cantidad conservada no aporta información ya que es idénticamente nula.

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{2}\int \left(-\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A})\right) =$$
$$-\frac{1}{2}\int \left(-\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{C} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{C} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})\right) = 0. \quad (114)$$

De la misma manera que hemos hecho anteriormente, el último término se desvanece al aplicar el teorema de Gauss y hacer tender $|\vec{r}| \to \infty$.

Este par de simetrías es un ejemplo de un resultado más general que discutiremos en la sección 4.5. Las transformaciones de la densidad lagrangiana surgen en pares, una de ellas llevando a una magnitud propia y la otra a una cantidad conservada trivial.

4.4. Helicidad electromagnética

Los haces de luz transportan momento angular orbital y de spin paralelos a su eje. Se sabe que el momento angular de spin está asociado con la polarización de los fotones que conforman el haz, mientras que el momento angular depende de la distribución espacial del campo [6]. Sin embargo, una descripción fundamental de este hecho en términos de la teoría electromagnética no resulta completamente satisfactoria ya que, aunque es posible separar ambos momentos angulares, no parecen tener significado físico por separado porque no se trata de momentos angulares propiamente dichos. A continuación, vamos a precisar a qué nos referimos con esta afirmación. Para ello seguiremos los argumentos presentes en [23].

El momento angular en el electromagnetismo se puede escribir como

$$\vec{J} = \int \vec{r}\times[\vec{E}\times\vec{B}]d^3\vec{r} \quad (115)$$

y como veremos en la sección 4.5.1 se trata de una cantidad conservada. Esta magnitud se puede separar en dos componentes, asociadas respectivamente a la parte longitudinal y transversal del campo eléctrico. La primera de ellas dota de momento angular al campo de Coulomb asociado a las cargas, mientras que la segunda se debe al campo de radiación, que se representará por $\vec{J}_{rad}$. Como tratamos con las ecuaciones de campo en el vacío, no hay cargas y el campo eléctrico solo tiene componente transversal.

Es posible separar $\vec{J}_{rad}$ a su vez en dos magnitudes diferentes

$$\vec{S}_{rad} = \int \vec{E}_{\perp}\times\vec{A}_{\perp}\,d\vec{r}, \quad \vec{L}_{rad} = \sum_j \int E_j^{\perp}(\vec{r}\times\vec{\nabla})A_j^{\perp}\,d\vec{r}. \quad (116)$$

De manera que

$$\vec{J}_{rad} = \vec{S}_{rad} + \vec{L}_{rad}. \quad (117)$$

La magnitud $\vec{L}_{rad}$ es la parte asociada al momento angular orbital y $\vec{S}_{rad}$ es la parte asociada al spin. Como se puede ver, esta última es intrínseca en el sentido de que es independiente de la definición del origen de coordenadas. Además, para el campo libre ambas son cantidades conservadas.

El problema con su interpretación es el siguiente: por un lado, la parte asociada al spin se corresponde con el momento angular total de una partícula en un sistema respecto al que se encuentra en reposo. Sin embargo, tal sistema no puede existir para los fotones. Como consecuencia de ello, no es posible definir un vector de spin. De hecho, solamente podemos definir la componente del spin en la dirección de la propagación (la helicidad). Por otro lado, si se realiza la cuantización de estas partes de $\vec{L}$, [23], se obtiene que

$$[S_{rad_i}, S_{rad_j}] = 0. \tag{118}$$

Es decir, todas sus componentes conmutan, lo que implica que este operador no puede generar rotaciones de la polarización del campo y, por tanto, no puede considerarse propiamente como un operador de momento angular de spin.

La helicidad óptica se obtuvo en [6] al buscar una magnitud pseudoescalar de tiempo-par (*"time-even pseudoscalar"*), es decir, una cantidad que no cambia de signo bajo inversiones temporales. Además se buscaba que tenga dimensiones de momento angular y que pueda relacionarse con la polarización de los fotones. Un primer candidato para ella fue la *helicidad magnetica*,

$$\mathcal{M} = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} \; d^3\vec{r}, \tag{119}$$

que aparece en física de plasmas para cuantificar el retorcimiento (*"twist"*) de las líneas de campo magnético en analogía con la helicidad de mecánica de fluidos [6].

Sin embargo, $\mathcal{M}$ no se considera adecuada porque no es invariante bajo transformaciones de dualidad. Este requisito se toma como principio: toda cantidad significativa del campo electromagnético ha de ser invariante bajo esta transformación. Para más información sobre ello se puede consultar [3], donde lo llaman "democracia electromagnética". Al imponer esta condición, buscando una cantidad similar a la helicidad magnética encontramos precisamente la helicidad electromagnética, o helicidad óptica, cantidad conservada por esta transformación.

A continuación, veremos la relación que existe entre la helicidad óptica y la polarización de la luz. Para ello, seguiremos los argumentos expuestos en [22] para cuantizar $\mathcal{H}$.

En primer lugar, el potencial magnético se puede expresar para campo libre como serie de Fourier de acuerdo con [8] como

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)(a(\vec{k},\lambda)e^{-ikx} + a^*(k,\lambda)e^{ikx}), \tag{120}$$

donde $k_\alpha = (\omega, \vec{k})$, $x_\alpha = (t, \vec{r})$ y por simplicidad hemos escrito

$$kx := k_\alpha x^\alpha = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}, \quad k^2 := k_\alpha k^\alpha = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0. \tag{121}$$

Los $\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$, $\lambda = 1,2$ se llaman **vectores de polarización lineal** y son transversales en el sentido de

$$\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) = 0, \quad \lambda = 1,2 \tag{122}$$

y ortonormales. Además, por convención se toman cumpliendo

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(\vec{k},1)\times\vec{\varepsilon}(\vec{k},2) &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} && (123)\\ \vec{\varepsilon}(-\vec{k},1) &= -\vec{\varepsilon}(\vec{k},1) && (124)\\ \vec{\varepsilon}(-\vec{k},2) &= \vec{\varepsilon}(\vec{k},2). && (125) \end{aligned}$$

De esta forma $\{\vec{\varepsilon}(\vec{k},1),\ \vec{\varepsilon}(\vec{k},2),\ \vec{k}/|\vec{k}|\}$ forman una base ortonormal. Este hecho nos permite definir los vectores de polarización a derechas y a izquierdas como

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_R(\vec{k}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\varepsilon}(\vec{k},1) + i\vec{\varepsilon}(\vec{k},2)) && (126)\\ \vec{\varepsilon}_L(\vec{k}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\varepsilon}(\vec{k},1) - i\vec{\varepsilon}(\vec{k},2)), && (127) \end{aligned}$$

cumpliéndose entonces que

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_R(-\vec{k}) &= -\vec{\varepsilon}_L(\vec{k}) && (128)\\ \vec{\varepsilon}_L(-\vec{k}) &= -\vec{\varepsilon}_R(\vec{k}). && (129) \end{aligned}$$

Por tanto, se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \vec{k}\times\vec{\varepsilon}_R &= -i\omega\vec{\varepsilon}_R && (130)\\ \vec{k}\times\vec{\varepsilon}_L &= i\omega\vec{\varepsilon}_L && (131)\\ \vec{\varepsilon}_R\times\vec{\varepsilon}_L &= -\frac{i}{\omega}\vec{k} && (132)\\ \vec{\varepsilon}_R\cdot\vec{\varepsilon}_R = \vec{\varepsilon}_L\cdot\vec{\varepsilon}_L &= 0 && (133) \end{aligned}$$

$$\vec{\varepsilon}_R \cdot \vec{\varepsilon}_L \quad = \quad 1. \tag{134}$$

De manera análoga podemos definir

$$a_R(\vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a(\vec{k},1) + ia(\vec{k},2)) \tag{135}$$

$$a_L(\vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a(\vec{k},1) - ia(\vec{k},2)). \tag{136}$$

Tales funciones complejas son el límite clásico de los operadores de aniquilación de fotones polarizados a derechas a izquierdas [8]. De igual manera, sus complejos conjugados a_R^* y a_L^* son sus respectivos operadores de creación. Así, pues, podemos escribir la fórmula (120) como función de estas, obteniendo

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \Big(\vec{\varepsilon}_R(\vec{k}) a_R(\vec{k}) + \vec{\varepsilon}_L(\vec{k}) a_L(\vec{k})) e^{-ikx} + (\vec{\varepsilon}_L(\vec{k}) a_R^* + \vec{\varepsilon}_R(\vec{k}) a_L^*) e^{ikx} \Big). \tag{137}$$

De este punto en adelante omitiremos la dependencia con $\vec{k}$ para simplificar la notación.

La parte espacial de la relación (70) se puede escribir como

$$\vec{E} \quad = \quad -\vec{\nabla} \times \vec{C} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{138}$$

$$\vec{B} \quad = \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \tag{139}$$

luego podemos calcular $\vec{C}$ a partir de $\vec{A}$ empleando las identidades (130)-(134). En primer lugar, las derivadas espaciales de A^j son

$$\partial_i A^j = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left((a_R \varepsilon_R^j + a_L \varepsilon_L^j) k_i e^{-ikx} - (a_R^* \varepsilon_L^j + a_L^* \varepsilon_R^j) k_i e^{ikx} \right). \tag{140}$$

Luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left(\vec{k} \times \left((\vec{\varepsilon}_R a_R + \vec{\varepsilon}_L a_L) e^{-ikx} - (\vec{\varepsilon}_L a_R^* + \vec{\varepsilon}_R a_L^*) e^{ikx} \right) \right) \tag{141}$$

Por tanto,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\omega}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left((\vec{\varepsilon}_L a_L - \vec{\varepsilon}_R a_R) e^{-ikx} + (\vec{\varepsilon}_R a_L^* - \vec{\varepsilon}_L a_R^*) e^{ikx} \right) \tag{142}$$

e integrando $\vec{B}$ respecto del tiempo obtenemos que

$$\vec{C} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left((\vec{\varepsilon}_L a_L - \vec{\varepsilon}_R a_R) e^{-ikx} + (\vec{\varepsilon}_L a_R^* - \vec{\varepsilon}_R a_L^*) e^{ikx} \right). \tag{143}$$

Podemos sustituir las expresiones obtenidas en (107)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \Big((a_L a_L'^* - a_R a_R'^*) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} + (a_L a_L'^* - a_R a_R'^*) e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}} + (a_R a_L' - a_L a_R') e^{-i(\vec{k}'+\vec{k})\cdot\vec{r}} + (a_R^* a_L'^* - a_L^* a_R'^*) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot r} \Big), \tag{144}$$

donde las primas en las funciones a_j', $j = L, R$ indican la dependencia con $\vec{k}'$ y la ausencia de estas la dependencia con $\vec{k}$.

De forma similar, como

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left((a_R \varepsilon_R + a_L \varepsilon_L) e^{-ikx} - (a_R^* \varepsilon_L + a_L^* \varepsilon_R) e^{ikx} \right), \tag{145}$$

entonces,

$$\vec{C} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \Big((a_R a_R'^* - a_L a_L'^*) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} + (a_R a_R'^* - a_L a_L'^*) e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}} + (a_R a_L' - a_L a_R') e^{-i(\vec{k}'+\vec{k})\cdot\vec{r}} + (a_R^* a_L'^* - a_L^* a_R'^*) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot r} \Big), \tag{146}$$

luego

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \left((a_L a_L'^* - a_R a_R'^*) + (a_L a_L'^* - a_R a_R'^*) e^{2i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}} \right) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} \tag{147}$$

Si tenemos en cuenta que

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} \tag{148}$$

podemos escribir $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \int d^3\vec{k} (a_L a_L^* - a_R a_R^*) \tag{149}$$

coincidiendo así con la expresión del límite clásico de la diferencia entre el número de fotones polarizados a izquierdas y a derechas (en otras unidades será necesario añadir un factor $\hbar$).

$$\mathcal{H} = N_L - N_R \tag{150}$$

Con esta fórmula logramos relacionar la helicidad electromagnética y de partículas. La misma cantidad que caracteriza como se rizan los campos magnéticos y eléctricos sobre sí mismos nos proporciona la diferencia entre fotones polarizados a derechas y a izquierdas. Así, si tenemos un campo electromagnético con configuración trivial, ningún campo está entrelazado y, por tanto, el número de fotones de cada tipo es el mismo. Sin embargo, si existen diferencias en el entrelazamiento de los campos, existirá también un desequilibrio en la polarización de los fotones [22].

4.5. Otras cantidades asociadas a simetrías electromagnéticas

En esta sección vamos a exponer otras dos transformaciones estrechamente relacionada con la helicidad y a genealizarlas a una familia infinita de simetrías.

4.5.1. Simetrías conformes

Las transformaciones de coordenadas conformes son aquellas que conservan los ángulos, aunque no necesariamente las longitudes [19]. Ejemplos de transformaciones confornes son las traslaciones, las rotaciones o los boosts.

Matemáticamente, una transformación $x^\alpha \to x^{\alpha'}$ es conforme si cumple que

$$x_{\alpha'} x^{\alpha'} = \lambda(x) x_\alpha x^\alpha \tag{151}$$

con $\lambda(x)$ una aplicación no nula. Si tenemos una transformación conforme infinitesimal $x^\alpha \to x^{\alpha'} = x^\alpha + \delta x^\alpha$, la condición (151) implica que

$$x_{\mu'} x^{\mu'} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} x^\alpha x^\beta = \lambda(x) \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta . \tag{152}$$

De manera que

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} = \lambda(x) \eta_{\alpha\beta} . \tag{153}$$

Así pues, teniendo en cuenta que se trata de una transformación infinitesimal, se puede escribir como

$$\eta_{\mu'\nu'} \left(\delta_\alpha^{\mu'} + \partial_\alpha \delta x^{\mu'} \right) \left(\delta_\beta^{\nu'} + \partial_\beta \delta x^{\nu'} \right) = \lambda(x) \eta_{\alpha\beta} \tag{154}$$

y primer orden,

$$\eta_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \delta x_\beta + \partial_\beta \delta x_\alpha = \lambda(x) \eta_{\alpha\beta} . \tag{155}$$

Luego $\partial_\alpha \delta x_\beta + \partial_\beta \delta x_\alpha$ es proporcional a $\eta_{\alpha\beta}$. Sea $K(x)$ el factor de proporcionalidad

$$\eta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha \delta x_\beta + \partial_\beta \delta x_\alpha\right) = \eta^{\alpha\beta} K(x) \eta_{\alpha\beta} \tag{156}$$

$$2\partial_\alpha \delta x^\alpha = \delta^\alpha_\alpha K(x) = 4K(x). \tag{157}$$

En la última igualdad, el número 4 se debe a la traza de la delta de Kronecker, es decir, a la dimensión del espacio en el que nos encontramos.

La expresión anterior implica que si una transformación infinitesimal es conforme, ha de cumplir la relación

$$\partial_\alpha \delta x_\beta + \partial_\beta \delta x_\alpha = \frac{1}{2}\partial_\mu \delta x^\mu \eta_{\alpha\beta}. \tag{158}$$

Contrayendo índices en ambos lados de la expresión con $\partial^\alpha \partial^\beta$ se puede demostrar, como se hace en [19], que

$$\delta x^\alpha = t^\alpha + \omega^\alpha_\beta x^\alpha + \gamma^\alpha_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{159}$$

cumpliendo los tensores ω y γ ciertas restricciones.

En [16] se estudia la invarianza de las ecuaciones de Maxwell sobre transformaciones conformes y se llega a una expresión general para ellas. En [5] se adapta a la combinación de potenciales eléctricos y magnéticos llegando a

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha - A_\beta \partial_\alpha X^\beta - X^\beta \partial_\beta A_\alpha \tag{160}$$

$$C_\alpha \to C'_\alpha = C_\alpha - C_\beta \partial_\alpha X^\beta - X^\beta \partial_\beta C_\alpha \tag{161}$$

con X^α dado por

$$X^\alpha = t^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta x^\beta + \vartheta x^\alpha + (2x^\alpha x^\beta - x_\mu x^\mu \eta^{\alpha\beta}) a_\beta. \tag{162}$$

La componente infinitesimal t^α representa traslaciones en el espacio tiempo, la componente $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ define las rotaciones y los boost, ϑ hace referencia a los cambios de escala y a^α a las transformaciones conformes especiales, transformaciones fraccionarias lineales no afines. Son de la forma

$$x^\mu \to x^{\mu'} = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b\cdot x + b^2 x^2} \tag{163}$$

y se pueden entender como la sucesiva aplicación de una inversión espaciotemporal, una traslación y otra inversión temporal

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2}, \quad x^\mu \to x^\mu + b^\mu, \quad x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2}. \tag{164}$$

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones conformes, lo que nos permite asegurar mediante (85) que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\partial_\gamma \left[\frac{1}{2} X^\mu \left(F^{\alpha\gamma} F_{\alpha\mu} + G^{\alpha\gamma} G_{\alpha\mu} \right) \right] = 0 \tag{165}$$

Como los tensores t^α, $\omega^{\alpha\beta}$, ϑ y a^α son independientes, obtenemos 15 ecuaciones que llevan a corrientes conservadas. Estas son

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma T^{\alpha\gamma} = 0, \quad T^{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}(F^\alpha{}_\mu F^{\mu\gamma} + G^\alpha{}_\mu G^{\mu\gamma}) && (166) \\
\partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad M^{\alpha\beta\gamma} &= x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma} && (167) \\
\partial_\gamma D^\alpha = 0, \quad D^\gamma &= x_\alpha T^{\alpha\gamma} && (168) \\
\partial_\gamma I^\alpha \gamma = 0, \quad I^{\alpha\gamma} &= 2x^\alpha x^\mu T^\gamma{}_\mu - x_\mu x^\mu T^{\alpha\gamma}. && (169)
\end{aligned}$$

El tensor $T^{\alpha\gamma}$ de (166) es el tensor energía-momento electromagnético escrito en función de los potenciales eléctrico y magnético y lleva a la conservación de la energía y el momento lineal. De la ecuación (167) se puede deducir la conservación del momento angular y del momento angular de boost, las cantidades conservadas por las transformaciones de Lorentz. La última de ellas, como su nombre indica, es la cantidad conservada por los boosts (un desarrollo detallado de la conservación de estas cantidades en densidades lagrangianas relativistas generales se puede encontrar en [9] páginas 571-576).

El posible sentido físico e independencia del conjunto completo de ecuaciones han sido muy discutidos. En [15] se demuestra la dependencia de 4 de ellas. Además, es en ese mismo artículo en el que se observa por primera vez que (168) está asociada con los cambios de escala. Aunque no se ha encontrado una interpretación general para (168)-(169), en [5] se realiza una interpretación curiosa para un caso particular. La cantidad conservada con densidad D^0, para ondas planas, lleva a la conocida relación de dispersión $\omega = |\vec{k}|$.

Al igual que sucede con las transformaciones de dualidad, las transformaciones conformes también tienen una transformación pareja, en este caso no geométrica,

$$\begin{aligned}
A_\alpha \to A'_\alpha &= A_\alpha - C_\beta \partial_\alpha Y^\beta - Y^\beta \partial_\beta C_\alpha && (170) \\
C_\alpha \to C'_\alpha &= C_\alpha + A_\beta \partial_\alpha T^\beta + Y^\beta \partial_\beta A_\alpha, && (171)
\end{aligned}$$

con Y^α dado por

$$Y^\alpha = g^\alpha + q^\alpha{}_\beta x^\beta + \varphi x^\alpha + (2x^\alpha x^\beta - x_\mu x^\mu \eta^{\alpha\beta}) b_\beta \tag{172}$$

donde g^α, $q^{\alpha\beta} = -q^{\beta\alpha}$, φ y b^α son pseudovectores infinitesimales con las dimensiones adecuadas. Sin embargo, al igual que sucedía en las transformaciones de dualidad, estas cantidades están asociadas a cantidades conservadas triviales [5].

4.5.2. Tensor zilch

El tensor zilch fue expuesto por primera vez por Lipkin en [10] y, aunque en el articulo original se dio una definición directa buscando que cumpliese la propiedad de ser cantidad conservada e independiente del tensor energía momento (linealmente independiente de las derivadas de $T^{\alpha\beta}$) es posible obtenerlo a partir de la siguiente transformación de coordenadas:

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \zeta^{\mu\nu}\partial_\mu G_{\nu\alpha} \tag{173}$$

$$C_\alpha \to C'_\alpha = C_\alpha - \zeta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\alpha}, \tag{174}$$

donde $\zeta^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico y con dimensión de raíz de longitud. Esta transformación induce sobre los tensores electromagnéticos la siguiente:

$$F_{\alpha\beta} \to F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + \zeta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu G_{\alpha\beta} \tag{175}$$

$$G_{\alpha\beta} \to G'_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \zeta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu F_{\alpha\beta}. \tag{176}$$

Es fácil ver que cumple la condición de transformación significativa, luego aplicando (85) obtenemos la ecuación de continuidad

$$\partial_\gamma Z^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad Z^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(G^{\gamma\mu}\partial^\alpha F_\mu{}^\beta - F^{\gamma\mu}\partial^\alpha G_\mu{}^\beta), \tag{177}$$

que lleva a las cantidades conservadas

$$\mathcal{Z}^{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} Z^{0\alpha\beta}\ dxdydz. \tag{178}$$

Este tensor se puede considerar como una extensión a mayor orden de la helicidad electromagnética. Además, resulta de gran interés pues en [21] se muestra que la componente

$$Z^{000} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}\right], \tag{179}$$

llamada **quiralidad óptica**, determina el grado de asimetría quiral en la excitación de moléculas.

Veamos de qué manera esto es así siguiendo los argumentos de [21]. La interacción de un campo electromagnético sobre una molécula quiral genera momentos dipolares eléctricos y magnéticos

$$\vec{p} = \tilde{\alpha}\vec{E} - i\tilde{G}\vec{B}, \quad \vec{m} = \tilde{\chi}\vec{B} + i\tilde{G}\vec{E}, \tag{180}$$

donde las tildes sobre los símbolos indican que se trata de cantidades complejas. $\tilde{\alpha}$ es la polarizabilidad eléctrica, $\tilde{\chi}$ la susceptibilidad magnética y $\tilde{G}$ es el término de polarizabilidad mixto.

Si se consideran los campos como ondas planas monocromáticas, la excitación media se puede calcular como

$$A^{\pm} = \langle \vec{E} \cdot \partial_t \vec{p} + \vec{B} \cdot \partial_t \vec{m} \rangle = \frac{\omega}{2} \mathrm{Im}(\vec{E}^* \cdot \tilde{p} + \vec{B}^* \cdot \vec{m}) \tag{181}$$

Si χ es despreciable, se obtiene la expresión

$$A^{\pm} = 2(\omega U_e \alpha'' \mp Z^{000} G''), \quad U_e = \frac{1}{4}|\vec{E}|^2. \tag{182}$$

Así pues, para luz circularmente polarizada, el factor de disimetría se puede expresar como

$$g = \frac{2(A^+ - A^-)}{A^+ + A^-} = -\left(\frac{G''}{\alpha''}\right)\left(\frac{2Z^{000}}{\omega E_e}\right). \tag{183}$$

Es decir, la asimetría quiral en el rango de excitación para moléculas pequeñas es proporcional a la quiralidad material y a la quiralidad electromagnética.

Al igual que sucede con la helicidad óptica, la transformación anterior tiene una simetría pareja que lleva a una cantidad trivial. Esta es

$$F_{\alpha\beta} \to F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + \xi^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu F_{\alpha\beta} \tag{184}$$

$$G_{\alpha\beta} \to G'_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \xi^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu G_{\alpha\beta}, \tag{185}$$

donde $\xi^{\mu\nu}$ es simétrico y tiene unidades de raíz de longitud.

4.5.3. Generalizaciones

Hasta ahora hemos estudiado las simetrías del electromagnetismo

$$\delta F^{\alpha\beta} = \theta G^{\alpha\beta} \qquad \delta G^{\alpha\beta} = -\theta F^{\alpha\beta} \tag{186}$$

$$\delta F^{\alpha\beta} = g^{\mu}\partial_\mu G^{\alpha\beta} \qquad \delta G^{\alpha\beta} = -g^{\mu}\partial_\mu F^{\alpha\beta} \tag{187}$$

$$\delta F^{\alpha\beta} = \zeta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu G^{\alpha\beta} \qquad \delta G^{\alpha\beta} = -\zeta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu T_{\alpha\beta} \tag{188}$$

asociadas respectivamente con la helicidad, una cantidad trivial y al zilch. De la misma manera hemos estudiado sus respectivas parejas

$$\delta F^{\alpha\beta} = \phi F^{\alpha\beta} \qquad \delta G^{\alpha\beta} = \phi G^{\alpha\beta} \tag{189}$$

$$\delta F^{\alpha\beta} = t^{\mu}\partial_{\mu} F^{\alpha\beta} \qquad \delta G^{\alpha\beta} = t^{\mu}\partial_{\mu} G^{\alpha\beta} \tag{190}$$

$$\delta F^{\alpha\beta} = \xi^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} F^{\alpha\beta} \quad \delta G^{\alpha\beta} = \xi^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} G_{\alpha\beta} \tag{191}$$

asociadas, respectivamente, a una cantidad trivial, el tensor energía-momento y a otra cantidad trivial.

Hemos expresado estas transformaciones en términos de los tensores de campo para poder observar el patrón que surge de las mismas. Esta pauta continúa, haciendo posible extender estas expresiones a una familia infinita de simetrías.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tomemos el cambio de coordenadas

$$F^{\alpha\beta} \to F^{\alpha\beta\prime} = F^{\alpha\beta} + \theta^{\kappa_1\kappa_2 \ldots \kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}\ldots\partial_{\kappa_n} G^{\alpha\beta} \tag{192}$$

$$G^{\alpha\beta} \to G^{\alpha\beta\prime} = G^{\alpha\beta} - \theta^{\kappa_1\kappa_2 \ldots \kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}\ldots\partial_{\kappa_n} F^{\alpha\beta} \tag{193}$$

donde $\theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$ es un tensor con unidades adecuadas para satisfacer la igualdad. También es posible suponer sin pérdida de generalidad que se trata de un tensor simétrico en todos sus índices.

Cada una de las transformaciones cumple la condición (86), ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}\ldots\partial_{\kappa_n}G_{\mu\nu} = G^{\alpha\beta} + \\ &\theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}\ldots\partial_{\kappa_n}\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}G_{\mu\nu} = G^{\alpha\beta} - \theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}\ldots\partial_{\kappa_n}F_{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\prime}. \end{aligned} \tag{194}$$

La penúltima igualdad se debe a que al aplicar dos veces el dual de Hodge sobre un tensor $F^{\alpha\beta}$ este cambia de signo[11]. Por tanto, esta transformación es una simetría del sistema con una cantidad conservada asociada.

Para obtenerla mediante (85) es necesario expresar la transformación en términos los potenciales electromagnéticos. Es fácil comprobar que las funciones buscadas cuando $n \geq 2$ son

$$A_{\alpha} \to A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\ldots\partial_{\kappa_{n-1}}G_{\kappa_n\alpha} \tag{195}$$

$$C_{\alpha} \to C'_{\alpha} = C_{\alpha} - \theta^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\ldots\partial_{\kappa_{n-1}}F_{\kappa_n\alpha}, \tag{196}$$

que llevan, renombrando los índices por simplicidad, a la ecuación

$$\partial_{\gamma}H^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n\gamma} = 0 \quad H^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n\gamma} = \frac{1}{2}\left(G^{\gamma\mu}\partial^{\kappa_2}\ldots\partial^{\kappa_n}F_{\mu}{}^{\kappa_1} - F^{\gamma\mu}\partial^{\kappa_2}\ldots\partial^{\kappa_n}G_{\mu}{}^{\kappa_1}\right). \tag{197}$$

De igual manera, los cambios de coordenadas de la forma

$$F^{\alpha\beta} \to F^{\alpha\beta'} = F^{\alpha\beta} + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}...\partial_{\kappa_n}F^{\alpha\beta} \tag{198}$$

$$G^{\alpha\beta} \to G^{\alpha\beta'} = G^{\alpha\beta} + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}...\partial_{\kappa_n}G^{\alpha\beta}, \tag{199}$$

donde $\tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}$ se puede considerar simétrico en todos sus índices y tiene las unidades adecuadas para respetar la igualdad, son también simetrías del sistema, ya que

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}...\partial_{\kappa_n}F_{\mu\nu} = G^{\alpha\beta} + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}...\partial_{\kappa_n}\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = G^{\alpha\beta} + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\partial_{\kappa_2}...\partial_{\kappa_n}G_{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta'}. \tag{200}$$

Esta transformación se puede expresar en términos de A^α y C^α como

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}...\partial_{\kappa_{n-1}}F_{\kappa_n\alpha} \tag{201}$$

$$C_\alpha \to C'_\alpha = C_\alpha + \tau^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\partial_{\kappa_1}...\partial_{\kappa_{n-1}}G_{\kappa_n\alpha}. \tag{202}$$

Así pues, las cantidades obtenidas aplicando el teorema de Noether son

$$\partial_\gamma T^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n\gamma} = 0, \quad T^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n\gamma} = \frac{1}{2}\left(F^{\gamma\mu}\partial^{\kappa_2}...\partial^{\kappa_n}F_\mu{}^{\kappa_1} + G^{\gamma\mu}\partial^{\kappa_2}...\partial^{\kappa_n}G_\mu{}^{\kappa_1}\right). \tag{203}$$

De la misma manera que sucedía en las simetrías que hemos estudiado previamente, para n par (197) está asociada a una cantidad conservada propia, mientras que (203) lo está a una trivial. Para n impar sucede lo contrario. Además, parece que todas las cantidades propias se pueden escribir como diferencia o suma del número de fotones polarizados en cada dirección [5].

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^3} h^0 \ d^3\vec{r} = \int \left[a_L(\vec{k})a_L^*(\vec{k}) - a_R(\vec{k})a_R^*(\vec{k})\right] d^3\vec{k} \tag{204}$$

$$\mathcal{T}^\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} T^{\alpha 0} \ d^3\vec{r} = \int k^\alpha \left[a_L(\vec{k})a_L^*(\vec{k}) + a_R(\vec{k})a_R^*(\vec{k})\right] d^3\vec{k} \tag{205}$$

$$\mathcal{Z}^{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} Z^{\alpha\beta 0} d^3\vec{r} = \int k^\alpha k^\beta \left[a_L(\vec{k})a_L^*(\vec{k}) - a_R(\vec{k})a_R^*(\vec{k})\right] d^3\vec{k} \tag{206}$$

En esta familia infinita de cantidades conservadas solamente las dos primeras tienen una interpretación clara. Sin embargo, se puede interpretar que el resto de estas cantidades describen propiedades de las derivadas del campo electromagnético. Esta idea surge de la autosimilaridad de las ecuaciones de Maxwell.

Con autosimilaridad nos referimos a la siguiente propiedad de las ecuaciones: definimos

$$\vec{G}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad \vec{M}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{B}. \tag{207}$$

Entonces, estos nuevos campos cumplen las siguientes ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_2 = 0 \tag{208}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_2 = 0 \tag{209}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{G}_2 = -\frac{\partial \vec{M}_2}{\partial t} \tag{210}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M}_2 = +\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial t}, \tag{211}$$

idénticas en forma a las ecuaciones de Maxwell. Este proceso se puede repetir indefinidamente, tomando nuevos campos como el rotacional de los anteriores, y en todos los casos se preserva la forma de las ecuaciones de Maxwell.

Para ver esto, definamos de manera recursiva

$$\vec{G}_1 = \vec{E} \qquad \vec{M}_1 = \vec{B} \tag{212}$$

$$\vec{G}_{i+1} = \vec{\nabla} \times G_i \quad \vec{M}_{i+1} = \vec{\nabla} \times \vec{M}_i \tag{213}$$

Supongamos que se satisfacen unas ecuaciones de tipo Maxwell para el caso $n-1$ y veamos que se satisfacen también para n.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_n = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}_{n-1}) = 0 \tag{214}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_n = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{n-1}) = 0 \tag{215}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{G}_n = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}_{n-1}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{M}_{n-1}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_{n-1}\right) = -\frac{\partial \vec{M}_n}{\partial t} \tag{216}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M}_n = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{n-1}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{G}_{n-1}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{G}_{n-1}\right) = \frac{\partial \vec{G}_n}{\partial t} \tag{217}$$

A continuación vamos a ver las consecuencias de la autosimilaridad. Si observamos la componente 00 del tensor zilch se puede comprobar que es idéntico en forma, salvo signo, a la helicidad, midiendo cómo se entrelazan los campos $\vec{G}_2$ y $\vec{M}_2$.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{C}\right) d^3\vec{r} \tag{218}$$

$$\mathcal{Z}^{00} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}\right) d^3\vec{r}. \tag{219}$$

Si calculamos las componentes $0\ldots0$ del tensor H para cada posible rango observaremos que este es un hecho general. En primer lugar, calculamos las n-ésimas derivadas temporales de los campos.

$$\frac{\partial^n \vec{G}_1}{\partial t^n} = \begin{cases} \vec{M}_{n+1} & \text{si } n \equiv 1 \mod 4 \\ -\vec{G}_{n+1} & \text{si } n \equiv 2 \mod 4 \\ -\vec{M}_{n+1} & \text{si } n \equiv 3 \mod 4 \\ \vec{G}_{n+1} & \text{si } n \equiv 0 \mod 4 \end{cases} \tag{220}$$

y

$$\frac{\partial^n \vec{M}_1}{\partial t^n} = \begin{cases} -\vec{G}_{n+1} & \text{si } n \equiv 1 \mod 4 \\ -\vec{M}_{n+1} & \text{si } n \equiv 2 \mod 4 \\ \vec{G}_{n+1} & \text{si } n \equiv 3 \mod 4 \\ \vec{M}_{n+1} & \text{si } n \equiv 0 \mod 4 \end{cases} \tag{221}$$

De manera que si m es el rango del tensor $H^{\kappa_1,\ldots,\kappa_m}$ con $m \geq 2$, entonces se tienen $m-2$ derivadas y $H^{0\ldots0} = 1/2\vec{B}\cdot\partial^{m-2}\vec{E}/\partial t^{m-2} - \vec{E}\cdot\partial^{m-2}\vec{B}/\partial t^{m-2}$. Es decir,

$$2H^{0\ldots0} = \begin{cases} -\vec{E}\cdot\vec{G}_{m-1} - \vec{B}\cdot\vec{M}_{m-1} & \text{si } m \equiv 1 \mod 4 \\ -\vec{E}\cdot\vec{M}_{m-1} + \vec{B}\cdot\vec{G}_{m-1} & \text{si } m \equiv 2 \mod 4 \\ \vec{E}\cdot\vec{G}_{m-1} + \vec{B}\cdot M_{m-1} & \text{si } m \equiv 3 \mod 4 \\ \vec{E}\cdot\vec{M}_{m-1} - \vec{B}\cdot\vec{G}_{m-1} & \text{si } m \equiv 0 \mod 4 \end{cases} \tag{222}$$

De hecho, si tenemos en cuenta que los potenciales eléctrico y magnético cumplen que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{C}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{223}$$

y estos potenciales cumplen su propia versión de las ecuaciones de Maxwell [6]

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{C}) = 0 \tag{224}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{225}$$

$$\vec{\nabla}\times(-\vec{C}) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{226}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = +\frac{\partial(-\vec{C})}{\partial t} \tag{227}$$

podemos definir

$$\vec{G}_0 = -\vec{C}, \ \vec{M}_0 = \vec{A} \tag{228}$$

extendiendo el resultado anterior a todo $\mathbb{N}$. Este cambio de signo se debe a la definición de C^α, de manera que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{C}$. Aunque es posible definir $\vec{C}$ de forma que no aparezca, se ha preferido de esta manera pues simplifica la notación en el desarrollo del formalismo electromagnético.

De la misma manera podemos calcular la componente $0\ldots0$ del tensor T

$$2T^{0\ldots0} = \begin{cases} \vec{E}\cdot\vec{M}_{n-1} - \vec{B}\cdot\vec{G}_{n-1} & \text{si } n \equiv 1 \mod 4 \\ -\vec{E}\cdot\vec{G}_{n-1} - \vec{B}\cdot\vec{M}_{n-1} & \text{si } n \equiv 2 \mod 4 \\ -\vec{E}\cdot\vec{M}_{n-1} + \vec{B}\cdot G_{n-1} & \text{si } n \equiv 3 \mod 4 \\ \vec{E}\cdot\vec{G}_{n-1} + \vec{B}\cdot\vec{M}_{n-1} & \text{si } n \equiv 0 \mod 4 \end{cases} \tag{229}$$

Combinando los resultados de ambas transformaciones resulta que

$$\vec{G}_1\cdot\vec{G}_n + \vec{M}_1\cdot\vec{M}_n \tag{230}$$

$$\vec{G}_1\cdot\vec{M}_n - \vec{M}_1\cdot\vec{G}_n \tag{231}$$

son ambas cantidades conservadas para todo valor de n. Nuestro objetivo es demostrar que tales transformaciones son idénticas formalmente a la helicidad y energía para los campos $\vec{M}_n$ y $\vec{G}_n$. Es decir, demostrar que para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que si n es el rango del tensor H y T,

$$2H^{0\ldots0} \sim \begin{cases} -\vec{G}_{2m}\cdot\vec{G}_{2m+1} - \vec{M}_{2m}\cdot\vec{M}_{2m+1} & \text{si } n = 4m+1 \\ 0 & \text{si } n = 4m+2 \\ \vec{G}_{2m+1}\cdot\vec{G}_{2m+2} + \vec{M}_{2m+1}\cdot M_{2m+2} & \text{si } n = 4m+3 \\ 0 & \text{si } n = 4m \end{cases} \tag{232}$$

$$2T^{0\ldots0} \sim \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4m+1 \\ \vec{G}_{2m+1}\cdot\vec{G}_{2m+1} + \vec{M}_{2m+1}\cdot\vec{M}_{2m+1} & \text{si } n = 4m+2 \\ 0 & \text{si } n = 4m+3 \\ \vec{G}_{2m+2}\cdot\vec{G}_{2m+2} + \vec{M}_{2m+2}\cdot\vec{M}_{2m+2} & \text{si } n = 4m \end{cases} \tag{233}$$

donde $f \sim g$ expresa la relación de equivalencia

$$f \sim g \iff \int_{\mathbb{R}^3} f \; d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} g \; d^3\vec{r} \tag{234}$$

Este resultado surge como caso particular de la siguiente propiedad: para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

$$\vec{G}_1\cdot\vec{G}_p + \vec{M}_1\cdot\vec{M}_p \sim \vec{G}_{1+k}\cdot\vec{G}_{p-k} + \vec{M}_{1+k}\cdot\vec{M}_{p-k} \tag{235}$$

$$\vec{G}_1\cdot\vec{M}_p - \vec{M}_1\cdot\vec{G}_p \sim \vec{G}_{1+k}\cdot\vec{M}_{p-k} - \vec{M}_{1+k}\cdot\vec{G}_{p-k} \tag{236}$$

Antes de demostrarlo veamos la siguiente propiedad: dado $i, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se da que

$$\vec{G}_i \cdot \vec{G}_n + \vec{M}_i \cdot \vec{M}_n = \vec{G}_i \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_i \cdot \vec{\nabla} \times \vec{M}_{n-1} =$$
$$-\vec{G}_i \cdot \frac{\partial \vec{M}_{n-1}}{\partial t} + \vec{M}_i \cdot \frac{\partial \vec{G}_{n-1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{M}_i \cdot \vec{G}_{n-1} - \vec{G}_i \cdot \vec{M}_{n-1}\right) + \left(\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial t} \cdot \vec{M}_{n-1} - \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} \cdot \vec{G}_{n-1}\right)$$

y de la misma forma

$$\vec{G}_i \cdot \vec{M}_n - \vec{M}_i \cdot \vec{G}_n = \vec{G}_i \cdot \vec{\nabla} \times \vec{M}_{n-1} - \vec{M}_i \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}_{n-1} =$$
$$\vec{G}_i \cdot \frac{\partial \vec{G}_{n-1}}{\partial t} + \vec{M}_i \cdot \frac{\partial \vec{M}_{n-1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_i \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_i \cdot \vec{M}_{n-1}\right) - \left(\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial t} \cdot \vec{G}_{n-1} + \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} \cdot \vec{M}_{n-1}\right),$$

luego

$$\vec{G}_i \cdot \vec{G}_n + \vec{M}_i \cdot \vec{M}_n = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{M}_i \cdot \vec{G}_{n-1} - \vec{G}_i \cdot \vec{M}_{n-1}\right) + \left(\vec{G}_{i+1} \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_{i+1} \cdot \vec{M}_{n-1}\right) \quad (237)$$

$$\vec{G}_i \cdot \vec{M}_n - \vec{M}_i \cdot \vec{G}_n = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_i \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_i \cdot \vec{M}_{n-1}\right) + \left(\vec{G}_{i+1} \cdot \vec{M}_{n-1} - \vec{M}_{i+1} \cdot \vec{G}_{n-1}\right) \quad (238)$$

De la identidad (237) se tiene que si $n \geq 2$

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_n + \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_n = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{M}_1 \cdot \vec{G}_{n-1} - \vec{G}_1 \cdot \vec{M}_{n-1}\right) + \left(\vec{G}_2 \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_{n-1}\right)$$

y aplicando (238) llegamos a

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_n - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_n = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_{n-1}\right) + \left(\vec{G}_2 \cdot \vec{M}_{n-1} - \vec{M}_2 \cdot \vec{G}_{n-1}\right)$$

Las derivadas que aparecen en las expresiones anteriores son todas ellas densidades de cantidades conservadas. Por tanto, son equivalentes a 0 y

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_n + \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_n \sim \vec{G}_2 \cdot \vec{G}_{n-1} + \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_{n-1} \quad (239)$$
$$\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_n - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_n \sim \vec{G}_2 \cdot \vec{M}_{n-1} - \vec{M}_2 \cdot \vec{G}_{n-1} \quad (240)$$

Vamos a probar por inducción sobre p que para todo $k \leq p-1$ se cumple (235) y (236) (HI.1). El menor valor de p no trivial es $p = 2$. Hemos visto que las expresiones (239) y (240) son válidas para todo $n \geq 2$. En particular lo son para $n = 2$ luego se cumple la hipótesis de inducción para todo $k \leq 2$ $(k = 1)$. Supongamos que la hipótesis es válida para $p - 1$ y veamos que lo es también para p.

Para p dado vamos a aplicar inducción sobre k para demostrar que se cumplen (235) y (236) (HI.2). Las mismas expresiones (239) y (240) nos sirven para el caso $k = 1$.

Supongamos que (235) y (236) son válidas para $k-1$ y veamos que si $k \leq p-1$ también lo serán para k.

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_p + \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_p \sim \vec{G}_k \cdot \vec{G}_{p+1-k} + \vec{M}_k \cdot \vec{M}_{p+1-k} =$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)} + \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{M}_k \cdot \vec{G}_{p-k} - \vec{G}_k \cdot \vec{M}_{p-k}\right) =$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)} + \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{M}_{1+(k-1)} \cdot \vec{G}_{(p-1)-(k-1)} - \vec{G}_{1+(k-1)} \cdot \vec{M}_{(p-1)-(k-1)}\right) \sim$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)} + \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)}\right)$$

donde la última equivalencia se debe a que por (HI.1) la expresión dentro de la derivada es equivalente a la densidad de una cantidad conservada y, por tanto, equivalente a 0. De manera análoga

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_p - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_p \sim \vec{G}_k \cdot \vec{M}_{p-k+1} - \vec{M}_2 \cdot \vec{G}_{p-k+1} =$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)} - \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_k \cdot \vec{G}_{p-k} + \vec{M}_k \cdot \vec{M}_{p-k}\right) =$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)} - \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_{1+(k-1)} \cdot \vec{G}_{(p-1)-(k-1)} + \vec{M}_{1+(k-1)} \cdot \vec{M}_{(p-1)-(k-1)}\right) \sim$$

$$\left(\vec{G}_{1+k} \cdot \vec{M}_{p-(k+1)} - \vec{M}_{1+k} \cdot \vec{G}_{p-(k+1)}\right)$$

Con esto concluye la prueba. Así pues, tomando $k = p-1$ llegamos a que

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_p - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_p \sim \vec{G}_p \cdot \vec{M}_1 - \vec{M}_p \cdot \vec{G}_1 \sim -\left(\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_p - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_p\right)$$

Lo que implica que, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{M}_p - \vec{M}_1 \cdot \vec{G}_p \sim 0 \tag{241}$$

Así pues, tomando respectivamente $k = 2m-1$, $k = 2m$, $k = 2m+1$ y $k = 2m+2$ cuando $p = 4m+1$, $p = 4m+2$, $p = 4m+3$ y $p = 4m$ para algún valor de m obtenemos el resto de casos de (232) y (233).

Por tanto, obtenemos el resultado esperado. Las cantidades $H^{0\ldots0}$ son idénticas en forma a la helicidad óptica, midiendo el entrelazamiento de los sucesivos campos $\vec{G}_n$ y $\vec{M}_n$. Las cantidades $T^{0\ldots0}$ en cambio, son idénticas en forma a las "energías" de tales campos.

5. Conclusión

La simetría de las ecuaciones de Maxwell y su invarianza por la rotación de dualidad se conocen desde su planteamiento a mediados del siglo XIX. Por tanto, resulta sorprendente que no fuera hasta los años 60 del siglo pasado cuando se estudiase esta transformación y se encontrase su carga asociada.

La helicidad óptica es una magnitud muy significativa del electromagnetismo y tiene una interpretación profunda que enlaza las descripciones clásica y cuántica de la teoría. Además, los conocimientos necesarios para su estudio no sobrepasan los obtenidos en el grado, por lo que incluso podría estudiarse como parte de su temario, presentando a los alumnos una cantidad distinta que ejemplifica la utilidad del teorema de Noether.

El estudio de sus generalizaciones e interpretación ha llevado a algunas incógnitas que podrían estudiarse en una continuación del trabajo. En primer lugar, hemos visto que las cantidades $H^{0...0}$ hablan sobre el entrelazamiendo de los campos $\vec{G}_n$ y $\vec{M}_n$ pero ¿dicen algo sobre los propios campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$? y ¿qué expresan sus “energías”, las cantidades $T^{0...0}$? Aunque es posible que solo sea una consecuencia matemática de la autosimilaridad de las ecuaciones de Maxwell y los autores de [6] opinan que no existe interpretación física debido a las extrañas unidades de estas cantidades, puede ser interesante investigar al respecto.

El desarrollo de este trabajo ha servido para ahondar en un resultado tan conocido como es el teorema de Noether, aplicado de manera más profunda en el contexto de la teoría clásica de campos. Este estudio, además de continuar con los conocimientos adquiridos en el grado, ha servido de puente para aprender fundamentos de otras áreas afines como la geometría diferencial de variedades o teorías cuánticas de campos.

Referencias

[1] Apostol, T.M. (1999). *Calculus.* (2ª ed., Vol. 2). Reverté.

[2] Arfken, G.B., Weber, H.J. and Harris, F.E. (2013). *Mathematical methods for physicists: a cromprehensive guide.* (7ª ed.). Academic Press.

[3] Berry, M.V. (2009). Optical currents. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics,* **11**(9). 094001

[4] Calkin, M.G. (1965). An Invariance Property of the Free Electromagnetic Field. *American Journal Of Physics*, **33**(11), 958-960. 1.1971089

[5] Cameron, R.P. and Barnett, S.M. (2012). Electric–magnetic symmetry and Noether's theorem. *New Journal Of Physics*, **14**. 123019

[6] Cameron, R.P., Barnett S.M. and Yao, A.M. (2012). Optical helicity, optical spin and related quantities in electromagnetic theory. *New Journal of Physics*, **14** 053050

[7] Costa Quintana, J. y López Aguilar, F. (2007). *Interacción electromagnética: teoría clásica*. Reverté.

[8] Hatfield, B. (2018). *Quantum Field Theory of point particles and strings*. CRC Press.

[9] José, J.V. and Saletan, E.J. (1998). *Classical dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press.

[10] Lipkin, D.M. (1964). Existence of a New Conservation Law in Electromagnetic Theory. *Journal Of Mathematical Physics*, **5**(5), 696-700. 1.1704165

[11] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics* (2ª ed.). CRC Press.

[12] Noether, E. (1918). Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1918**, 235–257. http://eudml.org/doc/59024

[13] Noether, E. (1971). Invariant variation problems. Transport Theory And Statistical Physics, **1**(3), 186-207. 00411457108231446

[14] Peral Alonso, I. (1995). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. Addison-Wesley.

[15] Plybon, B.F. (1974). Observations on the Bessel-Hagen Conservation Laws for Electromagnetic Fields. *American Journal Of Physics*, **42**(11), 998-1001. 1.1987911

[16] Rosen, G. (1972). Conformal Invariance of Maxwell's Equations. *American Journal Of Physics*, **40**(7), 1023-1027. 1.1986735

[17] Sáenz de Cabezón, E. (2019). *El árbol de Emmy: Emmy Noether, la mayor matemática de la historia*. Plataforma Editorial.

[18] Salcedo Moreno, L.L. (2020). Grupos continuos en https://www.ugr.es/~salcedo. (Consultado el 8 de marzo de 2024 en https://www.ugr.es/~salcedo/public/mt3/curso.pdf).

[19] Schellekens, A.N. (2017). Conformal Field Theory in https://www.nikhef.nl/~t58. (Consultado el 9 de marzo de 2024 en https://www.nikhef.nl/~t58/CFT.pdf).

[20] Sokolov, A.A., Ternov, I. M., Zhukovski V.C. y Borisov, A.V. (1989). *Electrodinámica cuántica*. Editorial Mir Moscú.

[21] Tang, Y. and Cohen, A.E. (2010). Optical Chirality and Its Interaction with Matter. *Physical Review Letters*, **104**(16). 163901

[22] Trueba, J.L. and Rañada, A.F. (1996). The electricmagnetic helicity. *European Journal of Physics*. **17**, 141-144. 008

[23] Van Enk, S.J. and Nienhuis, G. (1994). Spin and Orbital Angular Momentum of Photons. *Europhysics Letters*, **25**(7), 497-501. 004

A. Campos transversales y longitudinales

Llamamos **campo vectorial longitudinal** a todo campo $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \tag{242}$$

Este hecho implica que el campo será conservativo [14], es decir, que existe un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f. \tag{243}$$

De manera análoga, definimos como **campo vectorial transversal** a aquel campo $\vec{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0. \tag{244}$$

El teorema de descomposición de Helmholtz [2] nos asegura que para un campo $\vec{G}$ diferenciable tridimensional que tiende a cero en el infinito existe una descomposición única en un campo longitudinal, $\vec{G}_{\parallel}$ y otro transversal, $\vec{G}_{\perp}$ de forma que

$$\vec{G} = \vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp}. \tag{245}$$

Este hecho nos resulta de gran utilidad en electromagnetismo debido a las propiedades particulares de estos tipos de campos. A continuación, expondremos dos resultados que nos serán de utilidad en el estudio de las cantidades conservadas en esta teoría.

En primer lugar, la integral sobre todo el espacio del producto escalar de un campo vectorial longitudinal $\vec{F}_{\parallel}$ y otro transversal, $\vec{G}_{\perp}$ es nula. Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{G}_{\perp} d^3\vec{r} = 0. \tag{246}$$

Esto es así ya que si V es una esfera de radio r

$$\int_V \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{G}_{\perp} d^3\vec{r} = \int_V \vec{\nabla} f \cdot \vec{G}_{\perp} d^3\vec{r} = \int_V \left(\vec{\nabla} f \cdot \vec{G}_{\perp} + 0\right) d^3\vec{r} = \tag{247}$$

$$\int_V \left(\vec{\nabla} f \cdot \vec{G}_{\perp} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_{\perp})\right) d^3\vec{r} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}_{\perp}) d^3\vec{r} = \int_{\partial V} f\vec{G}_{\perp}. \tag{248}$$

Haciendo tender r a infinito la última integral se anula, ya que ambas cantidades tienden a 0.

El segundo hecho importante es que la parte transversal de un campo vectorial es invariante gauge, ya que si

$$\vec{G}' = \vec{G} + \vec{\nabla}\psi \tag{249}$$

con ψ una función arbitraria, tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}' = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{G}_\parallel + G_\perp + \vec{\nabla}\psi\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_\parallel + \vec{\nabla} \cdot G_\perp + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_\parallel + \Delta\psi. \tag{250}$$

Pero

$$\vec{\nabla} \times \vec{G}' = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{G}_\parallel + G_\perp + \vec{\nabla}\psi\right) = \vec{\nabla} \times \vec{G}_\parallel 9 \vec{\nabla} \times \vec{G}_\perp + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla} \times \vec{G}_\perp, \tag{251}$$

luego

$$\begin{aligned} \vec{G}'_\parallel &= G_\parallel + \vec{\nabla}\psi & (252) \\ \vec{G}'_\perp &= \vec{G}_\perp. & (253) \end{aligned}$$