Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas

El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, cuando enseña sucesiones numéricas: relaciones entre subdominios en la selección y uso de ejemplos

Memoria para optar al grado de doctor presentada por:

Hugo Cesar Cayo Maturana

Fecha de lectura: 19 de junio de 2023

Bajo la dirección de los doctores:

Luis Carlos Contreras González

Myriam Codes Valcarce

Huelva, 2023

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas

El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, cuando enseña sucesiones numéricas: Relaciones entre subdominios en la selección y uso de ejemplos.

Tesis Doctoral

Hugo Cesar Cayo Maturana

Dirigida por

Luis Carlos Contreras González

Myriam Codes Valcarce

Huelva, 2023

Agradecimientos

A mi Dios, por esta oportunidad de conocer gente tan maravillosa y de desarrollarme profesionalmente. A mi amada esposa, por dejar todo y acompañarme en esta gran aventura. A nuestro hermoso hijo, por alegrarnos cada día. A la familia que nos acompaña desde lejos y la que nos acogió en esta hermosa tierra. Y mis directores Luis Carlos y Myriam Codes, por todo el apoyo y la paciencia que me brindaron.

A todos, muchas gracias.

Contenido

Índice de Figuras

Resumen

En este trabajo se describe el proceso que realizamos para comprender cómo ser relacionaban los distintos conocimientos movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas, en un curso de tercer año de educación secundaria.

Nuestra investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo y corresponde a un estudio de caso instrumental. Los pilares que lo sustentan son (i) el conocimiento profesional del profesor, el MTSK como instrumento de análisis del conocimiento especializado, (ii) los ejemplos como herramienta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y (iii) las sucesiones numéricas y su abordaje a nivel de la educación secundaria.

Para obtener la información se utilizaron dos técnicas: la observación de clase y la entrevista. A través de la observación de clase nos introdujimos en un aula de educación secundaria, sin generar interacción alguna con los estudiantes o el docente, solo para registrar, por medio de grabaciones de audio y video, y observar el trabajo desarrollado por el profesor en cada una de las clases. Y por medio de la entrevista se buscaba aclarar las distintas dudas que emergían al analizar lo observado en clases. Las grabaciones de las clases y de la entrevista se transcribieron de forma literal.

El análisis de la información se realizó sobre las transcripciones de los distintos momentos en los cuales se identificaba el uso de un ejemplo y, cuando correspondía, se consideraba el extracto pertinente de la transcripción de la entrevista. Con el análisis de estas transcripciones se buscaba obtener evidencias de los conocimientos movilizados por el profesor, para luego determinar las relaciones que se generaban entre estos conocimientos durante la selección y el uso de los ejemplos.

Al presentar los resultados comenzamos con una descripción de los conocimientos movilizados por el profesor, por subdominio de conocimiento del modelo MTSK, al abordar la enseñanza de las sucesiones por medio de ejemplos. A continuación, hacemos una descripción de las relaciones que observamos durante la selección y el uso de los ejemplos, distinguiendo entre ejemplos pasivos y activos y ejemplos enfocados en la enseñanza y en la práctica.

En conclusión, si bien la ejemplificación en sí es reconocida como un escenario favorable para el estudio del MTSK, existen momentos y tipos de ejemplos más favorables que otros. Estudiar el MTSK que determina la selección de un ejemplo nos permite identificar una mayor cantidad y variedad de relaciones entre subdominios, en comparación con lo que ocurre al analizar el desarrollo de un ejemplo. Y en el caso de los distintos tipos de ejemplos, observamos que los ejemplos activos y los enfocados en la enseñanza son los que nos permiten identificar una mayor cantidad y variedad de relaciones entre subdominios. Por su parte las creencias influyen tanto en la selección como en el uso de los distintos tipos de ejemplos.

1. Introducción

En este capítulo se presenta una descripción general de los motivos que nos llevaron a abordar el estudio de las relaciones que se generan entre los conocimientos especializados movilizados por un profesor durante la selección y el uso de los ejemplos. Estos motivos emanaron principalmente de una revisión bibliografía sobre el conocimiento especializado, y el contexto a nivel de investigación en el área de la Educación Matemática.

Dado que la motivación es, probablemente, la parte más personal de esta investigación, el estilo que utilizaré en el primer apartado de este capítulo será la redacción en primera persona, a diferencia de la forma en que se redactará el resto del informe.

1.1. Motivación y contextualización

La elaboración de un primer artículo, como resultado de mi Trabajo Fin de Máster, me condujo a la revisión de distintas investigaciones sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este artículo abordaba la búsqueda de algunos elementos del conocimiento especializado que pueden considerarse claves para favorecer la construcción de las relaciones área-perímetro en estudiantes de primaria. Esta revisión me llevó a concluir que hay dos temas que gozan de gran relevancia entre los investigadores en Educación Matemática. Uno de ellos es la ejemplificación. Existe un gran interés por profundizar en el uso de ejemplos. En el estudio de las funciones, los usos y las posibilidades que ofrecen los ejemplos para abordar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Zaslavsky, 2019). Esto se debe, entre otras cosas, a que distintos investigadores han corroborado su relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figueiredo y Contreras, 2015; Goldenberg y Mason, 2008; Zaslavsky, 2008). Destacando la acción de ejemplificar como uno de los recursos docentes más utilizado por los profesores para la enseñanza de las matemáticas (Figueiredo y Contreras, 2013; Ng y Dindyal, 2015; Suffian y Abdul,2010).

El otro aspecto que despertó mi interés es el conocimiento especializado del profesorado, que, en el ámbito de la Educación Matemática, está orientado a identificar los conocimientos que usa el profesor en la práctica de enseñar matemáticas. Distintos investigadores concuerdan en que este conocimiento es de gran relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ball et al., 2005; Zakaryan et al., 2018), llegando a ser trascendental para la calidad del sistema educativo (Ma, 2010). Toda esta información orientó el propósito de la investigación hacia estas dos temáticas, abordando el estudio del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas asociado a la acción de ejemplificar.

De los distintos modelos de análisis que me permitían abordar el estudio del conocimiento del profesor que enseña matemáticas, seleccioné el modelo analítico Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas por dos razones. Por un lado, según sus autores, este modelo permite examinar, con fines analíticos, el contenido del conocimiento del profesor que enseña matemáticas (Carrillo et al., 2014). Por otro lado, en él, la ejemplificación ha sido reconocida como un escenario apropiado para el estudio del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas (Sosa et al., 2017).

La otra información que consideré relevante y que me ayudó a establecer el objetivo de la investigación fue que:

- si bien el modelo de análisis que seleccionamos permite dividir el conocimiento especializado del profesor en subdominios de conocimiento, esta división es solo para facilitar el análisis de la información. Las relaciones que se generan entre estos subdominios de conocimiento las que nos ayudan a alcanzar una comprensión más profunda del conocimiento especializado (Carrillo et al., 2018);
- y que tanto la selección como el uso de los ejemplos son consideradas como instancias desafiantes para los maestros y determinantes para el aprendizaje (Zodik y Zaslavsky, 2007a).

De esta forma, y para alcanzar una compresión profunda del conocimiento especializado asociado a la ejemplificación, me propuse estudiar las relaciones que se generaban entre los distintos conocimientos especializados movilizados por un profesor durante la selección y el uso de los ejemplos, instancias complejas para los profesores.

La selección del contenido matemático que fue considerada para esta investigación dependía de los contenidos que el profesor informante estuviera desarrollando durante las fechas en que realicé la recogida de información. Cuando comencé las grabaciones estaban trabajando los sistemas de ecuaciones, continuaron con las sucesiones numéricas y, al finalizar el periodo de grabación, comenzaron con la unidad de geometría. Seleccioné el contenido de sucesiones numéricas porque fue el único que pudo ser observado en su totalidad, lo que permitió obtener ejemplos de todo el proceso de enseñanza. De los primeros ejemplos que utilizaba para introducir cada concepto o fórmula, hasta los que utilizaba al finalizar la unidad para reforzar lo que habían estudiado de las sucesiones numéricas. Todo este proceso fue realizado en un tercer curso de educación secundaria en un colegio concertado de la ciudad de Huelva.

1.2. Enfoque y primera formulación del objetivo general de estudio

Según lo planteado por Carrillo et al. (2018), el análisis de las relaciones que se generan entre los subdominios de conocimientos nos permite obtener una compresión más profunda del conocimiento especializado del profesor. Entendiendo el conocimiento como "la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!" (Schoenfeld, 2010, p. 25). A esta perspectiva se une la consideración del conocimiento especializado del profesor como un conocimiento personal, contextualizado, integrado y complejo, práctico, dinámico y parcialmente tácito (Carrillo et al., 2014).

Los ejemplos nos ofrecen un escenario ideal para el estudio de este conocimiento especializado. Se constituyen como una herramienta didáctica de mediación cultural entre los estudiantes y los conceptos matemáticos, teoremas o técnicas (Goldenberg y Mason, 2008), y como uno de los recursos más utilzados por los profesores para la enseñanza de las matemáticas. En nuestra investigación entenderemos un ejemplo como un caso particular de algo (concepto, ecuación, patrón, ejercicio, problema, …) desde el cual se puede razonar, generalizar y evidenciar una particularidad de una determinada entidad matemática.

Nuestro objetivo de estudio es, por tanto, comprender cómo se relacionan los distintos subdominios de conocimiento movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar diferentes tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas en la Educación Secundaria. En este sentido, la observación de clases nos permite obtener registro de los distintos tipos de ejemplos utilizados por el profesor, e información de los distintos conocimientos especializados asociados a cada uno de los ejemplos. A la observación de las clases se suma la entrevista, instancia que nos permite indagar en los conocimientos que habrían operado en la selección de los ejemplos.

Para abordar esta cuestión, nos posicionamos desde el paradigma cualitativo interpretativo, desarrollando un estudio de caso instrumental. Con este caso buscamos profundizar en el estudio de las relaciones de conocimiento especializado, mediante la descripción, el análisis y la interpretación de la información que obtuvimos.

2. Marco Teórico

En este capítulo se describen los distintos pilares que dan sustento teórico a esta investigación y que nos permitirán identificar, analizar y describir las relaciones que se generan entre los subdominios de conocimiento movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas.

En este marco teórico abordamos el conocimiento profesional del profesor, el modelo analítico conocimiento especializado del profesor que enseña matemática (MTSK), el rol de los ejemplos en la educación y el estudio de las sucesiones numéricas a nivel de educación secundaria.

2.1. Conocimiento Profesional del Profesor

Schoenfeld (2010, p. 25) se refiere al conocimiento de un individuo como "la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!". Para Pajares (1992) el conocimiento se refiere a una amplia red de conceptos, imágenes y capacidades inteligentes que poseen los seres humanos y, según Ponte (1994), tanto las creencias como las concepciones formarían parte de él. De los dos elementos considerados por Ponte, las creencias tienen un papel relevante en el conocimiento pues, según Lewis (1990, citado por Pajares, 1992), en ellas encontramos las raíces que dan origen a todo el conocimiento. Por lo tanto, resulta imposible eludir la naturaleza entrelazada que existe entre creencia y conocimiento (Pajares, 1992). Tanto este autor, como Carrillo et al. (2014), han planteado que una de las diferencias que existe entre creencia y concepción tiene que ver con su naturaleza; para Carrillo et al. (2014) las creencias tienen su base en una componente efectiva y emocional, y las concepciones en la racionalización. En cambio, para Pajares (1992) las creencias corresponden a verdades personales derivadas de la experiencia o de la fantasía, y las concepciones a un marco organizativo de los conceptos y tienen una naturaleza cognitiva. Pero Carrillo et al. (2014) proponen no hacer diferencia explícita entre creencias y concepciones, especialmente al momento de profundizar en el estudio del conocimiento, en nuestro caso el conocimiento profesional del profesor, porque resulta de escasa utilidad, ya que tanto las concepciones como las creencias permean el conocimiento. La forma de entender el conocimiento por Schoenfeld y el papel de las creencias en su origen y evolución impregnan esta investigación. Desde esta perspectiva, abordamos ahora nuestra forma de entender conocimiento profesional.

Según Ponte (2012) todo conocimiento profesional tiene como base fundamental la experiencia y la reflexión que se realiza sobre dicha experiencia. Pero en el ámbito de la educación la base fundamental del conocimiento profesional no se limita a la experiencia y la reflexión. Autores como Shulman (2005) y Climent (2002) han planteado la influencia de otros elementos en el origen del conocimiento profesional del profesor. Para Shulman (2005) existen al menos cuatro fuentes principales: (a) la formación académica en la disciplina a enseñar; (b) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado; (c) la literatura educativa especializada; y d) la sabiduría adquirida con la práctica. Para Climent (2002), el origen del conocimiento profesional del profesor se encuentra en cuatro factores principales: (a) la cosmovisión o ideología; (b) la experiencia como discente; (c) la experiencia como docente; y (d) los saberes académicos que ha adquirido. De alguna manera, Carrillo et al. (2014), citando el trabajo de Climent (2005), presentan algunas características integradoras de estas perspectivas que se han asociado a la naturaleza del conocimiento profesional del profesor, estas son: personal, es propio de cada individuo, depende de sus concepciones, valores, actitudes y experiencias; contextualizado, se genera ligado a los distintos contextos profesionales; integrado y complejo, integra diversos saberes, constituyéndose como un sistema en el cual resulta complejo aislar los distintos elementos; práctico, se nutre de la reflexión teórica que el profesor hace sobre su práctica; dinámico, evoluciona constantemente, crece a través de las interacciones que se generan con los alumnos y por medio de las experiencias profesionales y personales; y parcialmente tácito, se desarrolla sobre todo a través de la experiencia.

El conocimiento profesional del profesor ha sido reconocido como un factor transcendental para la calidad de la enseñanza (Ball et al., 2005). Permite al profesorado decidir qué y cómo deben enseñar, qué tipo de representación elegir y cómo resolver los problemas generados al abordar un determinado contenido (Shulman, 1986). En la enseñanza de las matemáticas es reconocido como un factor de gran importancia al momento de promover el aprendizaje de los estudiantes (Zakaryan et al., 2018). Al plantear Shulman (1986) la existencia de este conocimiento profesional, exclusivo de los profesores, distinguió en él tres categorías: (a) conocimiento del contenido, (b) conocimiento didáctico del contenido, y (c) conocimiento del currículo. Después, al abordar el conocimiento base para la enseñanza, Shulman (2005) presentó siete categorías que formaban parte del conocimiento profesional del profesor: (a) conocimiento del contenido; (b) conocimiento didáctico general; (c) conocimiento del currículo; (d) conocimiento didáctico del contenido; (e) conocimiento de los alumnos; (f) conocimiento de los contextos educativos; y (g) conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. Concedía un interés particular el conocimiento didáctico del contenido, que definió como "esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los profesores" (Shulman, 2005, p. 11).

Por lo tanto, la importancia que hoy se le otorga al estudio del conocimiento profesional del profesor no es reciente. A finales de la década de los ochenta, Shulman (1987) planteaba que durante los siguientes 10 años parte importante de la agenda de investigación se centraría en los conocimientos prácticos de los profesores. Ello concuerda con lo observado por Climent (2019), hace más de tres décadas el conocimiento del profesor relacionado con la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de numerosas investigaciones.

En la Educación Matemática el conocimiento profesional está orientado, por encima de todo, a la actividad practica de enseñar matemáticas, distinguiéndose del conocimiento académico que poseen los investigadores en Educación Matemática (Ponte, 2012). Climent (2002) plantea que este conocimiento corresponde a la conjunción de los saberes y experiencias que un profesor posee y utiliza en el desarrollo de su labor docente, y se construye desde la formación inicial y durante toda la carrera profesional. Los trabajos presentados por Shulman se convirtieron en la base de distintos modelos que nos permiten estudiar este conocimiento. En la elaboración del modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, de sus siglas en inglés. Mathematical Knowledge for Teaching) se tomaron dos de los subdominios presentados por Shulman, el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido (Ball et al., 2008); en la elaboración de las categorías del Cuarteto del Conocimiento de Rowland et al. (2005) se consideraron algunas de las presentadas por Shulman: el conocimiento del contenido, el conocimiento del currículo y el conocimiento didáctico del contenido (Rowland et al., 2005); en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de Pino-Fan y Godino (2015) se recogen las ideas de Shulman en algunas de las facetas que forman parte de su Dimensión Didáctica; y el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés. Mathematics Teacher`s Specialised Knowledge), presentado por Carrillo y colaboradores, considera en sus dos dominios de conocimiento, conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido, las ideas presentadas por Shulman, junto a las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que, por su naturaleza, influye notoriamente en ambos subdominios (Carrillo et al., 2018).

Los autores del modelo MTSK comprenden que las creencias no son conocimiento (Montes, 2016), pero que sí existe una estrecha relación entre el conocimiento del profesor y sus creencias, de modo que las creencias inciden directamente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Escudero-Domínguez et al., 2016). Es por esto por lo que las creencias se consideran dentro del modelo como un subdominio que impregna tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del contenido matemático (Carrillo et al., 2019).

2.2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática MTSK

El modelo de análisis MTSK fue elaborado por el equipo del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, después de que algunos investigadores del grupo detectaran problemas analíticos de delimitación entre los subdominios del MKT presentado por Ball (Carrillo et al., 2013; Montes et al., 2013). En su diseño se tomaron como base los trabajos presentados por Shulman (Montes et al., 2013) y distintos modelos que buscaban caracterizar el conocimiento del profesor que enseña matemáticas (Carrillo, 2017), siendo el modelo presentado por Ball el principal referente (Carrillo et al., 2014). Según sus autores (Carrillo et al., 2018), este modelo se centra exclusivamente en los conocimientos del profesor de matemáticas que están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, excluyendo las áreas de conocimiento profesional que tienen en común con profesores de otras asignaturas. Mantiene la separación entre dos dominios de conocimientos presentada por Shulman (Carrillo et al., 2014). Utilizando una separación similar a la propuesta en el MKT, en la cual se considera el conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés. Pedagogical Content Knowledge) y el conocimiento de la materia (SMK, por sus siglas en inglés. Subject Matter Knowledge) (Ball et al., 2008). Renombrando el SMK como conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés. Mathematical Knowledge) para ser coherentes con la idea de un modelo que se centra exclusivamente en el profesor que enseña matemáticas (Montes et al, 2013). En cada dominio de conocimiento se identificaron tres subdominios, los cuales emergen de las propias matemáticas y de los componentes de su enseñanza y/o aprendizaje: conocimiento de los tópicos (KoT, por sus siglas en inglés. Knowledge of Topics), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, por sus siglas en inglés. Knowledge of the Structure of Mathematics) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM, por sus siglas en inglés. Knowledge of Practices in Mathematics) en el MK. Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM, por sus siglas en inglés. Knowledge of Features of Learning Mathematics), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés. Knowledge of Mathematics Teaching) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, por sus siglas en inglés. Knowledge of Mathematics Learning Standards) en el PCK (Carrillo et al., 2018).

Con respecto a las creencias, Escudero-Domínguez et al. (2016) han planteado que estas han formado parte del modelo MTSK desde sus inicios, y que fueron presentadas junto con las concepciones, pero no ha sido el propósito de las investigaciones realizadas con el modelo MTSK hacer distinciones entre creencias y concepciones. Como se ha mencionado anteriormente, esto se debe a que resulta de escasa utilidad realizar diferencias explícitas entre creencias y concepciones cuando el objeto de estudios es el conocimiento profesional, al cual ambos permean (Carrillo et al., 2014).

En el seno del modelo MTSK, los investigadores entienden que las creencias no corresponden a conocimiento, pero al tener ambas, creencia y conocimiento, una naturaleza muy parecida, resulta coherente considerarlas dentro de un modelo de análisis de conocimiento profesional (Montes, 2016). En el MTSK se consideran las creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2018), diferenciando entre dos tipos de creencias, las que tienen una naturaleza ligada al dominio matemático y las que tienen una naturaleza ligada al dominio didáctico del contenido (Montes, 2016), ambas representan una predisposición a través de las acciones, pero no pueden ser directamente observadas o medidas, solo inferidas (Carrillo et al., 2014). Han llegado a ser consideradas como un "tercer dominio" del modelo (Carrillo et al., 2018), en el cual se podría incluir: la filosofía sobre la matemática escolar, creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje; concepciones acerca de conceptos; actitudes hacia las matemáticas; y afectos hacia las matemáticas (Montes, 2016). Son representadas en el centro del esquema del MTSK para indicar que las creencias que posee el profesor acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje permean el conocimiento que posee en cada uno de los subdominios (Carrillo et al., 2014).

Según Carrillo et al. (2014), autores del MTSK, este modelo se preocupa de examinar, con fines analíticos, cuál es el contenido del conocimiento del profesor que enseña matemáticas. Los autores parten del supuesto de que los profesores necesitan un conocimiento específico para desarrollar su labor docente (Carrillo et al., 2018), y su objetivo al emplear este modelo, para analizar este conocimiento, es comprender e interpretar más que evaluar (Carrillo et al., 2018; Montes et al., 2013). Comprender qué conocimientos tiene un profesor en particular o necesitan en general los profesores (Carrillo et al., 2014). Adoptando de esta forma un enfoque analítico con el claro propósito de profundizar en el conocimiento especializado del profesor, especialmente en los elementos que forman este conocimiento y en las interacciones entre ellos, posicionándose como una herramienta que nos permite aproximarnos a la complejidad del conocimiento de los profesores (Carrillo et al., 2018). Este modelo se ha posicionado como una herramienta de sistematización, pues los seis subdominios que forman parte del modelo nos permiten separar y caracterizar de manera profunda el conocimiento profesional que posee el profesor y establecer posibles relaciones y repercusiones entre los distintos subdominios del conocimiento (Carrillo et al., 2014).

Los autores del modelo han adoptado dos definiciones de conocimiento, la de Pajares (1992) y la de Schoenfeld (2010), dadas al principio del epígrafe anterior. Según Carrillo et al. (2014), estas definiciones son totalmente compatibles ya que ambos autores enfatizan en la utilidad del conocimiento, Pajares habla de "posesión útil" y Schoenfeld de "información disponible".

En este modelo, sus autores entienden el conocimiento especializado del profesor de matemática como aquel conocimiento que necesita el profesor para desarrollar su labor docente, es decir, el conocimiento que deriva de su profesión (Montes et al., 2013), y asumen algunas de las características que posee el conocimiento especializado del profesor como su carácter personal, contextualizado, integrado y complejo, práctico, dinámico y parcialmente tácito (Climent, 2005). La comprensión de este conocimiento en el modelo MTSK sigue la línea de los trabajos presentados por Shulman durante los años 1986 y 1987, respecto a la especificidad del conocimiento profesional del profesor y a la distinción entre el conocimiento del contenido de la materia a enseñar (MK en el modelo) y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar (PCK en el modelo) (Carrillo et al., 2014). Con respecto al MK, en el modelo, se asume que el conocimiento matemático que necesitan los profesores para enseñar matemáticas es diferente al que se necesita en cualquier otra profesión o en la vida diaria. Este conocimiento corresponde a una compresión profunda de los contenidos matemáticos y de su enseñanza y aprendizaje, esto es lo que le confiere su carácter de conocimiento especializado (Carrillo et al., 2014). Según Carrillo et al. (2014), en el dominio del conocimiento matemático (MK) debemos considerar el conocimiento que el profesor tiene de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar. Este dominio se ocupa de los fenómenos que implican conceptos y procedimientos matemáticos, como sus diferentes registros de representación, la forma en que se definen o transforman, su sintaxis y la estructura o estructuras matemáticas en las cuales los conceptos matemáticos están incrustados o conectados entre sí (Carrillo et al., 2018). Y en el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) debemos considerar los conocimientos sobre el contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018).

Para cada dominio, como se ha dicho, los autores del modelo establecieron tres subdominios de conocimiento. El objetivo de esta descomposición era generar una herramienta útil para propósitos analíticos, pero sin olvidar el carácter integrado del conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2014). También se han establecido categorías para cada uno de los subdominios, un trabajo de interiorización y refinamiento que permite al investigador centrarse en los elementos del conocimiento que son útiles para el profesor al momento de desarrollar la labor de enseñar matemáticas (Carrillo et al., 2014).

Con el fin de favorecer el grado de confianza de la interpretación que se realiza de la información obtenida para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, surgieron las nociones de evidencia, indicio y oportunidad (Carrillo, 2017). Según Escudero-Ávila et al.

(2016), una evidencia de conocimiento corresponde a aquellos elementos que nos permiten afirmar si un profesor posee, o no, un determinado conocimiento. Los indicios de conocimientos son sospechas de la existencia o no existencia de un determinado conocimiento, generadas por alguna acción o declaración del profesor, indican que se requiere más información para convertirse en evidencia. Las oportunidades de investigación corresponden a momentos o situaciones generadas por el profesor o la dinámica de clase, las cuales nos permiten profundizar en cualquier subdominio de conocimiento del modelo, independiente del subdominio que se haya identificado previamente en la unidad de análisis.

Según Sosa et al. (2017), miembros del Seminario de Investigación en Didácticas de las Matemáticas, la ejemplificación nos brinda un escenario apropiado para estudiar el MTSK, ya que nos puede informar sobre el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de la práctica matemática de un profesor. Esto implica que el conocimiento relacionado con el uso de ejemplos no se puede ubicar de forma exclusiva en ninguno de los subdominios del modelo.

2.2.1. Conocimiento Matemático (MK)

Como se ha mencionado previamente, este dominio está compuesto por tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM), los cuales le dan sentido al conocimiento matemático (Carrillo et al., 2018), referido al conocimiento que el profesor posee de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar (Carrillo et al., 2014). Según Carrillo (2017) este dominio corresponde al conocimiento relacionado con las matemáticas que cada profesor utiliza o necesita en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

2.2.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)

Corresponde al conocimiento que el profesor posee acerca de los usos y las aplicaciones de un tema matemático (Vasco et al., 2016), entendiendo como tema los contenidos provenientes de las distintas áreas de conocimiento matemático: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidades, y funciones y gráficas, los cuales se relacionan entre sí y puede variar de acuerdo con el plan de estudio de cada país (Carrillo et al., 2014). Este subdominio nos permite describir qué y cómo conoce un profesor de matemáticas los temas que enseña, e implica un conocimiento más profundo, formal y riguroso que el que se espera que aprendan los estudiantes (Carrillo et al., 2018).

En una primera instancia se establecieron cinco categorías para este subdominio: fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos (Carrillo et al., 2014; Escudero-Domínguez et al., 2016). Pero en los últimos trabajos se presenta compuesto por cuatro categorías:

- procedimientos, categoría en la que se considera el conocimiento que posee el profesor sobre los procedimientos relacionados con un determinado tema, es su conocimiento sobre ¿cómo se hace?, ¿cuándo puede hacerse?, ¿por qué se hace así? y las características del resultado;
- definiciones, propiedades y sus fundamentos, que corresponde al conocimiento utilizado para describir o caracterizar un concepto y para llevar a cabo un proceso, así como el conocimiento sobre las propiedades de un objeto matemático;
- registros de representación, que es el conocimiento sobre las distintas formas en que se puede representar un determinado tópico (grafico, algebraico, aritmético, lenguaje formal, etc.);
- y fenomenología y aplicaciones, que corresponde al conocimiento que el profesor posee sobre los usos y las aplicaciones de un tópico matemático, el cual puede servir para generar conocimiento matemático (Carrillo et al., 2018; Vasco et al., 2017).

El conocimiento que un profesor posee sobre las distintas aplicaciones que pueden tener las sucesiones en la vida diaria forma parte de este dominio, y corresponde a la categoría de fenomenología y aplicaciones. Al igual que el conocimiento sobre cómo se va construyendo una sucesión, también forma parte de este subdominio, pero pertenece a la categoría procedimientos.

2.2.1.2. Conocimiento de la estructura de las Matemáticas (KSM)

Según Carrillo et al. (2018), en el MTSK se distingue entre conexiones intraconceptuales e interconceptuales. Las conexiones intraconceptuales se desarrollan en torno a un único concepto y están consideradas en el KoT como parte de las propiedades y sus fundamentos. Las conexiones interconceptuales son consideradas en este subdominio, el KSM, junto con las conexiones temporales, las que destacan el rol que juegan los temas matemáticos en la construcción de otros temas, y pueden estar asociadas a un aumento o simplificación de la complejidad. Vasco et al. (2017) establecieron algunas preguntas que nos pueden ayudar a determinar si una conexión corresponde al KSM o al KoT y a cuál categoría del KSM correspondería. Estas preguntas se pueden utilizar en la entrevista orientada a aclarar los indicios de conocimiento observados, y buscan evidenciar el conocimiento que el profesor posee sobre la forma en que un determinado tema favorece la compresión de otro, por ejemplo ¿El profesor conoce que el tema 1 posibilita la construcción del tema 2? o ¿El profesor conoce que el tema 1 puede ser utilizado para resolver algo en el tema 2?

Por lo tanto, el KSM comprende el conocimiento del profesor sobre las conexiones entre elementos matemáticos, considerando solo las conexiones interconceptuales, y está compuesto por cuatro categorías:

- conexiones de complejización, corresponde al conocimiento que permite al profesor relacionar el contenido que está abordando con contenidos que debe desarrollar posteriormente, evidencia el conocimiento de un tema o concepto desde una perspectiva avanzada;
- conexiones de simplificación, a diferencia de la anterior, esta categoría considera el conocimiento que permite al profesor relacionar el tema que está abordando con contenidos vistos previamente, evidencia el conocimiento de un tema o concepto desde una perspectiva más elemental;
- conexiones transversales, corresponde al conocimiento que posee el profesor sobre contenidos que tienen una cualidad en común que los relaciona, esto es, una característica común en su naturaleza o en el modo de pensamiento asociado a dichos contenidos;
- y conexiones auxiliares, considera el conocimiento que permite al profesor valerse de un concepto o tema diferente al que está abordando, el cual le permite añadir un elemento adicional que aporta al tema central (Montes y Climent, 2016; Vasco et al., 2017).

Son ejemplos de este subdominio el conocimiento que un profesor posee sobre las tablas de multiplicar como un contenido que puede favorecer la comprensión de la construcción del término general de una sucesión. El profesor utiliza la secuencia numérica correspondiente a la tabla del dos 2, 4, 6, 8, … con el propósito de que los estudiantes obtengan la expresión que les permita obtener cualquier término de la tabla del dos. Y el conocimiento de las sucesiones no numéricas como una herramienta que permite potenciar la compresión de la función del término general de una sucesión. El profesor presenta la sucesión  para mostrar a los estudiantes que es necesario conocer la regla que está detrás de esta sucesión antes de continuar con la construcción de los términos. Este conocimiento corresponde a la categoría conexiones de simplificación y el anterior a la categoría conexiones auxiliares.

2.2.1.3. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

En el KPM la práctica matemática es entendida como cualquier actividad matemática que se realiza de manera sistemática, la cual representa un pilar en la creación matemática y tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas matemáticas. Esta práctica implica, entre otras cosas, que el profesor de matemáticas conozca las características de una demostración, de los procesos para justificar y definir; sepa hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos. Según Carrillo et al. (2018), en el MTSK el conocimiento de la práctica matemática se centra específicamente en los conocimientos que el profesor posee en relación con los medios de producción y de funcionamiento matemático, pudiendo ser un conocimiento de la práctica matemática general o especifico. El KPM general corresponde al conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto un ejemplo sería conocer formas de validación y demostración. El KPM especifico corresponde a una instancia particular del KPM general asociado a las peculiaridades de un tema en particular. Se evidencia por ejemplo cuando el profesor trabaja con un rectángulo de medidas 2u y 8u y otro de 5u y 4u para demostrar que, en el caso de los rectángulos, mayor perímetro no implica mayor área. Otro ejemplo es, presentar una cantidad de progresiones aritméticas, incluyendo crecientes y decrecientes, tal que permiten concluir que en este tipo de progresión todos los términos, excepto el primero, se obtienen sumando una misma cantidad al término anterior, lo cual permite validar la definición de progresión aritmética.

Flores-Medrano y Aguilar-González (2017) presentaron dos formas de organizar este subdominio; en una de ellas, se consideraba una categorización que establecía una categoría para cada una de las practicas matemáticas que se identificaban. Un problema que se observó en esta forma de organizar el subdominio fue el solapamiento de categorías. La otra forma de organizar este subdominio, presentada por estos autores, sugiere el uso de indicadores específicos, sin categorizar, y corresponde a la forma en la que actualmente se organiza el KPM, estos indicadores específicos son: a) Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; b) formas de validación y demostración; c) papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; d) procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; e) prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); y f) condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (Flores-Medrano y Aguilar-González, 2017). Esta última forma será la que utilizaremos para organizar el KPM.

Un ejemplo de este subdominio de conocimiento se da cuando un profesor recurre al uso de contraejemplos para mostrar el error que están cometiendo los estudiantes al plantear el término general de una sucesión. Se presenta la sucesión 3, 5, 7, 9, 11, 13, … y los alumnos proponen $a_n + 2$ como término general, el profesor les pide que obtengan el segundo término de la sucesión por medio del término general que han elaborado para validar (o no) la pertinencia del término general que han propuesto.

2.2.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Como ya se ha mencionado, este dominio, al igual que el anterior, está compuesto por tres subdominios: conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Según Carrillo et al. (2018), el PCK está relacionado con las propias matemáticas más que con la intersección entre conocimiento matemático y pedagógico en general. Corresponde a aquellos conocimientos pedagógicos en los cuales el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, descartando los conocimientos pedagógicos generales aplicados a contextos matemáticos (Carrillo et al., 2014).

2.2.2.1. Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)

Según Carrillo et al. (2018), en este subdominio se considera el conocimiento que posee el profesor sobre las formas que tienen sus alumnos de proceder y razonar en matemáticas; se centra, principalmente, en el conocimiento asociado a las características propias del aprendizaje derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático, enfocándose en el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Las principales fuentes de información de los profesores relacionadas con el conocimiento considerado en este subdominio son la experiencia que han acumulado a lo largo del tiempo junto con los resultados que se han obtenido en la investigación en educación matemática (Carrillo et al., 2018).

Este subdominio está compuesto por cuatro categorías:

- teorías de aprendizaje, esta categoría considera el conocimiento que posee el profesor de teorías sobre el desarrollo cognitivo de los estudiantes respecto a las matemáticas en general o a contenidos específicos, teorías que pueden ser tanto personales como institucionalizadas;

- fortalezas y dificultades; en dificultades se considera el conocimiento que el profesor prosee sobre las dificultades asociadas al aprendizaje del contenido matemático en general y específico, por ejemplo conocimiento sobre errores, obstáculos y dificultades relacionadas con los procesos de aprendizaje, y sobre concepciones, ideas o imágenes inadecuadas o erróneas que poseen los estudiantes en relación con algún contenido, mientras que en fortalezas se considera el conocimiento de las características asociadas a la naturaleza matemática de un contenido en particular que pueden facilitar el proceso de aprendizaje;
- formas de interacción con un contenido matemático, que corresponde al conocimiento sobre las diferentes formas en que los estudiantes interactúan con los contenidos matemáticos, por ejemplo, a los procedimientos o estrategias que utilizan al hacer matemáticas, tanto los típicos como los no habituales, y a las terminologías utilizadas al abordar un determinado contenido;
- y aspectos emocionales, esta última categoría considera el conocimiento que el profesor posee sobre las expectativas, los intereses y las motivaciones de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila et al., 2016).

Corresponden a este subdominio el conocimiento que posee un profesor sobre la motivación que provoca en los estudiantes tomar conciencia de la utilidad que tienen las sucesiones en la vida diaria, como la predicción de fenómenos naturales, y el conocimiento sobre el error que comenten algunos estudiantes al confundir el valor de un término con su posición. El primer caso corresponde a la categoría aspectos emocionales y el segundo a la categoría fortalezas y dificultades.

2.2.2.2. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Según Carrillo et al. (2018), este subdominio considera el conocimiento de teorías personales e institucionalizadas sobre la enseñanza de las matemáticas, teorías que pueden estar sustentadas en investigaciones sobre educación matemática, en la experiencia personal del profesor y en la reflexión que realiza sobre su propia práctica docente. Se incluye en este subdominio el conocimiento que el profesor posee sobre los ejemplos apropiados para cada contenido y contexto, y su conocimiento sobre el potencial que tienen para la enseñanza los recursos, los materiales y los modos de presentar un contenido (Carrillo et al., 2014). En el KMT no se trata el conocimiento matemático por un lado y el pedagógico por otro, sino que se consideran solo aquellos conocimientos en los que el contenido matemático condiciona la enseñanza (se excluye, por ejemplo, el conocimiento sobre estrategias de enseñanza que pueden resultar potentes desde una visión de la pedagogía en general, como el trabajo en equipo) (Carrillo et al., 2014).

Este subdominio está compuesto por tres categorías:

- teorías de aprendizaje, donde se considera el conocimiento que el profesor posee sobre el potencial de las actividades, estrategias y técnicas para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos y sobre las posibles limitaciones y obstáculos que pueden surgir durante su uso;
- recursos materiales y digitales, aquí se incluye el conocimiento crítico de los recursos y materiales didácticos, como libros de texto, recursos tecnológicos, pizarra digital, recursos manipulativos, etc.; en esta categoría se va más allá de su mero conocimiento, corresponde al conocimiento de cómo estos recursos pueden mejorar la enseñanza de un tema concreto, junto con sus posibles limitaciones;
- y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, se incluye en esta categoría el conocimiento sobre las potencialidades, los obstáculos y las limitaciones de las distintas formas en que el profesor puede abordar, de forma intencionada, la enseñanza y la representación (por ejemplo, mediante metáforas, situaciones o explicaciones) de contenidos matemáticos específicos (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila et al., 2016).

Corresponde a este subdominio el conocimiento que posee un profesor sobre el obstáculo didáctico que genera la sucesión $-2, -4, -6, -8, \ldots$ para abordar las sucesiones decrecientes, puede provocar que se asocien las sucesiones decrecientes a los números negativos. El conocimiento sobre cómo el uso de cuadriculas favorece el aprendizaje de las relaciones área y perímetro de los rectángulos, también corresponden a este subdominio. El primer conocimiento que se describe corresponde a la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y el segundo a recursos materiales y virtuales.

2.2.2.3. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS)

En el modelo MTSK, los estándares de aprendizaje corresponden a los distintos instrumentos diseñados para medir, en cualquier etapa de la escolarización, el nivel de comprensión, construcción y uso de las matemáticas de los estudiantes. Entre estos instrumentos se consideran las especificaciones curriculares oficiales y las no oficiales (por ejemplo, especificaciones curriculares de otros países) y la literatura de investigación (Carrillo et al., 2018). Por lo tanto, en este subdominio se considera el conocimiento que permite al profesor adoptar una postura crítica y reflexiva sobre lo que el estudiante puede y debe aprender en un determinado nivel escolar (Carrillo et al., 2014).

Este subdominio está compuesto por tres categorías:

- resultados de aprendizaje esperados, donde se considera el conocimiento sobre las capacidades matemáticas específicas que se deben desarrollar en los estudiantes en los distintos niveles escolares, este conocimiento deriva principalmente de las especificaciones curriculares;
- nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, que corresponde al conocimiento sobre la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un ciclo escolar determinado;
- y secuenciación de temas, esta última categoría considera el conocimiento sobre lo que los estándares indican que se debe conocer antes de abordar un determinado contenido, o lo que este nuevo contenido puede aportar a temas posteriores. Es un conocimiento sobre la secuenciación de los diversos temas matemáticos correspondientes a un mismo curso o con cursos anteriores, implica un conocimiento de las capacidades y conocimientos previos de los estudiantes (Carrillo et al., 2018; Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

El que un profesor sepa que en tercer año de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) los estudiantes deben ser capaces de identificar progresiones aritméticas y geométricas, y expresar su término general; y que el aprendizaje de las sucesiones se puede favorecer con el conocimiento y las habilidades que los estudiantes han desarrollado en torno al trabajo previo con patrones, son conocimientos que forman parte de este subdominio. El primero corresponde a la categoría resultados de aprendizajes esperados y el segundo a la categoría secuenciación de temas.

2.2.3. Relaciones entre subdominios

Si bien el modelo MTSK nos permite diseccionar analíticamente el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en seis subdominios, es preciso señalar que esta división solo pretende favorecer el estudio detallado del conocimiento del profesor de matemáticas, sin olvidar el carácter integrado que este posee (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016). En esta misma línea, Carrillo et al. (2014) han planteado que esta división no solo nos permite profundizar en cada uno de los subdominios de conocimiento, sino también establecer relaciones entre los distintos subdominios. Delgado y Espinoza (2021) describieron y ejemplificaron los distintos tipos de relaciones: relaciones al interior de un subdominio (relaciones intra-subdominios), entre subdominios de un mismo dominio de conocimiento (relaciones intra-dominios), y entre subdominios de los dos dominios de conocimiento (inter-dominios). Según Carrillo et al. (2018), estas relaciones, entre subdominios, nos permitirán obtener una comprensión más profunda del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Distintos autores concuerdan en que indagar en el estudio de estas relaciones nos ayuda a visualizar la complejidad de los distintos subdominios de conocimiento y del conocimiento especializado del profesor (Carrillo et al., 2014; Zakaryan et al., 2018; Zakaryan y Ribeiro, 2016). Las relaciones entre subdominios también nos permiten obtener evidencias de un MTSK más rico (Carrillo et al., 2014) y, por lo tanto, ampliar nuestra compresión sobre el conocimiento especializado de los profesores que enseñan matemáticas (Delgado y Espinoza, 2021).

De esta forma, las relaciones que se generan entre los distintos subdominios del modelo corresponden a un tema de gran relevancia en el ámbito del estudio del MTSK. Situación que ha quedado de manifiesto en los desafíos y las perspectivas de investigación declaradas en las actas de los últimos tres congresos sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En las actas del año 2017 se establece entre los desafíos de investigación la necesidad de profundizar en las relaciones entre los subdominios (Carrillo, 2017), en las actas del congreso del año 2019 se considera entre los desafios de investigación propuestos el mejorar la imagen de las relaciones entre subdominios (Carrillo, 2019), y en las actas del V congreso, realizado el año 2021 se consideran las relaciones entre los subdominios del PCK, entre las perspectivas de investigación del MTSK (Carreño, Escudero-Avila y Estrella, 2021).

2.3. Los ejemplos en la educación

Los ejemplos han tenido una estrecha relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje y con el conocimiento de los profesores. Shulman (1986), desde el momento en que establece la existencia de un conocimiento específico de los profesores, concede a los ejemplos, las metáforas y las analogías gran relevancia, los incluye en el conocimiento didáctico del contenido, y los considera como una de las formas más útiles al momento de representar alguna idea con el propósito de hacerla comprensible para otros. Por su parte, Zaslasvsky (2019) plantea que actualmente los ejemplos gozan de una creciente atención gracias al papel central que juegan en la enseñanza y el aprendizaje. La importancia de los ejemplos en estos procesos ha sido analizada por distintos investigadores. Para Zaslavsky et al. (2006) y Zaslavsky (2010) los ejemplos juegan un rol muy importante en el aprendizaje y constituyen la base de la generalización, la abstracción y el razonamiento analítico. Pedemonte y Buchbinder (2011) consideran que un ejemplo se convierte en portador de una idea abstracta solo cuando alguien lo percibe como una instancia general más allá de lo particular, y es esta característica la que provoca que los ejemplos sean tan importantes. Ng y Dindyal (2015) plantean que los ejemplos deben vincularse a los conocimientos previos de los estudiantes y despertar en ellos su pensamiento e interés.

Los ejemplos tienen un papel crucial en los procesos cognitivos asociados a cómo formamos los conceptos y las conjeturas en nuestra mente (Vinner, 2011), pero esto no implica que cualquier ejemplo nos permita formar un determinado concepto o conjetura con la misma precisión. Según Zaslavsky (2019), los estudios que abordan la formación de conceptos destacan el papel de los ejemplos cuidadosamente seleccionados y secuenciados para respaldar la construcción de imágenes conceptuales. En este sentido, es importante destacar que el ejemplo que se seleccione para abordar un determinado concepto debe cumplir con todos los requisitos de su definición, no basta con que considere la mayoría de los requisitos (Leikin y Zazkis, 2010). Esta idea cobra aún mayor relevancia si consideramos lo planteado por Zazkis et al. (2008), quienes observaron que las imágenes conceptuales de los estudiantes están influenciadas por los ejemplos a los que han sido expuestos. Por su parte Vinner (2011) identifica a los ejemplos como un recurso utilizado habitualmente, a lo largo de toda la educación formal, para aclarar el significado de los nuevos conceptos.

2.3.1. El uso de ejemplos para la enseñanza de las matemáticas

El término ejemplo ha sido analizado en la literatura desde dos perspectivas, una matemática y otra psicológica. Desde la perspectiva matemática, un ejemplo a menudo ha sido considerado como un objeto que satisface determinadas condiciones o como un representante de un grupo (Zaslavsky, 2019). Muestras de esto son las definiciones presentadas por Zodik y Zaslavsky (2008), quienes se refieren a un ejemplo como un caso particular desde el cual se puede razonar y generalizar; y la presentada por Watson y Mason (2006), según los cuales el término ejemplo hace referencia a cualquier cosa a partir de la cual un alumno puede generalizar. En esta misma línea, Ng y Dindyal (2015) observaron que los investigadores generalmente se refieren a un ejemplo como una ilustración que representa a un conjunto más amplio.

Apoyándonos en estas definiciones, en nuestro trabajo consideramos que un ejemplo es un caso particular desde el cual se puede razonar, generalizar y evidenciar una particularidad de una entidad matemática.

En la última década se ha observado un creciente interés por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática por profundizar en las funciones, los usos y las posibilidades de los ejemplos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles académicos (Zaslavsky, 2019). Aunque debemos recordar que la importancia de los ejemplos en estos procesos ha estado presente a lo largo de la historia, Sinclair et al. (2011) afirman que la enseñanza de las matemáticas siempre se ha basado en el uso de ejemplos. Actualmente, los ejemplos matemáticos son considerados como uno de los principales recursos docentes para la enseñanza de la disciplina escolar (Pascual y Contreras, 2018).

Distintos trabajos de investigación en educación matemática nos han permitido obtener evidencia del rol que juegan los ejemplos en la enseñanza de las matemáticas. Los ejemplos constituyen una parte fundamental de una buena explicación, son un componente básico para una buena enseñanza (Leinhardt 2001, citado por Knutha et al., 2019). Corresponden al principal medio por el cual las definiciones adquieren su significado, ya que la sola presentación de la definición no es suficiente para que los alumnos logren comprender y aplicar el concepto (Figueiredo y Contreras, 2015), y son considerados como una herramienta de mediación cultural entre los estudiantes y los conceptos matemáticos, teoremas y técnicas. Corresponden, por lo tanto, a un medio importante para hacer contacto con ideas abstractas (Goldenberg y Mason, 2008). Zaslavsky (2008) observó que la construcción de una explicación para la enseñanza de un determinado tema depende en gran medida del ejemplo que se seleccione. Según este autor, desde una perspectiva matemática, un ejemplo debe satisfacer ciertas condiciones, dependiendo de lo que se pretenda demostrar; mientras que, desde una perspectiva pedagógica, el ejemplo debe transmitir el mensaje que se desea entregar.

Otro elemento que debemos considerar al hablar de la importancia de los ejemplos en la enseñanza de las matemáticas es el gran uso que hacen los profesores de este recurso. El uso de ejemplos por parte de los profesores es una práctica muy común en las clases de matemáticas (Ng y Dindyal, 2015). Figueiredo y Contreras (2013) plantean que los ejemplos corresponden a un recurso que todos los profesores de matemáticas utilizan para enseñar contenido matemático, y según Suffian y Abdul (2010) son utilizados por los profesores para explicar y dar comprensión matemática a sus estudiantes durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. El problema radica en que los ejemplos no solo se han posicionado como la principal fuente de aprendizaje, sino también como la principal fuente de confusión para los estudiantes (Mason, 2011), y los profesores son conscientes de esto. Según Figueiredo y Contreras (2013), los profesores saben que el aprendizaje correcto de los conceptos depende en gran medida de la elección y el uso que hagan de los ejemplos, instancias que han sido consideradas como las más relevantes y las más complejas, para los profesores, al momento de trabajar con ejemplos (Zodik y Zaslavsky, 2007b).

2.3.2. Transparencia y variación de los ejemplos

La transparencia y la variación son dos elementos que se deben tener presentes al momento de seleccionar y utilizar ejemplos para abordar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. La transparencia hace referencia a que el ejemplo debe representar aquello que queremos mostrar. Según Figueiredo y Contreras (2015) un ejemplo transparente es aquel que no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que se busca ejemplificar a diferencia de un ejemplo opaco, el cual enfatiza algunos aspectos de la idea o estructura atenuando otros, generalmente los esenciales. Según Zaslavsky (2008) un ejemplo transparente debe fomentar la generalización resaltando las características específicas necesarias que lo constituyen como un ejemplo del caso; mientras que la idea de variación deriva de la teoría de variación de Marton la cual señala que, si un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro, o los otros, se mantienen invariantes, se observará el aspecto cambiante. La parte del fenómeno o evento que varía es denominada dimensión de variación (Marton y Booth, 1997). Mason y Watson (2005 citado por Figueiredo y Contreras, 2013) ampliaron el concepto de dimensión de variación al de Dimensión de Variación Posible para indicar que diferentes personas pueden identificar diferentes aspectos que pueden variar, por lo tanto, la variación en la ejemplificación corresponde a los distintos aspectos (dimensiones de variación posible) del ejemplo que se pueden variar sin que el ejemplo deje de ejemplificar el concepto inicial (Figueiredo y Contreras, 2015). Para Goldenberg y Mason (2008) y Watson y Chick (2011) la variación en los ejemplos ayuda a los estudiantes a diferenciar las características esenciales de las incidentales. Los estudiantes solo podrán discernir nuevas características si existen cambios, y solo habrá variaciones si existe algo que a nuestra percepción se mantenga (relativamente) invariante (Figueiredo y Contreras, 2015).

Para Figueiredo y Contreras (2015) la unión que existe entre la transparencia y la variación de los ejemplos facilita que los alumnos generalicen y abstraigan los conceptos. Esto se debe a que la transparencia de la ejemplificación es importante para que los estudiantes vean la variación y la variación es fundamental para la percepción de para qué es transparente la representación (Figueiredo y Contreras, 2013).

2.3.3. Clasificaciones de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas

En la literatura podemos encontrar diferentes tipos de clasificaciones asociadas al uso de los ejemplos para la enseñanza de las matemáticas, en estas clasificaciones se categoriza a los ejemplos en base a distintos aspectos, como veremos a continuación.

Las clasificaciones presentadas por Michener (1978) y Figueiredo et al. (2007) nos permiten agrupar los ejemplos según la función que cumplen. Michener (1978) los categoriza según la función que cumplen durante la comprensión, distinguiendo entre cuatro clases no necesariamente disjuntas entre ellas: (a) ejemplos iniciales, estos ejemplos nos ayudan a iniciarnos en un nuevo tema motivando definiciones y resultados básicos, e intuiciones útiles; (b) ejemplos de referencias, son ejemplos a los que se hace referencia una y otra vez, son básicos, ampliamente aplicables y proporcionan un punto de contacto común a través del cual se vinculan muchos resultados y conceptos; (c) ejemplos de modelo, son indicativos del caso general con una estructura flexible y manipulable, para poder ajustarse a las características específicas de un problema; y (d) contraejemplos, corresponden a los ejemplos que nos permiten demostrar que una afirmación no es cierta.

Por su parte Figueiredo et al. (2007) elaboraron una categorización tomando como base el proceso que observaron en la adquisición del esquema conceptual de función, identificando cinco categorías relacionadas con la función que cumplían los ejemplos en este proceso:

- ejemplos de definición, son los ejemplos que se presentan inmediatamente después de la definición o a un grupo de ejemplos que se presentan antes de la definición con el propósito de manifestar las características necesarias para que los estudiantes establezcan la definición;
- ejemplos de representación, corresponde a los ejemplos que permiten los primeros contactos autónomos de los estudiantes con el concepto de estudio, los primeros ejercicios o problemas;
- ejemplos de características, son los ejemplos que surgen después de la fase exploratoria, ayudan a los estudiantes a superar las dificultades y a aclarar las dudas;

- ejemplos de aplicaciones internas, corresponden a ejemplos que involucran el tema que se está desarrollando con contenidos o conceptos que se han desarrollado o se desarrollarán posteriormente;
- y ejemplos de aplicaciones externas, se refiere a ejemplos de aplicaciones del tema en contextos de la vida real y en otras ciencias.

Las clasificaciones presentadas por Chick y Harris (2007) y Karaagac (2004) nos permiten clasificar los ejemplos según quién interactúa con ellos. En su propuesta, Chick y Harris (2007) diferencian los ejemplos según quién lo utiliza y con qué propósito, distinguiendo tres categorías: a) ejemplos dirigidos por los profesores, se consideran aquí contraejemplos y ejemplos como ilustraciones con énfasis conceptual o procedimental; b) ejemplos como ejercicio o tarea de los estudiantes, pueden ser ejercicio o tarea solo como rutina, o como rutina pero con la finalidad de generar un conflicto cognitivo, y tareas no rutinarias que buscan extender o profundizar la comprensión; y c) ejercicios usados anteriormente, estos ejemplos correspondientes a ejercicios reutilizados por el profesor o los estudiantes para proporcionar más modelos o explicaciones con énfasis conceptual o procedimental. Y Karaagac (2004), en su trabajo sobre los tipos de ejemplos utilizados por los profesores, identificó dos categorías de ejemplos, asociadas a quién interactuaba con ellos: a) ejemplos pasivos, corresponden a aquellos ejemplos que no buscan acción por parte de los estudiantes y cuyo objetivo es ejemplificar un concepto o un procedimiento presentado previamente; y b) ejemplos activos, con estos ejemplos se busca la participación de la audiencia y requieren, por lo tanto, que los estudiantes o el profesor hagan uso de sus conocimientos previos.

Las presentadas por Rowland y Zaslavsky (2005, citado en Bills et al. 2006), Watson y Chick (2011) y Rowland et al. (2009) se enfocan en para qué se utiliza el ejemplo. Rowland y Zaslavsky (2005, citado en Bills et al. 2006) presentan una clasificación que considera dos categorías, a) ejemplos de algo como materia prima, corresponde a ejemplos que se utilizan para ilustrar un principio general o razonamiento y b) ejemplos de práctica, son ejemplos que se utilizan para ejercitar. Watson y Chick (2011) presentan una clasificación en la cual los ejemplos están categorizados según diferentes tipos de acciones: a) ejemplos para analizar, en ellos se buscan relaciones plausibles entre los elementos del ejemplo con el propósito de generar conjeturas; b) ejemplos para generalizar, permiten describir similitudes entre los ejemplos, y c) ejemplos para abstracción, va más allá del ejemplo y clasifica ejemplos similares, nombrando la similitud como un concepto o clase con sus propias propiedades. Y Rowland et al. (2009) se enfocan en la finalidad educativa, identificando los dos usos más comunes que tienen los ejemplos en la enseñanza de las matemáticas: a) ejemplos para la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos, y b) ejercicios, ejemplos orientados a la familiarización y la práctica tras la introducción de una nueva idea o método.

Zodik y Zaslavsky (2007a) presentaron dos categorizaciones para clasificar la naturaleza y el uso de los ejemplos en las clases de matemáticas. La primera hace referencia al momento en que los profesores planifican el ejemplo y establece dos categorías: a) ejemplos planificados por adelantado y b) ejemplos espontáneos o que se recuerdan en el momento para dar respuesta a una necesidad que surge durante la clase. La segunda categorización se enfoca en el tipo de entidad matemática que se quiere ilustrar con el ejemplo: a) un concepto, b) un teorema, o c) un procedimiento/algoritmo. Y por último tenemos la clasificación presentada por Figueiredo y Contreras (2013), la cual nos permite categorizar los ejemplos en base a dos tipologías totalmente diferentes: a) ejemplos estáticos, estos ejemplos pueden desarrollarse usando lápiz y papel, tiza y pizarra, el texto de estudio o una calculadora gráfica; y b) ejemplos dinámicos, estos ejemplos requieren el uso de recursos informáticos o el uso muy específico de ciertas calculadoras gráficas.

Existen también algunos casos particulares de ejemplos que se han descrito en la literatura; entre estos casos podemos encontrar los ejemplos resueltos, estos ejemplos se presentan como la formulación de un problema, y por medio de él se muestran los pasos para su resolución y la solución final (Reiss y Renkl, 2002); ejemplos instructivos, son los ejemplos ofrecidos por el profesor en el contexto del aprendizaje de un tema en particular y son fundamentales para una explicación (Zaslavsky, 2010); ejemplos genéricos, que corresponden a un ejemplo único y particular que representa el caso general y través de él se puede percibir una generalidad (Pedemonte y Buchbinder, 2011); y el ejemplo fundamental-puente o simplemente ejemplo puente, son ejemplos que ayudan a los alumnos a generar un cambio conceptual, sirven de puente desde las concepciones ingenuas de los alumnos hacia las concepciones matemáticas adecuadas (Zazkis y Chernoff, 2006).

En nuestra investigación consideraremos tres aspectos de los ejemplos, si el profesor busca o no, con el ejemplo, generar interacciones en sus estudiantes, la finalidad educativa del ejemplo y la entidad matemática que está ejemplificando, para esto utilizaremos las clasificaciones elaboradas por Karaagac (2004), Rowland et al. (2009) y Zodik y Zaslavsky (2007a) con algunas adaptaciones, las cuales se detallarán en la metodología.

2.4. Sucesiones numéricas

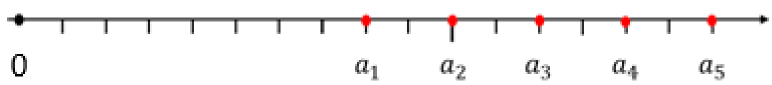
En la literatura podemos encontrar distintas definiciones para sucesión numérica. De forma muy general, se puede definir como un conjunto de objetos puestos en orden. Stewart et al. (2007) definen una sucesión numérica como un conjunto infinito de números escritos en un orden especifico: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ donde a_1 corresponde al primer término, a_2 al segundo término, y en general a_n al término n-ésimo. Por su parte Apóstol (2013) al referirse a este concepto plantea que:

> Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n, entonces se dice que el conjunto ordenado $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del primer término a_1, del segundo término a_2 y en general del término n-simo a_n. Cada término a_n tiene un siguiente término a_{n+1} y por lo tanto no hay un "último" término (p. 462).

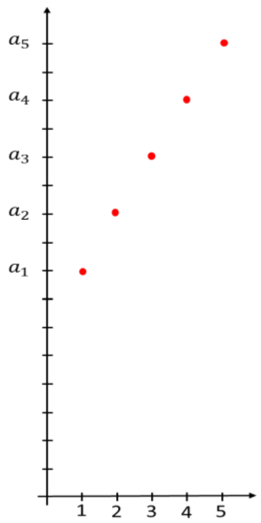
Burgos (2007) define una sucesión numérica como "una correspondencia $n \rightarrow a_n$, que a cada natural n le asocia un cierto número real x_n, proporciona la sucesión real $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, que se representa $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ o simplemente (a_n). Se dice que a_n es el elemento n-ésimo de (a_n)". (p. 23). Por lo tanto, la sucesión $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ es una forma abreviada de escribir una función como conjunto de pares ordenados $\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots\}$ (Cañadas, 2007).

Una sucesión numérica puede ser representada por medio de distintos sistemas de representación. De esta forma tenemos que la sucesión definida por $a_n = 6 + 2n$ se puede representar de forma:

- Algebraica
  $a_n = 6 + 2n$
- Numérica
  $a_n = 8, 10, 12, 14, 16, \ldots$
- Verbal
  Los números pares mayores a 6
- Gráfica lineal



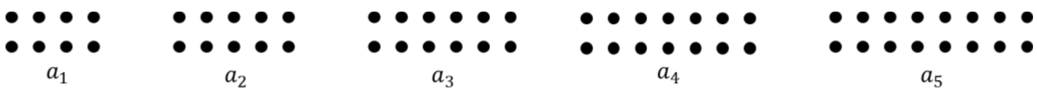
- Gráfico cartesiano



- Tabular

n	1	2	3	4	5
a_n	8	10	12	14	16

- Figurativo



Los tres elementos que destacan en toda sucesión son: el término general, representado por a_n el cual corresponde al elemento genérico del conjunto imagen; los términos k-ésimos, son los valores que constituyen el conjunto imagen de la función que define la sucesión; y el límite (Cañadas, 2007).

Existen algunas propiedades que nos permiten distinguir distintos tipos de sucesiones:

- De finitud, esta propiedad nos permite diferenciar entre sucesiones finitas e infinitas, las primeras corresponden a aquellas sucesiones que tienen una cantidad finita de términos y las segundas a las que tienen infinitos términos.
- De monotonía, esta propiedad nos permite diferenciar entre sucesiones crecientes y decrecientes y sus relativas; las sucesiones no crecientes y no decrecientes, de este modo diremos que:
  - La sucesión es creciente $sii\ a_n < a_{n+1}$ para todo entero positivo n,
  - La sucesión es no decreciente $sii\ a_n \leq a_{n+1}$ para todo entero positivo n,
  - La sucesión es decreciente $sii\ a_n > a_{n+1}$ para todo entero positivo n,

- La sucesión es no creciente $sii\ a_n \geq a_{n+1}$ para todo entero positivo n.

  Si se verifica alguno de estos casos diremos que la sucesión es monótona (Johnsonbaugh, 2005).

- De acotación, una sucesión es acotada superiormente se existe un número natural M tal que $f(n) \leq M$ para todo n, y acotada inferiormente si existe un número natural M tal que $f(n) \geq M$ para todo n. Si la sucesión no está acotada se denomina no acotada (Apostol, 2013).
- De convergencia, una sucesión se dice convergente hacia l $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = l\right)$ sí tiene límite, "si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si $n > N$, entonces $|a_n - l| < \varepsilon$" (Spivak, 2014, pág. 453). De lo contrario, si la sucesión no tiene límite se dirá que corresponde a una sucesión divergente.
- De recurrencia, se dice que una sucesión es recurrente si cada término se pude obtener a partir de los términos anteriores, en caso de no cumplirse esta condición la sucesión es no recurrente (Cañadas, 2007).

Las sucesiones numéricas son un contenido de gran relevancia por el papel que juega en el aprendizaje de otros temas matemáticos (Bajo-Benito et al., 2019). Manero et al. (2021) ven en las sucesiones un tópico matemático que tiene el potencial de desarrollar en los alumnos aspectos de razonamiento matemático, mientras que Bajo-Benito et al. (2021) observaron que la comprensión de este concepto es importante por la implicación que tiene en la comprensión de conceptos matemáticos. Por su parte, distintos autores han identificado algunos contenidos específicos cuya comprensión se ve favorecida por el estudio de las sucesiones; así, Mamona-Downs (2001) considera que las sucesiones son fundamentales para la compresión del concepto de límite y Codes y González-Martín (2017) evidenciaron que la comprensión de este concepto contribuye a la comprensión de la sucesión de las sumas parciales en relación con las series numéricas.

2.4.1. Desarrollo escolar de las sucesiones numéricas

En España, el currículo para la Educación Secundaria Obligatoria se define a nivel estatal y por Comunidad Autónoma. En el Real Decreto 1105/2014 el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte ha definido las disposiciones generales para el currículum básico de la ESO a nivel estatal, y en Andalucía la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Andalucía lo ha hecho por medio del Decreto 111/2016. Nos referiremos a estos decretos porque eran los que estaban vigentes al momento de desarrollarse las clases que analizaremos en este trabajo.

En el Real Decreto 1105/2014 se presentan las definiciones de algunos conceptos que son relevantes para su implementación: (a) objetivos, estos corresponden a los logros que debe alcanzar el estudiante al finalizar cada etapa, son el resultado de las distintas experiencias de enseñanza y aprendizaje; (b) contenidos, son el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que aportan al logro de los objetivos; (c) estándares de aprendizaje evaluables, son las especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y establecen lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; (d) criterios de evaluación, son el referente específico para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, en ellos se describe aquello que los estudiantes deben lograr tanto en conocimientos como en competencias.

Según esta normativa, a nivel estatal, el concepto de sucesiones se comienza a desarrollar en el tercer año de la ESO, en las asignaturas de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas* y *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*; en ambos casos, las sucesiones son consideradas en el bloque de números y álgebra, específicamente en el contenido definido como "Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas" (Real decreto 1105/2014). Al desarrollar este contenido, en ambas asignaturas, el profesor debe evaluar si el estudiante:

- Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores.
- Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.
- Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.

La asignatura *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* considera un cuarto estándar de aprendizaje evaluable para este contenido:

- Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los "n" primeros términos, y las emplea para resolver problemas.

En relación con los criterios de evaluación, en ambas asignaturas, el estudio de las sucesiones contribuye al logro de dos criterios, se espera que los estudiantes sean capaces de:

- Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.

- Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.

Por su parte, la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Andalucía, en concordancia con el Real Decreto 1105/2014, establece en el Decreto 111/2016 que el concepto de sucesión debe comenzar a desarrollarse en el tercer año de la ESO en las dos asignaturas mencionadas previamente y considerando el contenido, los estándares de aprendizaje evaluables, y los criterios de evaluación ya mencionados y definidos en el Real Decreto 1105/2014.

El Decreto 97/2015 que establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, documento vigente en el momento en que se recogieron los datos, establece que el diseño curricular de Andalucía incorpora el diseño del currículo establecido en el Real Decreto 126/2014. Considera los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje establecidos en el Real Decreto 126/2014, algunos de los cuales pueden favorecer la compresión del concepto de sucesión numérica. Uno de estos criterios es "describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (p. 19388). Al evaluar este criterio, el profesor, entre otros aspectos, debe verificar si el estudiante: identifica patrones y regularidades en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales; y si realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen. Un segundo criterio es "conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana" (p. 19390); en este caso, el profesor debe evaluar, entre otras cosas, si el estudiante: utiliza y automatiza el algoritmo estándar de la multiplicación con distintos tipos de números; si construye series numéricas ascendentes y descendentes; si construye y memoriza las tablas de multiplicar; y si calcula los primeros múltiplos de un número dado.

Por otra parte, el trabajo que se desarrolla al estudiar el concepto de sucesión numérica en el tercer año de la ESO favorece la compresión de contenidos que se abordarán en cursos superiores, como son las sucesiones numéricas en la asignatura Matemáticas I en primer año de Bachillerato, y el concepto de límite que se aborda en el primer año de Bachillerato en las asignaturas *Matemáticas I* y *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, y en *Matemáticas II* en el segundo año de Bachillerato.

En distintos textos escolares para la asignatura *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* utilizados en algunos centros educativos de la comunidad Autónoma de Andalucía, se puede observar que el estudio de las sucesiones numéricas durante el tercer año de la ESO se enfoca:

- en la definición de sucesión,
- en la definición de término de una sucesión y la búsqueda términos específicos,
- en la definición y construcción del término general de una sucesión, y
- en la definición de sucesión recurrente.

En este sentido, podemos ver que una sucesión se define a nivel escolar como "un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…" (Colera et al., 2020, p. 68), como "una lista infinita y ordenada de números" (Alcaide et al., 2015, p. 216) y como "una función en la que la variable independiente es un número natural y la variable independiente es un número real" (Ferro et al., 2016, p. 60). Por su parte, el término general de la sucesión es definido como "una expresión matemática que relaciona la posición que ocupa un término con su valor" (Ferro et al., 2016, p. 60), y en otro texto como "la expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión a partir del lugar que ocupa" (Alcaide et al., 2015, p. 216). Después de introducir estos conceptos, el estudio de las sucesiones se enfoca principalmente en dos casos, las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas, como se puede observar en diferentes textos escolares (Alcaide et al., 2015; Colera et al., 2020; Ferro et al., 2016).

2.4.2. Desarrollo escolar de las progresiones aritméticas y geométricas

Una progresión aritmética es una sucesión de la forma $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+nd, \dots$ donde a es el primer término y d es la diferencia común entre dos términos consecutivos. A nivel escolar, específicamente en algunos textos escolares para tercer año de la ESO, podemos encontrar las siguientes definiciones de progresión aritmética. Ferro et al. (2016) la definen como "una sucesión en la que la diferencia entre un término cualquiera y su anterior es una cantidad constante" (p. 62); Colera et al. (2020) como "una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama diferencia, d, de la progresión" (p. 70); y Alcaide et al. (2015) como "una sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior sumándole una cantidad fija d" (p. 218).

El estudio de las progresiones aritméticas durante el tercer año de la ESO se enfoca en:

- el término general $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde a_1 corresponde al primer término de la progresión y d a la diferencia
- y la suma de los primeros ene términos de la progresión $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Por su parte, una progresión geométrica es una sucesión de la forma $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n, \dots$ donde a es el primer término y r es la razón de la progresión. A nivel escolar, esta progresión es definida en los textos escolares de distintas formas. Colera et al. (2020) la definen como "una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado razón" (p. 72); Ferro et al. (2016) como "una sucesión en la que el cociente entre un término cualquiera y su anterior es una cantidad constante" (p. 64), y Alcaide et al. (2015) como "una sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior multiplicado por una constante fija r" (p. 220).

El estudio de las progresiones geométricas durante el tercer año de la ESO se enfoca en:

- el término general $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, donde a_1 corresponde al primer término de la progresión y r a la razón
- y la suma de los ene primeros términos de la progresión $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$

2.4.3. Patrones

Distintos autores han destacado la importancia del estudio de los patrones en el aprendizaje de las matemáticas. Según Zazkis y Liljedahl (2002), los patrones pueden ser considerados como el corazón y el alma de las matemáticas. En este sentido, Tirosh et al. (2019) observaron que tanto matemáticos, como investigadores y diseñadores de planes de estudios, concordaban en la importancia de que los niños pequeños participen en actividades de patronajes. Esto se debe, entre otras cosas, a que es sabido que la creación de patrones está estrechamente relacionada con la comprensión que los niños desarrollan de los números, la geometría, la medición y los datos (Kidd et al., 2014) y que existe una directa relación entre el conocimiento de los patrones y el rendimiento en matemáticas (Cañadas, 2022).

La importancia de los patrones en el aprendizaje de las sucesiones radica principalmente en el rol que juegan en el desarrollo del pensamiento algebraico, pensamiento que es indispensable para establecer las generalizaciones matemáticas, en nuestro caso, el término general de una sucesión. Según English y Warren (1998), el uso de patrones es crucial para la transición de la aritmética al algebra, ya que demanda la elaboración de generalizaciones verbales y simbólicas, permitiendo de esta forma introducir ideas algebraicas elementales. A nivel escolar, las actividades de patronaje son consideradas como una de las formas más importantes para introducir el algebra (Radford, 2010), mientras que en estudiantes de cuarto año de primaria (9-10 años) la exploración de patrones visuales corresponde al enfoque más utilizado para introducir el álgebra (Warren, 2005), y en los últimos cursos de primaria la comprensión de la generalización se desarrolla a través de la compresión de patrones recursivos (Blanton et al., 2015).

Por lo tanto, la capacidad de continuar un patrón es anterior a la capacidad de generalizar (Zazkis y Liljedahl, 2002), ya que la generalización depende tanto de la detección de un patrón, como de la identificación de un patrón adecuado (Cañadas et al., 2008).

3. Antecedentes

En este capítulo se describen algunos de los hallazgos que distintos investigadores han realizado en relación con el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de distintos temas: de las sucesiones numéricas, de las progresiones aritméticas y de los patrones. También se presentan algunos de los resultados que se han obtenido al abordar en primer lugar, el estudio de las relaciones que se generan entre los distintos subdominios de conocimiento que forman parte del modelo MTSK; y, en segundo lugar, el estudio del conocimiento especializado asociado a la ejemplificación, específicamente asociados a los procesos de selección y uso de los ejemplos. Para cada tema se consideran solo aquellos hallazgos que eran relevantes para nuestra investigación.

3.1. Relaciones entre subdominios

Como ya se ha mencionado, los seis subdominios que forman parte del modelo MTSK nos permiten separar (a efectos analíticos) y caracterizar de manera profunda el conocimiento que posee el profesor que enseña matemáticas (Carrillo et al., 2014). Pero son las relaciones que se generan entre estos subdominios las que nos permiten obtener una compresión más profunda del conocimiento especializado del profesor (Carrillo et al., 2018).

En los últimos años, distintos investigadores han profundizado en el estudio de las relaciones que se generan entre/en los subdominios del MTSK. Carrillo et al. (2014), al presentar el marco teórico de este modelo analítico, señalaron y recomendaron el análisis de algunas de las relaciones que nos permitirían el regreso a la integración del conocimiento. Así, en la relación KSM-KMLS, la categoría secuenciación de temas del KMLS tiene aspectos similares con las categorías conexiones de complejización y conexiones de simplificación del KSM, esto se evidencia al establecer relaciones con temas posteriores o anteriores, ya que la justificación didáctica forma parte del KMLS y la justificación matemática del KSM. En la relación KoT-KMLS, también se considera la categoría secuenciación de temas del KMLS, pero cuando la secuenciación corresponde a una conexión intraconceptual, ya que estas forman parte del KoT. En la relación KFLM-KMLS, el desarrollo de propuestas curriculares requiere conocer los aprendizajes esperados y las capacidades conceptuales y procedimentales que poseen los estudiantes, lo que forma parte del KMLS, y elaborar o seleccionar una propuesta que promueva el desarrollo cognitivo de los estudiantes, conocimiento que forma parte del KFLM. La relación KFLM-KMT se puede evidenciar en las decisiones que toma el profesor en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje, el KFLM considera conocimiento sobre el proceso de apropiación del objeto matemático por parte de los estudiantes, mientras que el KMT considera el conocimiento sobre las herramientas (técnicas y recursos) empeladas para llevar a cabo dicho proceso. En la relación KoT-KPM, las prácticas de demostrar, definir y ejemplificar que forman parte del KPM, en ocasiones dan sustento al conocimiento que es considerado en el KoT. Y la relación MK-KMT/KFLM, los subdominios KMT y KFLM no incluyen conocimiento matemático, pero requieren de este contenido para su funcionamiento. Zakaryan y Ribeiro (2016) observaron que las relaciones que se generan entre el KMT y los demás subdominios permiten identificar un conjunto de elementos nucleares del conocimiento del profesor. Zakaryan et al. (2018) evidenciaron que los subdominios KFLM y KMT se potencian mutuamente, aunque en su trabajo observaron que el KFLM era el subdominio que con mayor frecuencia potenciaba al otro. Tres de estas relaciones también fueron descritas, de esta misma forma, por Escudero-Domínguez y Carrillo (2016) al abordar el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas; estas son las relaciones KoT-KMLS, KSM-KMLS y KFLM-KMLS.

Escudero-Ávila et al. (2017) presentaron algunas relaciones entre los subdominios con el propósito de mostrar cómo el MTSK reconoce la naturaleza dinámica, compleja e integral del conocimiento especializado. En la relación KPM-KoT, el conocimiento sobre las formas de proceder asociadas a las matemáticas, en general, permite al profesor decidir cómo trabajar los contenidos y cómo organizar y validar los procesos de los estudiantes, generando que el KPM adquiera una función organizadora de los conocimientos matemáticos. Se ha observado que la relación KFLM-KMT nos permite comprender e interpretar con mayor profundidad la naturaleza del conocimiento del profesor desde dos enfoques, como contenido a aprender y como contenido a enseñar. En las relaciones KFLM-KoT y KMT-KoT, el conocimiento matemático que posee el profesor sustenta su KFLM y su KMT. Y, en la relación KPM-KMT, el conocimiento sobre las formas de preceder en matemáticas puede influir en el conocimiento sobre las características matemáticas de recursos materiales y digitales, o de diferentes estrategias para la enseñanza.

Delgado y Zakaryan (2018) establecieron evidencia empírica de las relaciones KPM-KMT y KPM-KFLM presentadas por Carrillo et al. (2014) y observaron que, cuando el KFLM era apoyado por el KPM, el profesor construía explicaciones más detalladas y que el KPM condicionaba al KMT a tal punto que el objetivo del profesor era que los estudiantes, además de comprender los contenidos matemáticos, aprendieran a pensar matemáticamente para validar y construir argumentos. Fuentes (2020), al analizar el conocimiento del profesor asociado al concepto de proporcionalidad, identificó las relaciones KMT-KFLM y KMT-KoT. Por su parte, Espinoza (2020) identificó y ejemplificó relaciones al interior de los distintos subdominios del MTSK.

A pesar de los distintos trabajos que se han desarrollado para indagar en el estudio de las relaciones que se generan entre/en los subdominios del MTSK, aún hay mucho que profundizar. Esto queda de manifiesto al revisar las actas de los últimos tres congresos sobre el MTSK. En todas ellas, las relaciones entre/en los subdominios son consideradas entre los desafíos y perspectivas de investigación (Carreño et al., 2021; Carrillo, 2017; Carrillo, 2019). En relación con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, evidenciamos que es necesario profundizar en el estudio de cómo el KMT se relaciona con el KFLM, tanto en futuros profesores como en profesores en servicio (Zakaryan et al., 2018). Tambien es necesario generar más estudios que nos permitan enriquecer y ampliar el conocimiento de las relaciones que se generan entre el KMT y el resto de los subdonminios (Zakaryan y Ribeiro, 2016). El estudio de estas relaciones debe contribuir a una compresión más fina del conocimiento que el profesor utiliza para gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Delgado y Espinoza, 2021).

3.2. Enseñanza y aprendizaje de las sucesiones

En el ámbito de la Didáctica de la Matemática podemos encontrar distintos trabajos que se enfocan en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las sucesiones. Bajo-Benito et al. (2017) han puesto de manifiesto que la compresión del concepto de sucesión numérica presenta dificultades para los estudiantes de la ESO (14-16 años). Según estos autores, el excesivo énfasis que se hace de las progresiones geométricas y aritméticas al estudiar las sucesiones contribuye al desarrollo de una concepción errónea de este concepto que manifiestan algunos estudiantes cuando identifican una sucesión solo con el caso particular de estas progresiones (Bajo-Benito et al., 2015). En esta misma línea, Przenioslo (2006) identificó dos formas de entender las sucesiones numéricas al estudiar cómo los estudiantes de educación secundaria y de primer año de universidad las percibían. Un 12% de los estudiantes examinados identificaba las sucesiones como una función, mientras que el resto las asociaba a elementos ordenados, es decir, a un conjunto. Según esta autora (2006), esto podría ser el resultado de buscar familiarizar a los estudiantes con el concepto de sucesión por medio de la comparación de las sucesiones con los conjuntos. De esta forma, el trabajo de Przenioslo (2006) mostró que la concepción de sucesión formada en la Educación Secundaria está muy alejada del significado real del concepto. Por su parte, Castro et al. (1997) evidenciaron que la expresión del término general de una sucesión también presenta grandes dificultades de compresión para muchos estudiantes por el alto grado de abstracción que supone.

3.2.1. Sistemas de representación de sucesiones

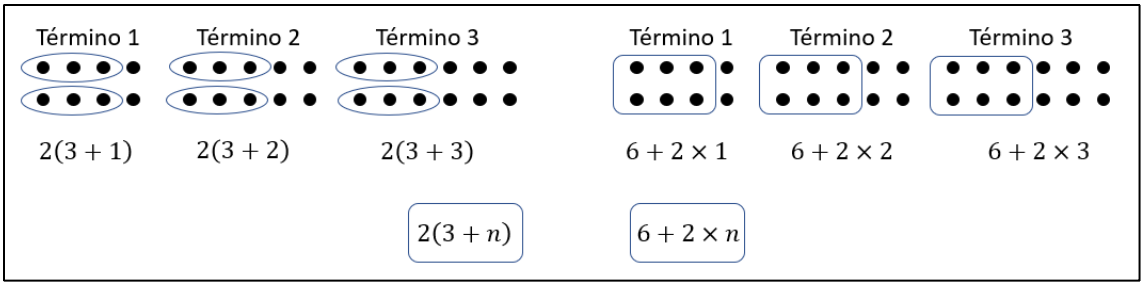
Otro tema que ha sido abordado en las investigaciones sobre este concepto es la representación de sucesiones. Distintas investigaciones han señalado la importancia del uso de diferentes modos de representación para el estudio del concepto de sucesión numérica, destacando los modos numéricos, gráfico algebraico y sus variantes (Bajo-Benito et al., 2019). Según estos autores (2015), la forma en que los estudiantes interactúan con estos modos de representación nos informa sobre el nivel de comprensión que poseen del concepto de sucesión como lista numérica; un estudiante que se mueve de la representación gráfica a la algebraica para resolver el problema tiene una menor comprensión que el estudiante que resuelve la terea indistintamente del modo de representación.

Romero (2001), centrándose en las sucesiones lineales y cuadráticas de números naturales, distinguió tres sistemas de representación: el sistema figurativo (configuraciones puntuales), el simbólico estructurado (sistema decimal de numeración) y el sistema operatorio (desarrollos aritméticos). Según esta autora, cada uno de estos sistemas de representación ofrece una consideración parcial de la sucesión y de su término general; de esta forma, la representación de una sucesión es más potente cuando se trabaja el desarrollo aritmético junto con el sistema simbólico estructurado, mientras que la representación figurativa adquiere mayor sentido cuando se emplea como un recurso para visualizar el desarrollo aritmético. Estos casos ilustran la complementariedad de los sistemas de representación, mostrando que es necesario ir alternando entre uno y otro, especialmente entre los de tipo gráfico y los de tipo simbólico, para logar el dominio de ellos (Romero, 2001). En este sentido, autores como Bajo-Benito et al. (2019) corroboraron la importancia del uso de diferentes modos de representación al estudiar el concepto de sucesión.

En relación con el sistema figurativo, al representar varios términos de una sucesión mediante este sistema se pueden analizar sus términos por medio de diferentes desarrollos aritméticos (sistema operatorio) y, por tanto, obtener expresiones algebraicas diferentes, aunque equivalentes, del término general de la sucesión (Castro, 1995) (ver figura 1). También ayuda a los estudiantes a establecer argumentos que conectan el patrón geométrico con su correspondiente patrón aritmético (Romero, 2001). Les permite encontrar un esquema gráfico para representar los términos de las sucesiones de primer y segundo grado que tomen valores enteros, admitiendo las progresiones aritméticas representaciones puntuales sencillas, por lo general rectangulares de altura o base constante (Rico, 1996). Como en la representación que se puede observar en la figura 1, en cuyo caso la altura siempre es 2, mientras que la base varía en cada término.

Figura 1

Posibles desarrollos para obtener el término general de una sucesión representada con el sistema figurativo



Algunos autores han evidenciado lo complejo que resulta la integración de estos tres sistemas de representación durante el aprendizaje las sucesiones. Bajo-Benito et al. (2019) destacaron la dificultad que implicaba el transitar de una representación a otra, mientras que Rico (1996) y Romero (2001) comprobaron que los estudiantes de secundaria (13 – 14 años) no son capaces de integrar los tres sistemas simbólicos de representación (figurativo, simbólico estructurado y operativo) al expresar el término general de una sucesión.

Janvier (como se cita en Cañadas et al., 2012) observó que los cuatro sistemas de representación usados tradicionalmente para las sucesiones son: gráfico, numérico, verbal y algebraico. De estos cuatros sistemas de representación, según González et al. (2010), los estudiantes universitarios de primer año manifestaron dificultades en la compresión del concepto de secuencia numérica al relacionar la representación gráfica con la algebraica. Por su parte Cañadas et al. (2012), al centrarse en el estudio del término general con estudiantes de tercer y cuarto año de educación secundaria, concluyeron que la representación gráfica de la generalización les ayuda a generalizar algebraica o verbalmente, lo que les permite obtener términos particulares de la sucesión. Bajo-Benito et al. (2019) consideran un grupo de representaciones, similares a las mencionadas por Janvier (opus cit.), al caracterizar la comprensión del concepto de sucesión en estudiantes de Educación Secundaria (14 – 16 años): representación numérica, representación algebraica, representación gráfico-lineal (representación de la sucesión como puntos en la recta numérica) y representación gráfico-cartesiano (representación de la sucesión como puntos en el plano cartesiano).

Algunos autores han destacado el rol que puede jugar la representación numérica en la comprensión de algunos tipos de sucesiones. Djasuli et al. (2017) concluyeron que las tareas en las cuales los estudiantes debían encontrar el término general a partir de los primeros términos de la sucesión eran fundamentales para la construcción formal de las progresiones geométricas y aritméticas. Por otro lado, Rodríguez y Guibert (2009) proponen el uso de progresiones geométricas y aritméticas con espacios en blanco en actividades que lleven a los estudiantes a indicar los elementos faltantes de la secuencia, para que comprendan cómo se van formando ambas sucesiones y cuáles son sus particularidades (razón y diferencia).

En la búsqueda que desarrollamos, encontramos algunas investigaciones que abordaban diferentes aspectos asociados al aprendizaje y/o enseñanza de las sucesiones:

- la comprensión del concepto de sucesión numérica en estudiantes de ESO (Bajo-Benito et al., 2015; Bajo et al., 2015);
- la compresión del concepto de sucesión y las fuentes de formación de las concepciones relevantes en estudiantes de ESO (Przenioslo, 2006);
- los procesos de generalización utilizados por estudiantes de secundaria al trabajar con sucesiones (Cañadas et al., 2012; García, 1999);
- el uso de herramientas informáticas como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de las sucesiones, en estudiantes de primer año de carrera universitaria (González et al., 2010) entre otros.

Pero no encontramos investigaciones que abordaran el estudio del conocimiento especializado asociado a la enseñanza y el aprendizaje de las sucesiones numéricas, en este sentido destacamos la pertinencia del modelo analítico MTSK como una herramienta que nos permitiría indagar en esta temática.

3.3. Enseñanza y aprendizaje de las progresiones aritméticas

Yeo (2010), centrando su estudio en las progresiones aritméticas, propone cinco métodos que los profesores pueden utilizar en clases de Educación Secundaria para que los estudiantes encuentren el término general de este tipo de sucesiones, sin utilizar la fórmula general $a_n = a_1 + (n-1)d$, también define algunas de las limitaciones y/o oportunidades que presenta cada uno de estos métodos.

El primer método corresponde al que habitualmente se enseña en las escuelas secundarias de Singapur. La mayoría de los estudiantes no verá la necesidad de expresar 1 como $1 + 0 \times 3$ o 4 como $1 + 1 \times 3$, por lo tanto, el profesor debe guiarlos a comenzar por el 7 o 10 para que luego ellos continúen con los otros valores.

$$
\begin{array}{llll}
\text{P.A. } 1, 4, 7, 10, \ldots & & & \\
a_1 = 1 & = 1 & = 1 + & 0 \times 3 \\
a_2 = 4 & = 1 + 3 & = 1 + & 1 \times 3 \\
a_3 = 7 & = 1 + 3 + 3 & = 1 + & 2 \times 3 \\
a_4 = 10 & = 1 + 3 + 3 + 3 & = 1 + & 3 \times 3 \\
a_n & & = 1 + (n-1)3 &
\end{array}
$$

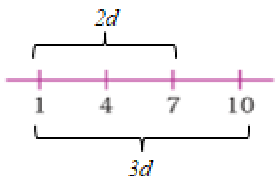
El segundo método es una variación del anterior. Muchos estudiantes verán que el patrón de a_n es $n \times 3$ y no $(n-1) \times 3$. El profesor deberá explicar cómo obtener -2 de $1-3$, expresándolo como $a_1 - d$. De esta forma

P.A. $1, 4, 7, 10, \ldots$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \quad = 1 - 3 + 3 & &= -2 + 3 & &= -2 + 1 \times 3 \\
a_2 &= 4 \quad = 1 - 3 + 3 + 3 & &= -2 + 3 + 3 & &= -2 + 2 \times 3 \\
a_3 &= 7 \quad = 1 - 3 + 3 + 3 + 3 & &= -2 + 3 + 3 + 3 & &= -2 + 3 \times 3 \\
a_4 &= 10 \quad = 1 - 3 + 3 + 3 + 3 + 3 & &= -2 + 3 + 3 + 3 + 3 & &= -2 + 4 \times 3 \\
a_n & & & & &= -2 + n \times 3
\end{aligned}$$

El tercer método implica el uso de una recta numérica y puede interpretarse como la versión pictórica del primer método. El profesor debe guiar a los estudiantes a observar que hay dos espacios entre el 1º y 3º término, y tres entre el 1º y 4º. Como la longitud de cada espacio es 3 unidades y el primer término es 1, el enésimo término es $1 + (n-1)3$.

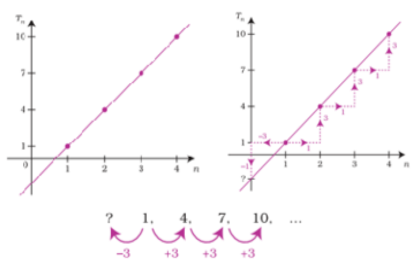
P.A. $1, 4, 7, 10, \ldots$



El cuarto método apela al uso de la ecuación de la línea recta $a_n = mn + c$. En el segundo gráfico se observa que el aumento es siempre la diferencia común d. Por lo tanto $m = d = 3$. La intersección de a_n es c, usando el concepto de gradiente $c = 1 - 3 = -2$. De esta forma $a_n = 3n - 2$.

El profesor deberá utilizar el mismo procedimiento utilizado en el método 2 para obtener el término general.

P.A. $1, 4, 7, 10, \ldots$



El quinto método consiste en transformar la progresión en una más fácil de encontrar el término general. Dado que la diferencia es 3, se plantea una con los múltiplos de 3. Los estudiantes de secundaria que no dominen los gráficos no tendrán dificultades para usar este método.

Los profesores son los responsables de promover que los estudiantes encuentren cuantos métodos les sean posibles para establecer el término general de una progresión aritmética (Yeo, 2010).

Por su parte, García (1999) describe el formato de presentación más común, utilizado por el profesorado, al abordar el estudio de las progresiones aritméticas. Este formato está compuesto por dos momentos. En primer lugar, se describen los primeros términos $f(1), f(2), f(3)$, ... de la sucesión por medio de dibujos ilustrativos y, en segundo lugar, se propone una tarea que consta de tres tipos de actividades: a) cuestiones introductorias: se pide a los estudiantes que determinen los términos siguientes $f(4)$ o $f(5)$; b) cuestión de generalización próxima: el término generalización próxima hace referencia a aquellos términos que se pueden obtener por medio de un recuento directo o mediante la extensión de la sucesión presentada, se solicita a los estudiantes que determinen un término tal que se pueda calcular mediante el procedimiento de conteo directo, por ejemplo $f(10)$; y c) cuestión de generalización lejana; el término de generalización lejana corresponde a aquellos términos para los que resultan complejo obtener su valor por medio del conteo directo o por la prolongación de la sucesión, por ejemplo $f(45)$ o $f(100)$.

Stacey (1989), utilizando la forma de presentación descrita posteriormente por García (1999) para la presentación de las progresiones aritméticas, describe los métodos de resolución utilizados por estudiantes de 9 a 13 años (últimos cursos de primaria y primeros años de secundaria) al resolver los siguientes ejercicios (ver figuras 2 y 3).

Figura 2

Escalera (Stacey, 1989)

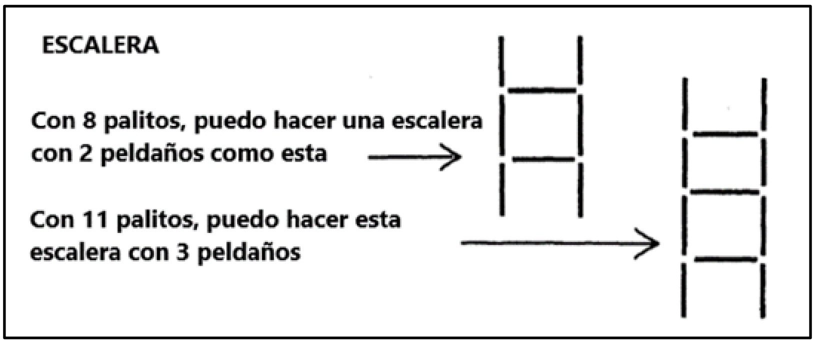
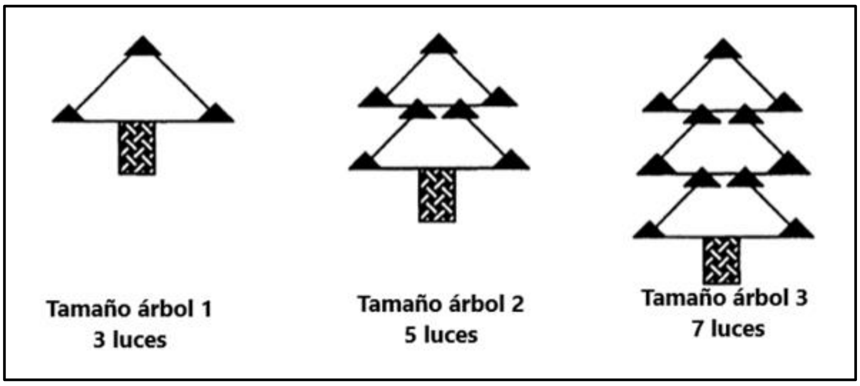


Figura 3

Árbol de navidad (Stacey, 1989)



En la primera actividad (figura 2) se les pedía a los estudiantes que determinaran cuántos palitos se necesitan para hacer una escalera de una determinada cantidad de peldaños (4, 5, 112, 20 y 1000), indicándoles que se necesitan 335 palitos para una escalera de 111 peldaños. En la segunda actividad (figura 3) se les pide que determinen cuántas luces tendría un árbol de navidad de tamaño 20 y uno de tamaño 100, en estos casos deben explicar cómo obtuvieron las respuestas.

Según Stacey (1989), fueron cuatro los métodos más frecuentemente utilizados por los estudiantes para resolver los ejercicios de la escalera y del árbol de navidad:

- Método de conteo, realizaban el conteo desde el dibujo.
- Método de diferencia, multiplicaban el número de peldaños por 3, la diferencia común, es decir, suponiendo implícitamente que la suma repetida de 3 implicaba $M(n) = 3 \cdot n$.
- Método de objeto completo: toman un múltiplo del número de palitos necesarios para una escalera más pequeña, suponiendo implícitamente que $M(mn) = m \cdot M(n)$.

- Método lineal: utilizan un patrón que reconoce la multiplicación, la suma y que el orden de las operaciones es importante, usando implícitamente un modelo lineal $M(n) = a \cdot n + b$ con $b \neq 0$.

Al analizar el trabajo desarrollado por los estudiantes de primaria en la primera actividad, Stacey (1989) observó que los estudiantes utilizaron con mayor frecuencia el método de conteo para encontrar $M(20)$, generando a menudo respuestas incorrectas pero cercanas al valor correcto. Con el método de diferencia se generaron las dos respuestas incorrectas más comunes $M(20) = 60$ y $M(1000) = 3000$, en las que explicaban que "agregaban tres palitos por cada peldaño". En cuanto al método lineal, la mayoría de los estudiantes que utilizaron $M(n) = a \cdot n + b$ erraron al determinar el valor de b. Los estudiantes de secundaria también utilizaron mayoritariamente el método de conteo para obtener $M(20)$ en la primera actividad, pero utilizaron sumas sucesivas para obtener $M(20)$ en la actividad del árbol de navidad (Stacey, 1989), estrategia que también fue clasificada como método de conteo.

García (1999), tomando como base el trabajo realizado por Stacey (1989), presentó nuevas categorías de clasificación para los métodos utilizados por los estudiantes al resolver el problema de la escalera (figura 2) y del árbol de navidad (figura 3). Este autor clasificó los métodos en base a tres esquemas conceptuales:

- Recuento directo:
  - recuento sobre el mismo dibujo.
  - extensión de la sucesión por medio de la suma repetida de la diferencia constante hasta obtener el término requerido.
- Proporcionalidad directa:
  - uso explícito de la diferencia constante a, asumiendo erróneamente que el proceso de iteración implica $f(n) = a \cdot n$.
  - se asume de forma implícita que $f(mn) = m \cdot f(n)$, no haciendo uso explícito de la diferencia constante.
  - se utiliza el esquema típico de la regla de tres.
- Lineal:
  - la respuesta entregada por los estudiantes corresponde a $f(n) = a \cdot n + b$, con $b \neq 0$ y a igual a la diferencia constante.
  - uso explícito de expresiones para el cálculo con estructura simbólica de la forma $f(n) = d \cdot (n - m), m < n, m \geq 1$;

- en la expresión para el cálculo no aparece explícitamente la diferencia constante.

Solo consideramos las progresiones aritméticas porque en nuestra búsqueda no encontramos trabajos que abordaran la enseñanza y el aprendizaje de las progresiones geométricas en la ESO. Y, en lo referente al conocimiento especializado, aplica lo mencionado en el apartado anterior, no encontramos investigaciones desarrolladas con el MTSK que analizaran el conocimiento especializado asociado a la enseñanza y el aprendizaje de las progresiones aritméticas y geométricas en la ESO.

3.4. Enseñanza y aprendizaje de patrones

Dado el rol que juegan los patrones en el aprendizaje de las sucesiones, es que consideramos importante mencionar el trabajo que realizan los estudiantes al abordar este contenido en educación infantil.

Para Zazkis y Liljedahl (2002) ser capaz de continuar un patrón puede considerarse como la comprensión de un patrón de repetición, mientras que ser capaz de describir un elemento "general" puede considerarse como la solución de un patrón. En este sentido, Warren (2006) presenta algunas acciones que los profesores pueden realizar para favorecer que los estudiantes establezcan la generalidad del patrón, estas son: (a) el uso de materiales concretos, (b) patrones en los que la relación entre el patrón y la posición es explícita, y (c) preguntas explícitas que vinculan la posición con el patrón.

Castro-Rodríguez y Castro (2016) describen algunas de las experiencias desarrolladas por los estudiantes de educación infantil al abordar el estudio de los patrones y de las relaciones entre ellos:

- identificar patrones, el profesor propicia que los estudiantes identifiquen patones en el entorno, en la naturaleza, en la música, entre otros;
- explicar los patrones identificados, los estudiantes deben relatar con sus propias palabras el patrón que han identificado;
- leer patrones, los estudiantes deben señalar y nombrar cada elemento del patrón;
- describir patrones, los estudiantes deben describir el cambio de atributo, el número de elementos en el núcleo del patrón y el tipo de elementos;
- extender patrones, los estudiantes deben continuar con la serie determinada por el patrón;

- hallar la regla que sigue el patrón, los estudiantes deben expresar descripciones concisas de cómo se repite va repitiendo el patrón;
- traducir patrones, el profesor busca que los estudiantes expresen un patrón mediante diferentes notaciones;
- y hallar elementos omitidos en un patrón, los estudiantes deben identificar los elementos que faltan o que se han omitido en un patrón.

En esta misma línea, Cañadas (2022) distingue tres tipos de patrones utilizados en la educación primaria: (a) patrones de repetición o reiterativos (Figura 4), que poseen un núcleo que corresponde a la parte del patrón que se repite continuamente, siendo el conjunto mínimo que puede regenerar la secuencia; (b) patrones de desarrollo (Figura 5), que son patrones que aumentan o disminuyen de forma sistemática, produciéndose una expansión o un decrecimiento; y c) patrones numéricos.

Figura 4

Patrón de repetición

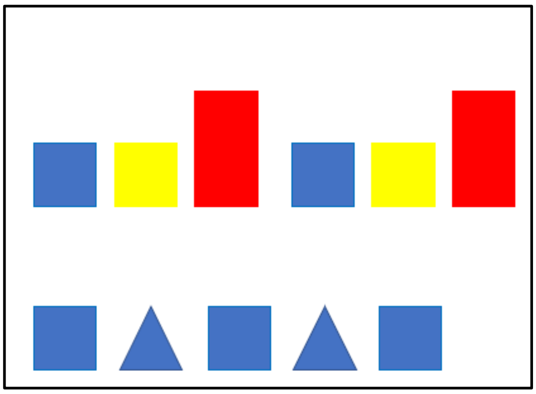
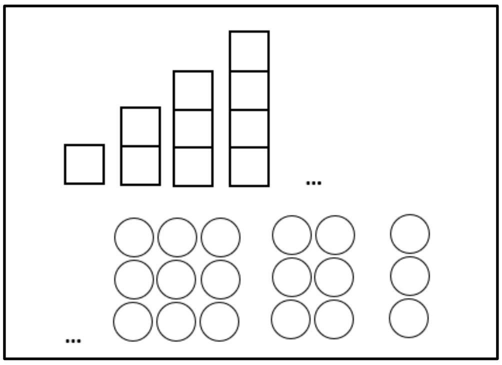


Figura 5

Patrón de desarrollo

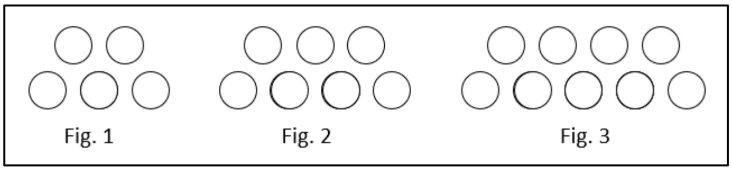


También presenta algunas tareas que desarrollan los estudiantes al trabajar con patrones: (a) identificar patrones; (b) lectura de patrones; (c) describir el patrón; (d) determinar la regla del patrón, y (e) traducir patrones (Cañadas, 2022).

Por su parte Radford (2010) describe dos procedimientos utilizados por estudiantes de 8º curso (13-14 años, primeros años de educación secundaria en España), al generalizar algebraicamente un patrón de desarrollo (Figura 6).

Figura 6

Patrón utilizado por Radford (2010)



La primera estrategia utilizada por los estudiantes consiste en ensayo y error, en la que los estudiantes proponen reglas sencillas como "por 2 más 1", "por 2 más 2" o "por 2 más 3" y comprueban su validez en unos pocos casos. La segunda consiste en buscar puntos en común entre las distintas cifras representadas con las figuras, por ejemplo "La línea superior siempre tiene un círculo más que el número de la figura y la línea inferior siempre tiene dos círculos más que el número de la figura” y en este caso establecieron la fórmula $(n+1)+(n+2)$ (Radford, 2010). Las dos estrategias desarrolladas por los estudiantes son aplicables al trabajo con sucesiones numéricas.

3.5. El conocimiento especializado asociado a la ejemplificación

Distintos autores concuerdan en que la elección y el uso de ejemplos apropiados requiere que los profesores movilicen un conjunto de conocimientos especializados. Suffian y Abdul (2010) identifican el conocimiento didáctico del contenido como un conocimiento relevante por la gran influencia que tienen en la selección y el uso de los ejemplos, llegando a ser determinante para estas instancias. Zodik y Zaslavsky (2008) identificaron tres tipos de conocimientos que estarían fuertemente relacionados con la ejemplificación en la educación matemática: el conocimiento de las matemáticas; el conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento del contenido pedagógico. Por su parte, Leikin y Zazkis (2010) consideran a la ejemplificación como una poderosa herramienta para estudiar el conocimiento matemático y meta-matemático de los profesores, idea que es compartida por Sosa et al. (2017), quienes han visto en la ejemplificación un escenario favorable para profundizar en el MTSK, según estos autores la acción de ejemplificar nos permitiría profundizar en casi todos los subdominios del MTSK.

3.5.1. Selección de ejemplos y conocimiento profesional

Distintos autores concuerdan en que la selección de los ejemplos corresponde a una de las instancias más relevantes y complejas que deben enfrentar los profesores al utilizar ejemplos para abordar la enseñanza de las matemáticas. Según Zodik y Zaslavsky (2008), esta instancia resulta desafiante para los profesores de matemáticas porque conlleva muchas consideraciones que deben ser valoradas y porque finalmente el ejemplo que seleccionen podrá facilitar o dificultar el aprendizaje de sus estudiantes. Para Zaslavsky (2010), esta acción no es trivial, ya que seleccionar un ejemplo para ilustrar una idea matemática a menudo implica una compensación entre una limitación y otra; por su parte, Zazkis et al. (2008) consideran que la elección del ejemplo es crucial para crear experiencias que permitan a los estudiantes generalizar, mientras que Suffian y Abdul (2010) creen que esta instancia influye directamente en los procesos de enseñanza de las matemáticas que se da en las aulas.

En la literatura sobre educación matemática podemos encontrar algunos tipos de conocimientos que están vinculados a la selección de los ejemplos. Zodik y Zaslavsky (2008) observaron que la elección de ejemplos realizada por un grupo de profesores que no contaba con capacitación formal en el ámbito de la ejemplificación se basaba principalmente en el aprendizaje que adquirieron a través de la práctica y que el conocimiento del contenido y el conocimiento del aprendizaje de los estudiantes daban forma a los ejemplos seleccionados por los maestros. Ng y Dindyal (2015), utilizando el modelo de conocimiento del profesor MKT, observaron que la elección de los ejemplos estaba influenciada por el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). Para Chick y Harris (2007) el conocimiento del contenido pedagógico es la base para la selección de los ejemplos que se utilizan para ilustrar ideas matemáticas en el aula. Por su parte, Zaslavsky (2008) plantea que un conocimiento sólido, tanto matemático como pedagógico, es necesario para la selección o construcción de ejemplos útiles. Finalmente, según Rowland et al. (2005), la capacidad de los profesores para seleccionar ejemplos matemáticos adecuados está relacionada con su conocimiento del contenido matemático para la enseñanza.

3.5.2. Uso de ejemplos y conocimiento profesional

Al igual que la selección, el uso de los ejemplos también se presenta como una instancia desafiante para los profesores, por todas las situaciones que debe sopesar (Zodik y Zaslavsky, 2007b). A pesar de esto, el uso de los ejemplos en las clases de matemáticas es una práctica muy habitual (Ng y Dindyal, 2015). En este sentido, Leinhardt (1990) y Zodik y Zaslavsky (2007a) concuerdan en que las habilidades necesarias para lograr el uso efectivo de los ejemplos se crean principalmente a través de la propia experiencia docente.

Los ejemplos son utilizados con distintos propósitos, la mayoría de los profesores los usa para demostrar una forma concreta de resolver un problema o para plantear a los alumnos determinados ejercicios (Chick y Harris, 2007). También son utilizados para presentar alguna idea o ilustrar un concepto, para presentar una particularidad de lo que es general, para la aplicación de un teorema y para adquirir una agilidad en el cálculo o en el uso de un procedimiento (Ng y Dindyal, 2015). Por su parte, Zodik y Zaslavsky (2007a) coinciden en el uso de los ejemplos para ilustrar un teorema, un concepto, o un procedimiento o algoritmo.

Según Zodik y Zaslavsky (2007a) existe una estrecha relación entre la base del conocimiento que un profesor necesita para construir ejemplos útiles y el conocimiento que se puede evidenciar en el uso de esos ejemplos. Por su parte, Ng y Dindyal (2015) observaron que, en la literatura, tenemos suficiente evidencia de una fuerte conexión entre los conocimientos del profesor y el uso que realiza de los ejemplos al abordar la enseñanza de las matemáticas, particularmente con el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Algunos ejemplos de esto los encontramos en lo planteado por Suffian y Abdul (2010), que reconocen la gran influencia que tiene el conocimiento pedagógico del contenido en el uso de los ejemplos, y lo ya mencionado en relación con los distintos conocimientos del profesor que operan durante el proceso de ejemplificación (Suffian y Abdul, 2010; Zodik y Zaslavsky, 2008).

Por lo tanto, queda de manifiesto cómo distintos investigadores han abordado el conocimiento especializado asociado al uso de los ejemplos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se evidencia con ello los conocimientos especializados asociados a la ejemplificación (Suffian y Abdul, 2010; Zodik y Zaslavsky, 2008); a la selección del ejemplo (Chick y Harris, 2007; Ng y Dindyal, 2015; Rowland et al., 2005; Zaslavsky, 2008); y al uso (Ng y Dindyal, 2015; Suffian y Abdul, 2010; Zodik y Zaslavsky, 2007a). Sin embargo, no encontramos investigaciones que analizaran las relaciones que se generan entre los subdominios de conocimientos, a pesar del escenario tan favorable que ofrece la ejemplificación para analizar el conocimiento especializado del profesor (Sosa et al., 2017; Leikin y Zazkis, 2010), y de la comprensión más profunda que podemos obtener de este conocimiento, por medio de las relaciones que se generan entre los subdominios.

4. Metodología

En este capítulo se desarrolla una descripción general de las características de esta investigación, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos de la misma y la pregunta a la cual pretendemos dar respuesta con este trabajo. Se justifica la elección del caso de estudio y se describen las distintas clasificaciones que utilizamos para categorizar los ejemplos que el profesor utilizó para abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas en curos de segundo año de la Educación Secundaria Obligatoria. Por último, se describen las distintas técnicas e instrumentos que se utilizaron para recoger y analizar la información.

4.1. Características de la investigación

Según Sabariego y Bisquerra (2014), el propósito de la investigación en educación es conocer, comprender y explicar la realidad educativa. Con este trabajo buscamos profundizar en el conocimiento relacionado con dos temas que, sobre la base de la opinión de distintos expertos, pueden ser considerados de gran importancia en el estudio de la Didáctica de la Matemática y, por lo tanto, también en la realidad educativa asociada a la educación matemática. El primero de ellos es el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas, conocimiento que ha sido reconocido como un factor de gran relevancia en el desempeño profesional del profesorado que enseña matemáticas y en la promoción del aprendizaje (Carrillo et al., 2014; Zakaryan et al., 2018) y determinante para la calidad de la enseñanza (Ball et al., 2005). El segundo tema que se aborda es el uso de los ejemplos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los ejemplos siempre han tenido un papel central en la enseñanza de esta disciplina (Bills y Watson, 2008; Suffian y Abdul, 2010) y resultan esenciales para la generalización, la abstracción y el razonamiento analógico (Zaslavsky, 2010; Zodik y Zaslavsky, 2007b).

Esta investigación se enmarca dentro del paradigma cualitativo interpretativo. Esta elección se basa en que las investigaciones cualitativas nos permiten realizar un estudio en profundidad de la compleja realidad social (Osses et al., 2006), siendo de gran relevancia en el ámbito de la educación porque nos permite reflejar, describir e interpretar la realidad educativa con el fin de llegar a su compresión (Dorio et al, 2014). Sandín (2003) define la investigación cualitativa como una actividad orientada a una compresión profunda de fenómenos educativos y sociales y Sabariego (2014) plantea que la finalidad del paradigma interpretativo, en el ámbito de la investigación en educación, es comprender e interpretar esta realidad. En nuestro caso buscamos, por medio de esta investigación, interpretar y comprender en profundidad cómo se relacionan los conocimientos especializados que moviliza un profesor al trabajar con diferentes tipos de ejemplos.

Para esta investigación realizaremos un estudio de caso. Según Durán (2012), el estudio de caso permite abordar un hecho, un fenómeno, un acontecimiento o una situación particular de manera profunda y en su contexto, lo que favorece una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, genera el mayor aprendizaje del caso en estudio. La situación que abordaremos es la relación de conocimientos especializados que se generan al trabajar con distintos tipos de ejemplos y, para esto, nos introduciremos en un aula de tercer año de Educación Secundaria, sin intervenir en el desarrollo de las clases, solo como observadores, con el propósito de observar la situación que nos interesa en un contexto de la vida real (Yin, 2002). Autores como Sabariego et al. (2014), Bartolomé (1992) y Durán (2012) concuerdan en que, desde la investigación cualitativa, el estudio de caso ha tenido gran relevancia en la comprensión y el desarrollo de la ciencia educativa. Para Soto y Escribano (2019) su importancia en la investigación educativa radica en que nos permite el desarrollo de un análisis profundo de la situación previamente determinada.

Stake (2007) identificó tres modalidades de estudios de casos diferenciados según el objetivo que persiguen: intrínsecos, el caso se estudia por el propio interés intrínseco que genera; instrumental, el caso pasa a un segundo plano, se escoge para estudiar un tema o pregunta determinada; y colectivo, se estudian varios casos para hacer una interpretación de un tema o pregunta determinada. Nosotros trabajaremos con un estudio de caso instrumental, observaremos y analizaremos las clases realizadas por un profesor al abordar la enseñanza de las sucesiones con el propósito de indagar en el conocimiento especializado que moviliza al trabajar con diferentes tipos de ejemplos.

4.2. Pregunta y objetivos de investigación

La pregunta de investigación que buscamos responder con esta investigación es:

> ¿Cómo son y cómo se relacionan los conocimientos especializados que moviliza un profesor al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas en la Educación Secundaria?

El objetivo principal que buscamos alcanzar para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación es comprender, a través de la observación de un conjunto de clases y de entrevistas, cómo se relacionan los distintos subdominios de conocimiento movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar diferentes tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas en la Educación Secundaria.

Los objetivos específicos que desarrollaremos son:

- Caracterizar los distintos ejemplos que utiliza el profesor sobre la base de tres aspectos: la finalidad educativa del ejemplo, la entidad matemática que está ejemplificando y si el profesor busca o no que los estudiantes interactúen con el ejemplo.

- Caracterizar los distintos conocimientos especializados que pone en juego el profesor al seleccionar y utilizar los distintos tipos de ejemplos, identificando los diferentes subdominios implicados, así como las relaciones entre ellos.
- Comparar las relaciones entre los distintos subdominios implicadas en la selección y uso de los distintos tipos de ejemplos, mostrando sus diferencias y similitudes.

4.3. Selección del caso de estudio

Para cumplir con el objetivo que hemos establecido para nuestra investigación, "comprender cómo se relacionan los distintos subdominios de conocimiento movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar diferentes tipos de ejemplos", seleccionamos un caso instrumental, el cual, dada las características del informante, nos permitirá profundizar en la compresión de nuestro tema de investigación. Nuestro informante, al que llamaremos Pablo, puede ser considerado como un profesor experto debido a los años de experiencia que posee como docente (Chi, 2011). Es un profesor de secundaria con 35 años de experiencia, ingeniero químico de formación. Se ha desempeñado como profesor de Física, Química y Tecnología y actualmente dicta las asignaturas de Matemática, Biología y Geología en un colegio concertado de la localidad de Huelva, centro en el cual realizaremos nuestra investigación. Este colegio está ubicado en un sector céntrico de la ciudad.

La observación de aula se realizó durante el periodo académico 2019/2020, en las clases de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de los dos últimos cursos de Educación Secundaria, tercero y cuarto de ESO. Seleccionamos para esta investigación las clases de tercer curso (estudiantes de 14-15 años) correspondientes al estudio de las sucesiones numéricas. Esta fue la única unidad que pudimos observar por completo, desde el momento en que el profesor introduce el concepto de sucesión hasta las clases orientadas a reforzar las dudas de los estudiantes antes de la evaluación de esta unidad. Esta información, en particular, nos permite analizar los distintos tipos de ejemplos que el profesor utiliza a lo largo de la enseñanza de una unidad en particular.

El curso seleccionado contaba con una matrícula de 25 estudiantes y las clases de esta asignatura se realizaban cuatro veces por semana, en bloques de 45 minutos, todos durante la jornada de mañana. Se observaba una participación constante de los estudiantes en cada clase, aunque destacaba un grupo de cuatro alumnas. Al final de cada clase el profesor se preocupa de dejar planteada alguna tarea o pregunta con la cual retomaba el discurso en la clase siguiente.

Pablo manifestó algunas creencias muy marcadas en relación con la enseñanza de las matemáticas. Para Pablo hay dos cosas que son muy importantes al abordar un nuevo concepto: primero, apelar a contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente; y, en segundo lugar, que los estudiantes comprendan el uso y la importancia que tiene en la vida diaria la unidad que están por estudiar.

4.4. Clasificación de ejemplos para esta investigación

Como se ha mencionado, para establecer qué entenderemos por ejemplo nos apoyaremos en la definición presentada por Zodik y Zaslavsky (2008). Consideraremos un ejemplo como un caso particular desde el cual se puede razonar, generalizar y evidenciar una particularidad de una entidad matemática. Para categorizar los ejemplos observaremos tres aspectos, si el profesor busca o no que los estudiantes interactúen con el ejemplo, la finalidad educativa del ejemplo, la entidad matemática que está ejemplificando.

Para determinar si el profesor busca o no que los estudiantes interactúen con el ejemplo, utilizaremos la categorización presentada por Karaagac (2004) sobre ejemplos activos y pasivos con una adaptación. Karaagac (2004) define los ejemplos activos como aquellos ejemplos con los cuales se busca la participación de la audiencia, considerando aquí a estudiantes y profesor. Nosotros nos centraremos solamente en la interacción que se genere con los estudiantes. De esta forma, si el profesor no busca generar la participación de sus estudiantes corresponderá a un ejemplo pasivo. Pero si durante el desarrollo del ejemplo el profesor busca propiciar la participación de los estudiantes será un ejemplo activo. Este primer aspecto lo seleccionamos porque nos permitirá comprender cómo son y cómo se relacionan los conocimientos especializados cuando el profesor busca o no la interacción de los estudiantes en su aprendizaje.

Para determinar la finalidad educativa del ejemplo utilizaremos dos de las categorizaciones mencionadas en apartados anteriores, la elaborada por Rowland et al. (2009), con adaptaciones, y la presentada Zodik y Zaslavsky (2007a), esta última con el propósito de darle un mayor contexto al trabajo que el profesor está desarrollando con el ejemplo. Rowland et al. (2009) diferenciaron entre ejemplos para la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos y ejemplos orientados a la familiarización y la práctica de nuevas ideas matemáticas. Tomaremos esta categorización, pero considerando las distintas entidades matemáticas mencionadas en la categorización de Zodik y Zaslavsky (2007ainte) (concepto, teorema y procedimiento/ algoritmo). De esta forma, diferenciaremos entre ejemplos enfocados a la enseñanza de conceptos, teoremas o procedimientos/algoritmos y ejemplos orientados a la práctica y familiarización de conceptos, teoremas y procedimientos/algoritmos.

Dados los distintos criterios que hemos establecido para clasificar los ejemplos, algunas de las clasificaciones que podríamos obtener serían:

- Corresponde a un ejemplo pasivo para la enseñanza de un concepto.

P. Un cuadrado corresponde a un polígono regular, si ustedes se fijan todos sus ángulos miden lo mismo al igual que los lados, todos tienen la misma medida

Con este ejemplo el profesor está abordando la enseñanza del concepto polígonos regulares, está mostrando a sus estudiantes cuáles son las condiciones que debe cumplir un polígono para ser considerado regular, sin generar interacción en los estudiantes.

- Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento

Nº de trabajadores	3	4		8	
Días de trabajo	24		12		6

P. La relación que existe entre la cantidad de trabajadores y los días que se requieren para terminar una obra es inversamente proporcional. Considerando lo que hemos estudiado determine los valores que faltan en la tabla.

El profesor está utilizando este ejemplo de proporcionalidad inversa para que los estudiantes practiquen el procedimiento que les permitirá obtener el término correspondiente para cada situación, corresponde a un ejemplo activo ya que genera interacción con los estudiantes.

4.5. Técnicas e instrumentos de recogida de información

Dado que nuestra investigación se enmarca dentro del paradigma cualitativo y corresponde a un estudio de caso instrumental, nuestra principal técnica de recogida de información fue la observación de clase. Esta observación se realizó por medio de la grabación en video y en audio de las clases. Para llevar a cabo la investigación se realizó una primera reunión con Pablo, el profesor informante. En ella le explicamos el propósito de la investigación y el uso que haríamos de las distintas grabaciones. Pablo coordinó una segunda reunión con la dirección del colegio, específicamente con el director y el inspector general, con quienes se acordó que solo se grabaría el trabajo realizado por el profesor, evitando en la medida de lo posible grabar a los estudiantes, y que las grabaciones no serían compartidas con personas ajenas a esta investigación.

Se grabaron un total de 22 clases, desde diciembre de 2019 hasta marzo de 2020, momento en el cual las grabaciones fueron suspendidas debido al Estado de Alarma decretado por la situación de crisis sanitaria ocasionada por el COVID-19. Para realizar las grabaciones se ubicó una cámara en el fondo de la sala, para grabar todo el trabajo que realizaba el profesor, y una grabadora de voz en el centro de la sala para obtener un registro claro de los diálogos que se generaban entre el profesor y los estudiantes. Si un estudiante salía a trabajar a la pizarra, se tapaba la lente de la cámara o se ponía apuntando hacia el techo de la sala hasta que el estudiante volviera a su asiento, esto con el propósito de cumplir con el compromiso realizado con las autoridades del colegio.

También realizamos algunos registros gráficos. Tomamos fotografías de las páginas del libro de matemáticas que el profesor utilizó en clases y de las páginas que dejaba como tarea a los estudiantes. Porque en ocasiones la grabación no nos permitía obtener información del ejercicio que estaban desarrollando, ya que el profesor se limitaba a indicar en qué página debían trabajar o qué ejercicios tenían que resolver para esa clase o para la clase siguiente.

Otro instrumento que utilizamos para obtener información fue la entrevista. Este instrumento nos permite documentar la opinión del entrevistado en relación con el tema en cuestión; favorece la implicación activa y el aprendizaje del entrevistador y el entrevistado en relación con el análisis de los temas; desvela y representa sentimiento y sucesos inobservados e inobservables; y su flexibilidad favorece cambiar su dirección y abordar temas emergentes (Simons, 2011). Según Kvale (2012), en la investigación cualitativa la entrevista es un lugar en donde se construye conocimiento, normalmente por medio de una entrevista semi-estructurada. Este tipo de entrevista tiene como propósito obtener información del mundo y de la vida del entrevistado con respecto al significado de ciertos fenómenos y requiere establecer previamente la secuencia de temas que se deben tratar y una serie de preguntas (Kvale, 2012). En nuestro estudio se utilizó la entrevista semi-estructurada con la intención de transformar los indicios de conocimiento en evidencias de conocimiento (Carrillo, 2017). Antes de realizar las entrevistas se conversó con Pablo para explicarle el propósito y la forma en que se llevarían cabo las entrevistas. Cada vez que se identificó algún indicio de conocimiento relacionado con la selección o el uso de ejemplos, se elaboró alguna o algunas preguntas que guiaban el dialogo que se generaba en la entrevista. Dado que las dos entrevistas se realizaron en el colegio y todavía existían algunas medidas de restricción por la situación sanitaria vivida por el COVID-19, hubo que reducir al máximo el tiempo de la entrevista y la cantidad de preguntas, situación que en algunos casos nos llevó a plantear preguntas generales que nos permitieran abordar varios indicios de conocimiento a la vez.

Tanto las entrevistas como las clases grabadas fueron transcritas de forma literal para su posterior análisis. En todas las transcripciones se utiliza la misma codificación para referirse a la persona que interviene en el dialogo: P para profesor, I para investigador y A para estudiante.

4.6. Técnicas e instrumentos de análisis de información

Para analizar la información se siguieron las tres fases descritas por Johnson et al. (2014): la descripción, el análisis y la interpretación. La descripción corresponde con la selección de los extractos de las transcripciones en los cuales se evidenciaba el uso de ejemplos por parte del profesor; en el análisis, identificamos los distintos subdominios de conocimiento que el profesor moviliza durante la selección y el uso de los ejemplos, describiendo las relaciones que se establecen entre ellos; y en la interpretación hacemos una revisión de todas las relaciones de subdominio identificadas en la selección y el uso de los distintos ejemplos, con el fin de establecer evidencias de las generalidades observadas.

Para lograr la validación del análisis realizamos algunos de los procesos de triangulación descritos por Stake (2007). La triangulación de las fuentes de datos; observamos si el fenómeno seguía siendo el mismo en distintos momentos, si la misma relación de subdominios de conocimiento seguía apareciendo en distintos episodios; y la triangulación del investigador; distintos investigadores observamos un mismo episodio.

Comenzamos el análisis con una revisión de los vídeos de las clases grabadas con el propósito de identificar los momentos en los cuales Pablo hacía uso de ejemplos. Junto con esto, transcribimos estas grabaciones utilizando el método más común, la transcripción literal, documentando las palabras que se dijeron junto con quién las dijo (Rapley, 2014). En algunos momentos, la transcripción es acompañada de un esquema que grafica el trabajo que estaba desarrollando el profesor. Una vez concluida la transcripción, seleccionamos los episodios que correspondían a los momentos en los cuales Pablo utilizó algún ejemplo, Estos se han codificado como $E.m.n.$ donde E señala que el episodio corresponde a un ejemplo; m indica el número de la sesión a la cual corresponde el ejemplo; y n al número del ejemplo en dicha sesión.

Una vez identificado el episodio, se procedió a categorizar el ejemplo sobre la base de los tres criterios descrito previamente: si el profesor busca generar interacciones con sus estudiantes, la finalidad educativa del ejemplo y la entidad matemática que se está ejemplificando. Cada episodio fue dividido en pequeños segmentos, los cuales corresponden a una o más líneas de la transcripción del episodio y nos permiten extraer información con respecto al conocimiento especializado movilizado por el profesor durante el uso y la selección de los ejemplos, (Schoenfeld, 2015). El análisis de los episodios lo realizamos con el modelo analítico MTSK, identificando en este proceso evidencias e indicios de conocimiento (Escudero-Ávila et al., 2016).

Las entrevistas que se realizaron con el propósito de transformar los indicios en evidencias de conocimiento se codificaron como $P.x.y.$, donde P indica que el extracto corresponde a una pregunta realizada durante la entrevista; x señala el número de la clase a la cual hace referencia la pregunta; e y al número del ejemplo en dicha clase. Estas entrevistas también nos proporcionaron información sobre las creencias que el profesor poseía en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, al igual que las grabaciones de las clases, fueron transcritas de forma literal y descompuestas en episodios para su análisis.

Cada conocimiento especializado, relacionado con la selección y el uso de ejemplos, que identificamos al analizar las transcripciones de las clases y de las entrevistas, fue ubicado y categorizado en el correspondiente subdominio del modelo MTSK (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018). Una vez que identificamos los conocimientos diferenciamos entre aquellos que correspondían a la selección del ejemplo y los que correspondían al uso. El criterio que establecimos para esta clasificación se centró en la evidencia que obtuvimos del conocimiento: si el *conocimiento A* se sustentaba en una evidencia que se manifestaba en las acciones que realizaba el profesor al momento de realizar el ejemplo, considerábamos al *conocimiento A* como un conocimiento correspondiente al uso del ejemplo, pero si la evidencia no se sustentaba en las acciones que realizaba el profesor al desarrollar el ejemplo, el *conocimiento A* correspondería a la selección del ejemplo.

P: Vosotros habéis trabajado ya las sucesiones cuando erais pequeñitos en primaria, muchas de las actividades que os han puesto eran experiencias de sucesiones por una razón, porque os pedían que descubrierais ustedes ¿cuál es la lógica?, a ti te dan unos datos, que no están puestos de cualquier manera y por cualquier cosa, sino que hay una lógica, y te decían "oye pon tú el siguiente" y tú te ponías a mirar, te dabas cuenta de la lógica que había ahí, de la razón que estaba detrás de lo que tú estabas viendo, y tú eras capaz de poner el siguiente y el siguiente.

I: ¿Por qué selecciona un ejemplo que se basa en los patrones para introducir las sucesiones?

P: Porque el conocimiento se basa en lo previo, si tú no tienes asimilado, no has comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo y en este caso los patrones nos ayudan a entender las sucesiones.

En este episodio vemos al profesor presentado un ejemplo con el cual busca mostrar a sus estudiantes la importancia de conocer el patrón que está detrás de una sucesión. En él hemos identificado evidencia de distintos subdominios de conocimiento. Las acciones realizadas por el profesor durante el desarrollo de este ejemplo nos dan evidencia de algunos conocimientos, los cuales formarían parte del uso del ejemplo; el profesor conoce la importancia de conocer el patrón que está detrás de la construcción de una sucesión para poder continuar con la construcción de los términos (KoT; procedimientos) y uno de los procedimientos que los estudiantes han utilizado al estudiar patrones en cursos anteriores (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Los otros conocimientos los evidenciamos en el preámbulo que el profesor realiza antes del ejemplo y durante la entrevista. El profesor reconoce los patrones como un contenido que los estudiantes han trabajado en cursos anteriores y que se relaciona con las sucesiones (KMLS; secuenciación de temas) y sabe que el trabajo que han desarrollado al abordar los patrones, la búsqueda de la regularidad para continuar con la construcción de los términos puede favorecer la presentación del concepto *término general* (KSM; conexiones de simplificación). En la entrevista también encontramos evidencia de una creencia en relación con cómo se va construyendo el aprendizaje: el profesor cree que el conocimiento se va construyendo en base a los saberes previos.

Después de determinar si los conocimientos movilizados por el profesor formaban parte de la selección o del uso del ejemplo, buscamos establecer las relaciones entre los subdominios de conocimiento. En una primera instancia analizamos los conocimientos por separado; en primer lugar, analizábamos y establecíamos las relaciones entre los conocimientos que el profesor movilizaba durante la selección del ejemplo y después realizamos el mismo procedimiento con los conocimientos movilizados por el profesor al utilizar el ejemplo. Esta forma de analizar los resultados nos generó algunas dificultades al establecer las relaciones entre los conocimientos que el profesor movilizaba durante el uso del ejemplo porque, en algunos casos, no encontrábamos relaciones entre ellos, pero sí se evidenciaban relaciones entre estos conocimientos y los movilizados durante la selección del ejemplo. La posibilidad de dejar todas estas relaciones fuera de nuestro análisis nos llevó a cambiar la forma en que estábamos analizando los datos obtenidos.

Por esta razón decidimos analizar los datos obtenidos de la siguiente forma. En primer lugar, nos centramos en los conocimientos que formaban parte de la selección del ejemplo, identificando las posibles relaciones entre los distintos subdominios de conocimiento. Pero, al analizar las relaciones generadas durante el uso del ejemplo, consideramos todos los conocimientos que el profesor movilizó durante el desarrollo del ejemplo, tanto los que formaban parte de la selección, como los del uso del ejemplo.

Registramos los ejemplos orden cronológico. Antes de cada ejemplo describimos el contexto en el cual se está desarrollando, el propósito que tiene en el desarrollo de la clase y la clasificación que le corresponde con base en los tres criterios que hemos establecido. Luego presentamos evidencia de los distintos conocimientos que el profesor movilizó durante la selección del ejemplo, identificando subdominio de conocimiento y categoría correspondiente (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018). Y finalmente describimos las relaciones que identificamos entre los distintos subdominios de conocimientos, de forma escrita y por medio de un esquema. Este proceso se repite para analizar las relaciones entre subdominios de conocimiento durante el uso del ejemplo, en este caso se consideran todos los conocimientos, los correspondientes a la selección y al uso del ejemplo.

5. Análisis de la información

En este capítulo se presenta el análisis que realizamos de la información obtenida. Seleccionamos aquellas sesiones en las que observamos un mayor uso de ejemplos por parte del profesor. En cada apartado se comienza con una descripción general del trabajo realizado por el profesor en la sesión y luego se presenta el análisis que nos permitió obtener evidencias de las relaciones entre los distintos subdominios de conocimiento, tanto en la selección (cuando corresponde) como en el uso de los ejemplos. Utilizaremos distintas flechas para señalar cada relación: → sustenta (sirve de apoyo para); ↠ evoca (invoca, llama, trae a primer plano); ↔ se complementan. Al final del análisis de cada ejemplo se presenta un esquema gráfico de las relaciones que observamos, tanto en su selección, como en su uso; no pretendemos con ello mostrar un orden en las relaciones, sino solo facilitar la visualización de estas.

A continuación, se presenta el análisis que realizamos de las cinco sesiones que seleccionamos para esta investigación. Después de revisar todas las sesiones que el profesor realizó para abordar las sucesiones numéricas seleccionamos las primeras cinco porque:

- Corresponden a las sesiones en las cuales el profesor utilizó más ejemplos;
- Nos permiten analizar ejemplos de todo el contenido que se estudia al abordar las sucesiones numéricas (sucesiones, progresiones geométricas y aritméticas);
- Observamos una saturación de la información, aparecían las mimas relaciones que ya habíamos observado en ejemplos anteriores.

Los ejemplos se presentan en orden cronológico. En cada caso se comienza con una descripción del contenido que el profesor está abordando, junto con la clasificación que le corresponde al ejemplo. La descripción de las relaciones de subdominio que observamos en la selección y el uso de cada ejemplo es acompañada de un esquema gráfico. En este esquema se representan de color verde los subdominios del MK, de color naranjo los subdominios del PCK y de color azul las creencias. Mientras que los conocimientos correspondientes a la selección del ejemplo se escriben con color negro y los correspondientes al uso en color azul.

5.1. Sesión 1

Esta primera sesión corresponde a la clase en la cual el profesor comienza a desarrollar el contenido de sucesiones. Comienza explicando algunos de los usos que tienen las sucesiones en la vida diaria, recuerda a los estudiantes el trabajo que han desarrollado al trabajar los patrones en cursos anteriores y presenta algunos ejemplos de sucesiones. Comienza con una sucesión no numérica para luego continuar con algunas sucesiones numéricas; en todos los casos el trabajo consiste en determinar algunos términos de la sucesión y establecer el término general.

El primer episodio (ejemplo 1.1) corresponde al instante en que el profesor comienza a desarrollar el estudio de las sucesiones. Corresponde a un ejemplo pasivo para la enseñanza de un concepto. Comienza con un ejemplo enfocado en la enseñanza de un concepto; el profesor introduce el concepto de sucesión mediante la ejemplificación de algunas aplicaciones que tienen las sucesiones en la vida cotidiana. No busca interacción con los estudiantes, solo dar a conocer estas aplicaciones para motivar a los estudiantes en el estudio de las sucesiones.

P: Hay situaciones en la vida cotidiana, en las cuales la clave está en que se comportan en función de una sucesión, si tú eres capaz de descubrir cuál es y sobre todo controlarla, estas controlando todo el fenómeno. Es decir, te puedes adelantar al futuro porque sabes qué va a pasar, porque estás controlando la sucesión, sabes qué va a ocurrir en el momento que te interese, pero también sabes qué pasó, porque has controlado qué mecánica, qué dinámica, qué forma de evolucionar tiene ese fenómeno.

(E.1.1)

En este episodio observamos indicios de conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) y sobre aspectos emocionales (KFLM) movilizado por el profesor al desarrollar este ejemplo. Con el propósito de obtener información que nos permita transformar estos indicios en evidencia de su conocimiento, en la entrevista, realizamos la siguiente pregunta[1].

I. ¿Por qué en los ejemplos, que utiliza para la enseñanza de las matemáticas, apela a situaciones cotidianas?

P. Capta la atención y crea expectación, si encima es algo muy asequible a la vida suya y directa, es significativo para ellos, y entonces en parte busco la garantía de que atiendan a una situación para luego ver cómo se puede resolver.

(P.1.1)

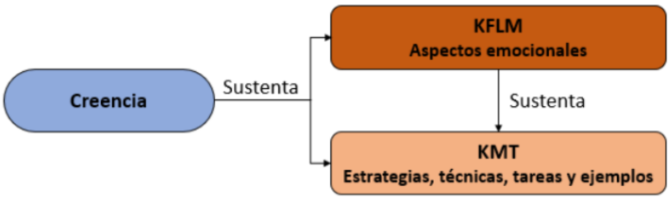
La respuesta entregada por el profesor nos da evidencia de una creencia que tiene en relación con la enseñanza de las matemáticas. Para Pablo, los ejemplos que involucran situaciones cotidianas captan la atención y crean expectación en los estudiantes (P.1.1., 3). También observamos evidencia de los subdominios que influyeron en la selección de este ejemplo. Sabe que el ejemplo que ha presentado sobre usos cotidianos de las sucesiones ayuda a que los estudiantes se involucren con el desarrollo de este tema (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.1., 4-5) y que para los estudiantes resulta significativo conocer las aplicaciones prácticas que pueden tener las sucesiones (KFLM; aspectos emocionales – P.1.1., 4). Evidenciamos así, en la selección de este ejemplo, una relación entre la creencia que ha manifestado y los subdominios KFLM y KMT. El conocimiento que Pablo posee sobre lo significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones prácticas que pueden tener las sucesiones (KFLM) y su conocimiento sobre lo favorable que resulta este ejemplo (que apela a situaciones cotidianas) para que los estudiantes se involucren con el desarrollo de las sucesiones (KMT), se sustentan en su creencia de que los ejemplos que apelan a situaciones cotidianas crean expectación en los estudiantes. También evidenciamos una relación entre estos dos subdominios, en este caso su conocimiento sobre los significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones prácticas que pueden tener las sucesiones (KFLM), sustenta

[1] La pregunta se plantea de forma general porque hemos observado que apelar al uso de situaciones cotidianas en los ejemplos es algo habitual en su labor docente, con ella se busca evidenciar sí existen y cuáles serían los subdominios se su MTSK que sustentan la elección de estos ejemplos.

su conocimiento sobre lo favorable que resulta este ejemplo para involucrar a los estudiantes en el desarrollo de las sucesiones, generándose la relación $KFLM \rightarrow KMT$.

Figura 7

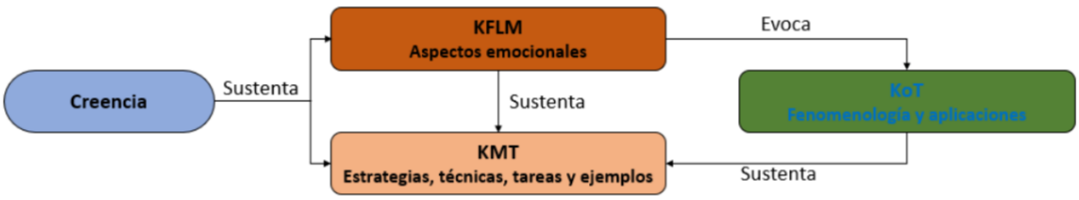
Relaciones entre los subdominios durante la selección del E.1.1.



Durante el uso de este ejemplo encontramos evidencia de conocimiento correspondiente a la categoría de fenomenología y aplicaciones (KoT) movilizado por el profesor, Pablo muestra conocer algunas aplicaciones cotidianas que se les pude dar a las sucesiones (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.1.1., 1-7). De esta forma, evidenciamos durante el uso de este ejemplo una relación $KFLM \twoheadrightarrow KoT$: su conocimiento sobre la forma en que los estudiantes actúan frente a los ejemplos que apelan a situaciones cotidianas (KFLM) evoca a su conocimiento sobre los usos cotidianos que puede tener la sucesión (KoT). Y una relación $KoT \rightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre los usos cotidianos de las sucesiones (KoT) sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta este ejemplo, que apela a una situación cotidiana, para involucrar a los estuantes en el desarrollo de las sucesiones (KMT).

Figura 8

Relaciones entre los subdominios durante el uso del E.1.1.



En el siguiente episodio (ejemplo 1.2) podemos ver al profesor enfatizando en la importancia de conocer el patrón de la sucesión. Utiliza un ejemplo pasivo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor ejemplifica una situación que le permite abordar la importancia de conocer el término general que está detrás de una sucesión, buscando destacar que esta información es la que nos permite continuar con el proceso de construcción de los términos de la sucesión. Se limita a describir el trabajo que sus estudiantes han desarrollado en cursos anteriores, sin generar interacción entre la ejemplificación y los estudiantes.

1 P: Vosotros habéis trabajado ya las sucesiones cuando erais pequeñitos en primaria,
2 muchas de las actividades que os han puesto eran experiencias de sucesiones por
3 una razón, porque os pedían que descubrierais ustedes ¿cuál es la lógica?, a ti te
4 dan unos datos, que no están puestos de cualquier manera y por cualquier cosa,
5 sino que hay una lógica, y te decían "oye pon tú el siguiente" y tú te ponías a
6 mirar, te dabas cuenta de la lógica que había ahí, de la razón que estaba detrás
7 de lo que tú estabas viendo, y tú eras capaz de poner el siguiente y el siguiente.

(E.1.2.)

El episodio E.1.2. nos da indicios de que, durante la selección de este ejemplo, el profesor habría movilizado conocimientos correspondientes a las categorías de conexiones de simplificación (KSM) y secuenciación de temas (KMLS); con el propósito de indagar en estos y otros conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo, realizamos las siguientes preguntas[2].

1 I: ¿Por qué al momento de seleccionar los ejemplos apela constantemente a
2 contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente?
3 P: Porque el conocimiento se basa en lo previo, si tú no tienes asimilado, no has
4 comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo.
5 I: ¿Por qué les recuerda que habían trabajado con patrones en primaria?
6 P: Sí, es que es algo que ellos habían estado trabajando de pequeñitos en primaria
7 y porque detrás de todo ello hay un patrón, que si descubres el patrón puedes
8 manejar cómodamente la sucesión.

(P.1.2.)

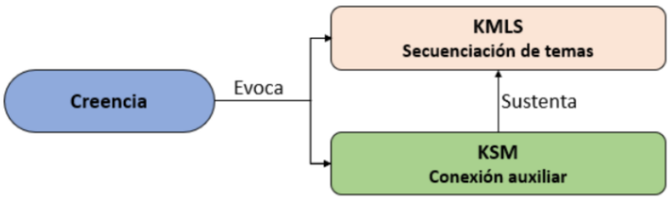
La respuesta entregada por el profesor pone de manifiesto su creencia en relación con cómo se va construyendo el aprendizaje. Para Pablo el aprendizaje de los nuevos conocimientos se sustenta en los saberes previos que poseen los estudiantes (P.1.2., 3-4). Esta respuesta, junto con el episodio E.1.2., también nos da evidencia de los subdominios movilizados por el profesor durante la selección del ejemplo. Pablo reconoce los patrones como un contenido que los estudiantes han trabajado en cursos anteriores y que se relaciona con las sucesiones (KMLS; secuenciación de temas – P.1.2., 6-7; E.1.2., 1-3) y establece una relación entre la regla que define la construcción de un patrón y el término general de una sucesión (KSM; conexiones auxiliares – P.1.2., 7-8).

[2] La primera pregunta se plantea de forma general ya que hemos observado que en varios ejemplos el profesor apela a los conocimientos previos, con ella se busca evidenciar si existen y cuáles serían los subdominios se su MTSK que sustentan la elección de estos ejemplos.

Durante la selección de este ejemplo evidenciamos una relación entre la creencia que Pablo posee “la creación de nuevo aprendizaje se sustenta en los saberes previos de los estudiantes” y su KMLS y KSM. Esta creencia evoca el conocimiento que Pablo posee sobre la relación que existe entre la regla que define la construcción de un patrón y el término general de una sucesión (KSM), el cual sustenta al otro conocimiento evocado por su creencia, su conocimiento sobre los patrones como un contenido que se estudia en cursos anteriores y que se relaciona con las sucesiones (KMLS). Establecemos, así, una relación $KSM \rightarrow KMLS$, la cual le permite seleccionar un ejemplo coherente con su creencia.

Figura 9

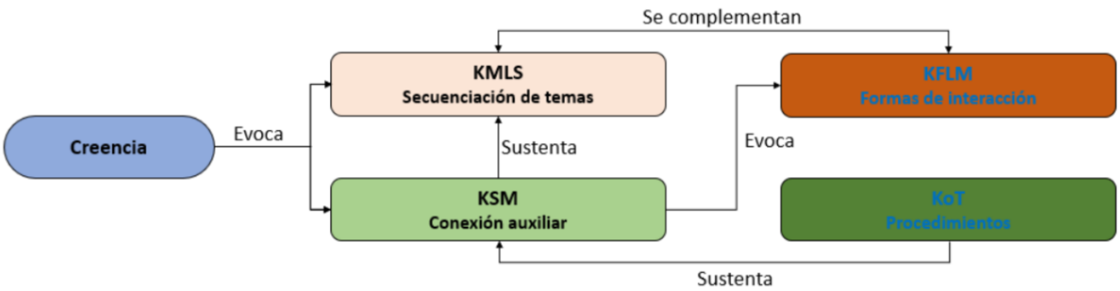
Relaciones entre los subdominios durante la selección del E.1.2.



En el episodio E.1.2. también encontramos evidencia de los subdominios movilizados por el profesor al utilizar este ejemplo. Pablo conoce algunas de las estrategias que los estudiantes suelen utilizar al resolver patrones (KFLM; formas de interacción con un contenido matemático – E.1.2.; 1-4) y conoce la importancia de comprender la regla que está detrás de la construcción de una sucesión para poder continuar con la construcción de sus términos (KoT; procedimientos – E.1.2.; 4-8). Considerando estos dos conocimientos y los mencionados anteriormente, hemos evidenciado durante el uso de este ejemplo distintas relaciones. Una relación $KMLS \leftrightarrow KFLM$, el conocimiento que Pablo posee de los patrones, como un tema que se relaciona con las sucesiones (KMLS), se complementa con el conocimiento que posee sobre las estrategias que se utilizan al estudiar patrones (KFLM), esta relación favorece el desarrollo de este ejemplo que se basa en conocimientos previos. Una relación $KSM \twoheadrightarrow KFLM$, el conocimiento de la relación que hay entre la regla que define la construcción de un patrón y el término general de una sucesión (KSM) evoca el conocimiento que el profesor posee sobre algunas de las estrategias utilizadas por sus alumnos al estudiar los patrones (KFLM), esta relación le permite abordar la importancia del término general de la sucesión apelando al conocimiento que poseen sobre los patrones. También evidenciamos una relación $KoT \rightarrow KSM$, su conocimiento sobre la función del término general de una sucesión (KoT) sustenta la conexión que establece entre este término y la regla que define la construcción de un patrón (KSM).

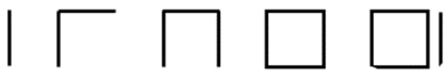
Figura 10

Relaciones entre los subdominios durante el uso del E.1.2.

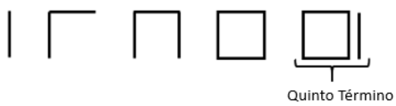


En el siguiente episodio (ejemplo 1.3) nos encontramos con el primer ejemplo de sucesión que presenta el profesor, la cual corresponde a una sucesión no numérica. Desarrolla un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. Se puede observar cómo el profesor utiliza esta sucesión no numérica para ejemplificar la importancia de identificar el patrón que está detrás de la sucesión antes de continuar con el procedimiento de construcción de los términos.

P: Os voy a poner la siguiente figura.



P: Esta no es numérica, veis que no es numérica, las primeras que hicisteis vosotros
no eran numéricas, eran situaciones, cosas, seguíais un patrón, un orden.
P: ¿Cuál es el patrón que sigue esta?
A: Que tiene que empezar de nuevo, ¿no?
P: Mira el patrón que sigue aquí, ¿qué patrón sigue? ¿cuál sería el siguiente? Este
es el último término que he puesto hasta ahora, lo digo porque no interpretéis
que son distintos.



P: Este es el mismo, un término, dos términos, tres, cuatro, cinco, este es el quinto
termino. Vale.
A: Va otro palito.
P: Pero dime cómo.
A: Arriba.
P: Pero puedes indicarlo, porque tienen un…, puedes expresarlo en tu idioma, no.
A: Vertical.
P: Esto es vertical (señalando el que ya está dibujado).
A: Horizontal
P: A horizontal, cómo así □∟ o así □┌
A: Arriba.
P: Ah vale, y el siguiente.
A: Para abajo.

(E.1.3.)

Este episodio nos da indicios de su conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) y sobre secuenciación de temas (KMLS), conocimientos que podrían haber actuado en la selección de este ejemplo. Con el propósito de obtener evidencias de estos y otros subdominios que podrían estar asociados a este proceso de selección, realizamos a Pablo las siguientes preguntas.

I: ¿Por qué al momento de seleccionar los ejemplos apela constantemente a contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente?
P: Porque el conocimiento se basa en lo previo, si tú no tienes asimilado, no has comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo.
I: ¿Por qué la primera sucesión que presenta corresponde a una no numérica?
P: Por algo que ellos han tocado, ellos han hecho muchas sucesiones de pequeñitos, en infantil y en primaria, y entonces en ese momento ellos descubrían cuál es la clave, que era una cosa muy fácil, entonces simplemente mostrar que detrás de todo eso hay un clave que conviene descubrir, que sea sencilla o no sea sencilla es otra cosa. Y entonces, como diría yo, partía de algo que entendía era significativo para ellos, algo que ya conocían, algo que ellos ya manejaban, algo que les recordaba que estas cosas ya las habían hecho, que no le ponían el nombre de sucesiones, a lo mejor, pero enlazaba con algo que ya estaba en su propia experiencia.

(P.1.3.)

Las respuestas entregadas por el profesor nos permitieron obtener evidencia de la creencia y de los distintos subdominios que operaron en la selección de este ejemplo. Como ya se ha mencionado, Pablo cree que el conocimiento se va construyendo sobre los saberes previos que poseen los estudiantes (P.1.3., 3-4). El profesor también manifiesta que conoce la forma en que se suele trabajar con las sucesiones no numéricas (patrones) en la educación infantil y primaria (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático – P.1.3., 6-7). Sabe que las capacidades que los estudiantes desarrollan al trabajar con sucesiones no numéricas (patrones) pueden contribuir al estudio de las sucesiones (KMLS; secuenciación de temas – P.1.3., 7-9) y que la función que cumple el patrón que está detrás de la construcción de la sucesión no numérica se puede asociar al rol que cumple el término general de una sucesión numérica (KSM; conexiones de simplificación – P.1.3., 8-9; E.1.3., 5). También observamos que el profesor sabe que el ejemplo seleccionado, la sucesión no numérica, es apropiado para que los estudiantes descubran la clave (el término general) que hay detrás de su construcción y lo conveniente que resulta conocer este término (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.3., 8-9) y que resulta interesante para los estudiantes, ya que al basarse en temas que ellos ya conocen les resultará significativo (KFLM; aspectos emocionales – P.1.3., 10-12).

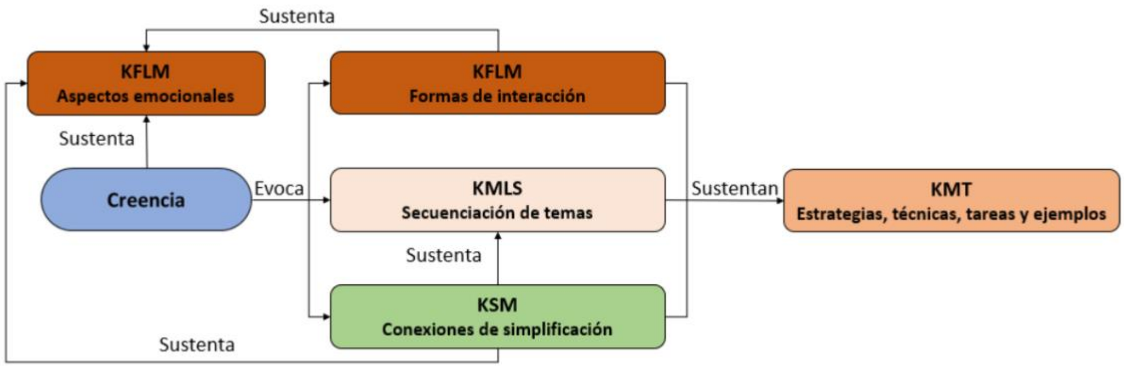
Durante la selección de este ejemplo hemos evidenciado distintas relaciones. La creencia que Pablo ha manifestado “el aprendizaje de los nuevos conocimientos se sustenta en los saberes previos que poseen los estudiantes" ha evocado un conjunto de conocimientos que le permiten seleccionar un ejemplo coherente con su creencia, en este caso un ejemplo de sucesión no numérica para comenzar el estudio de las sucesiones. De esta forma vemos que su creencia ha evocado conocimiento correspondiente a su KFLM, su conocimiento sobre la forma en que se suele trabajar con las sucesiones no numéricas (patrones) en la educación infantil y primaria; a su KMLS, su conocimiento sobre que las capacidades que los estudiantes han desarrollado al trabajar con patrones pueden contribuir al estudio de las sucesiones; a su KSM, su conocimiento sobre la conexión que existe entre el patrón que estas detrás de la construcción de una sucesión no numérica y el término general de una sucesión. Evidenciamos en este punto una relación $KSM \rightarrow KMLS$, relación que parece ser determinante para la selección de una sucesión no numérica para este ejemplo. Su conocimiento sobre la conexión que existe entre el término general de una sucesión y el patrón que está detrás de la construcción de una sucesión no numérica (KSM) sustenta su conocimiento sobre que las capacidades que los estudiantes desarrollaron al trabajar con patrones (sucesiones no numéricas) pueden contribuir al estudio de las sucesiones (KMLS).

También evidenciamos una relación entre estos tres subdominios y su KMT. Estos subdominios sustentan su conocimiento sobre lo apropiado que resulta este ejemplo de sucesión no numérica para que los estudiantes descubran el término general que está detrás de su construcción y la importancia de conocer este término. Esto porque Pablo conoce la conexión que se puede establecer entre el patrón que está detrás de la construcción de una sucesión no numérica y el término general de una sucesión numérica (KSM); y porque sabe que las capacidades que los estudiantes desarrollaron al estudiar patrones pueden contribuir al estudio de las sucesiones (KMLS), dado que esta sucesión no numérica es similar a las que solían trabajar en la educación infantil y primaria al estudiar patrones (KFLM), estableciéndose la relación $(KSM \rightarrow KMLS/KFLM) \rightarrow KMT$.

Por último, en la selección de este ejemplo evidenciamos otras relaciones que involucran su conocimiento sobre aspectos emocionales correspondientes a su KFLM. El conocimiento que Pablo posee sobre lo interesante y significativo que resulta este ejemplo de sucesión no numérica para los estudiantes (KFLM), se sustenta en su creencia sobre cómo se va construyendo el nuevo aprendizaje y en su KSM y KFLM; estos subdominios le permiten saber que las sucesiones no numéricas se suelen utilizar en educación infantil y primaria al estudiar patrones (KFLM) y que el rol que cumple el patrón que está detrás de su construcción se puede asociar al rol del término general de una sucesión numérica (KSM), en resumen le permiten ver que este ejemplo se basa en un conocimiento previo que se puede conectar a las sucesiones numéricas, estableciéndose la relación $KFLM/KSM \rightarrow KFLM$.

Figura 11

Relaciones entre los subdominios durante la selección del E.1.3.

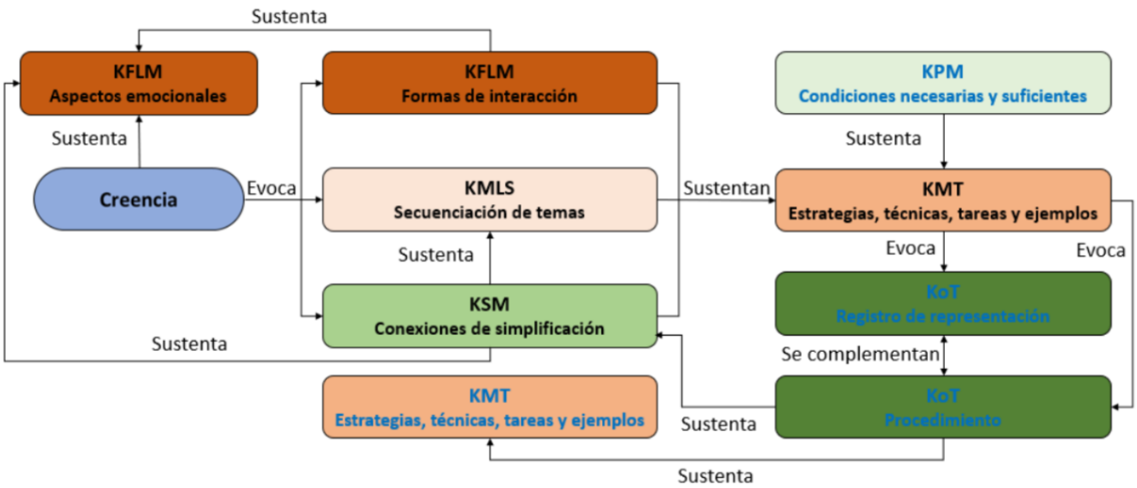


Del mismo modo, el episodio E.1.3. nos permitió obtener evidencia de los subdominios de conocimiento movilizados por el profesor durante el uso de este ejemplo. Pablo sabe construir y representar la sucesión no numérica que ha seleccionado (KoT; procedimientos y registros de representación – E.1.3., 1-2) y conoce los elementos necesarios y suficientes que permiten determinar el patrón de la sucesión (KPM; condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones – E.1.3., 2). También vemos como su conocimiento le permite superar el obstáculo que generaba el quinto término de la sucesión, (KMT; estrategia, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.3., 5 -12).

Durante el desarrollo de este ejemplo identificamos distintas relaciones asociadas a su KMT. El conocimiento que posee sobre el potencial de esta sucesión no numérica (KMT) evoca distintos conocimientos asociados a su KoT, los cuales se complementan y le permiten construir (KoT) y representar (KoT) el ejemplo de sucesión que ha seleccionado, estableciéndose la relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. También encontramos evidencia de una relación $KPM \rightarrow KMT$, ya que el conocimiento que posee sobre los elementos de la sucesión necesarios y suficientes para determinar el patrón (KPM) sustenta su conocimiento de lo pertinente que resulta este ejemplo para que los estudiantes identifiquen el patrón (KMT). Finalmente, encontramos una relación $KoT \rightarrow KMT$ y una $KoT \rightarrow KSM$. El conocimiento que Pablo posee sobre cómo se va construyendo la sucesión (KoT) le permite actuar para superar el obstáculo que el quinto elemento está generando en los estudiantes (KMT) y establecer una relación entre el patrón que está detrás de la construcción de la sucesión no numérica y el rol que cumple el término general de una sucesión numérica (KSM). sustentando a su KMT y a su KSM.

Figura 12

Relaciones entre los subdominios durante el uso del E.1.3.



El ejemplo que se describe en el siguiente episodio (ejemplo 1.4) se desarrolla después de que los estudiantes identificaron el patrón que está detrás de la sucesión no numérica. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor busca destacar que no basta con conocer el patrón, es necesario construir el término general para continuar con la construcción de los términos de una sucesión, especialmente cuando se busca determinar términos de generalización lejana. En este caso Pablo busca que los estudiantes participen del desarrollo del ejemplo.

P: ¿Creéis que controláis la sucesión?
A: Yo sí.
P: Tú crees que sí, vale. Tú me podrías decir cuál es el término 108 de esto.
A: Hay que buscar una fórmula, ¿no?
P: Ah, ¿podría buscar yo una fórmula que me permita buscar el término 108?
A: 108 entre 4.
P: Él está ya razonando, muy bien ya estás haciendo razonamiento, pero veis que no es tan fácil controlar las sucesiones, porque si yo te pido que me digas el 108, tan inmediato no es, y te estás dando cuenta de que la clave no está en que te pongas el siguiente, el siguiente, hasta llegar a eso, no, porque cuando te interese un término muy lejano…, la cuestión no es que partas buscando uno a uno el término.

(E.1.4.)

En este episodio podemos encontrar evidencias del KoT movilizado por el profesor e indicios de conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT); con el propósito de indagar en este indicio y en los conocimientos que movilizó al seleccionar este ejemplo le realizamos la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué les pide determinar un término de generalización lejana (108)?

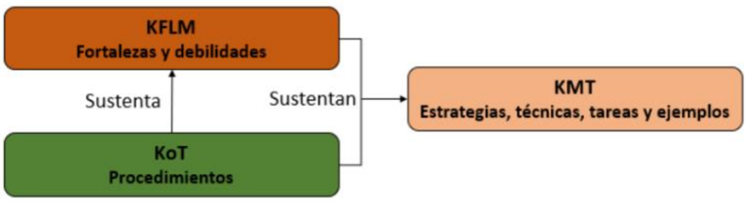
P: Para que vean la ventaja que tiene controlar una sucesión, que no importa que sea el cuatro o un número más grande, tú cómodamente con un cálculo similar llegas a cualquier término porque tienes el término general, que sí tú no lo tuvieras, a lo mejor, si has controlados la clave te puede tomar tres semanas para llegar.

(P.1.4.)

La respuesta entregada por Pablo nos da evidencia de los conocimientos movilizados por él durante la selección de este ejemplo. El profesor sabe que para los estudiantes resultará complejo determinar el término 108 si no conocen el término general de la sucesión (KFLM; fortalezas y dificultades – P.1.4., 4-6); que el término general de la sucesión nos permite determinar, de forma cómoda, cualquier término de la sucesión (KoT, procedimientos – P.1.4., 3-4) y conoce el potencial de este ejemplo, pues Pablo sabe que buscar el término 108 le permite mostrar a los estudiantes lo favorable que resulta trabajar con el término general de la sucesión al momento de buscar cualquier término (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.4., 2-4). Por tanto, en la selección de este ejemplo evidenciamos una relación $KoT \rightarrow KFLM$, el conocimiento que Pablo posee sobre lo cómodo que puede resultar determinar cualquier término de una sucesión por medio del término general, sustenta su conocimiento sobre lo complejo que resultaría para los estudiantes determinar el término 108 sin conocer el término general de la sucesión (KFLM). También se evidencia cómo estos dos subdominios sustentan el KMT, su conocimiento sobre lo cómodo que resulta determinar cualquier término de la sucesión por medio del término general (KoT) y sobre lo complejo que sería para los estudiantes determinar el término 108 sin el termino general (KFLM), sustentan su conocimiento sobre lo pertinente que resulta este ejemplo para que los estudiantes vean lo favorable de trabajar con el término general al buscar cualquier término de una sucesión (KMT), estableciéndose la relación $(KoT/KFLM) \rightarrow KMT$.

Figura 13

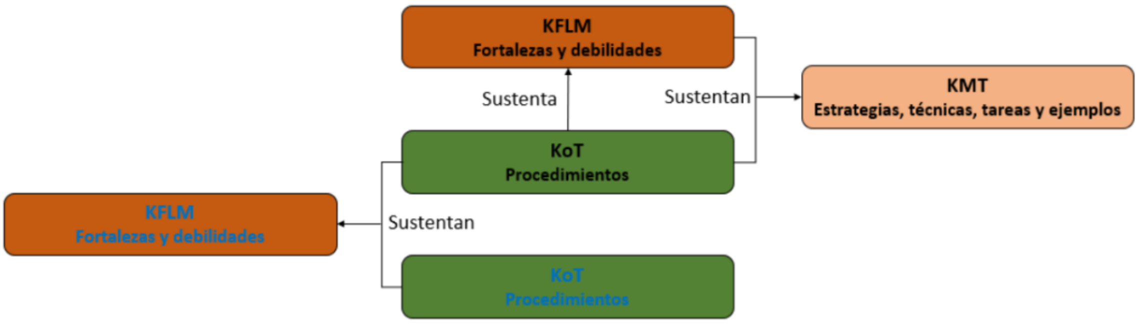
Relaciones entre los subdominios durante la selección del E.1.4.



Los episodios E.1.4. y P.1.4. también nos permiten obtener evidencia de los distintos conocimientos movilizados por Pablo durante el desarrollo de este ejemplo. El profesor sabe que algunos estudiantes tienen la idea de que ir construyendo cada uno de los términos es la forma más apropiada para obtener cualquier término de la sucesión (KFLM, fortalezas y dificultades – E.1.4., 1-2) y sabe cuál es el término general de la sucesión que están desarrollando (KoT, Procedimientos – E.1.4., 5-7). De esta forma, durante el uso de este ejemplo, evidenciamos una relación $KoT \rightarrow KFLM$. Que Pablo sepa cuál es el término general de la sucesión que están desarrollando (KoT) y lo cómodo que resulta buscar cualquier término de una sucesión por medio del término general (KoT), sustenta su conocimiento sobre lo errada que resulta la idea que manifiestan algunos estudiantes, al creer que la construcción sucesiva de los términos es la forma más apropiada de obtener cualquier término de una sucesión (KFLM).

Figura 14

Relaciones entre los subdominios durante el uso del E.1.4.



El ejemplo que se describe en el siguiente episodio (ejemplo 1.5) se desarrolla cuando el profesor escucha la conclusión expresada por un estudiante al obtener el término general de la sucesión no numérica propuesta. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. El profesor busca mostrar a los estudiantes que el término general que han definido es para esta sucesión en particular y que cada sucesión tiene su propio término general, independiente del parecido que tengan entre ellas. En el desarrollo de este ejemplo, Pablo motiva la participación de los estudiantes.

A: Pero entonces siempre es de cada cuatro, ¿no?
P: En este caso que yo acabo de poner, tú imagínate que te cambio la serie ahora, esta es una serie, pero mira esta otra, cuando yo llegué aquí (señalando el quinto término de la serie 1) ahora cambio la serie, hago esto, ya no hago lo de antes, ya no es exactamente igual (serie 2).

A: Ahora se divide entre cinco.
P: Por ejemplo, claro se dividiría entre cinco… esta podría ser otra serie totalmente distinta.

A: Entre seis cada una.
P: No, no, no, entre cinco, entre cinco, y el siguiente sería…. Pero si yo hago esto ahora…

A: Entre seis.
P: Todavía no he llegado a una unidad clara, todavía no tenéis datos suficientes, pero si yo ahora hiciera esto, tú sabes que hay que dividir entre cuántos. Entre seis

A: Entre seis.
P: Y empezaría a formar la siguiente figura.
P: Pero si yo no hago eso, y hago esto para el siguiente.

P: Tengo una serie diferente, ya es distinta, y si pongo aquí el uno, un palito más (al final de la serie) pues tú sabes que hay que dividir entre siete, y no entre cuatro, ni entre cinco, ni entre seis. Para seguir la lógica, lo estás viendo, depende de qué serie tenga, tengo que buscar lógica, cada cofre tiene una llave, cada serie tiene una llave. Por muy parecido que sea el cofre, porque estamos hablando de cuadritos y cosas, y palitos que además... la serie si no es la misma, tengo que tener otra llave para abrir el cofre. ¿Habéis entendido? Por poner un ejemplo, podemos muchos ejemplos diferentes.

(E.1.5.)

Con el propósito de indagar en un indicio de su conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT)observado en el desarrollo del ejemplo, le realizamos la siguiente pregunta[3].

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estás con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

(P.1.5.)

El episodio E.1.5 y la entrevista P.1.5. nos dan evidencia de una creencia y de los distintos subdominios movilizados por el profesor durante el uso del ejemplo. Se observan distintos conocimientos asociados a su MK. Pablo sabe: cuáles son los términos necesarios y suficientes que permiten determinar el término general de cada una de las sucesiones que presenta (KPM, condiciones necesarias y suficientes – J.1.5., 6-24); construir sucesiones no numéricas a partir

[3] Esta pregunta se plantea de forma general porque hemos observados que el profesor, al trabajar con ejemplos, apela regularmente al uso de metáforas.

de una sucesión previa (KoT; procedimientos y registro de representación – J.1.5.)[4]; y que cada término general permite la construcción de una sola sucesión (KoT, fenomenología y aplicaciones – J.1.5., 22-28). En relación con su PCK, observamos que conoce una estrategia apropiada para que los estudiantes observen que cada sucesión tiene su propio término general, independiente del parecido que puedan tener (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – J.1.5.); observamos también cómo el conocimiento que posee le permite identificar la idea errónea manifestada por el estudiante, en relación con el término general que acaban de obtener, al manifestar que este aplicaría para todas las sucesiones (KFLM, fortalezas y dificultades – J.1.5., 1-6). Y en su respuesta, Pablo pone de manifiesto su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.1.5., 2-5) y su conocimiento sobre lo favorable que resulta, para la comprensión del concepto, referirse al término general como "la llave" (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – N.1.5., 2-5; E.1.5., 27-28).

En el uso de este ejemplo se pueden observar distintas relaciones entre los subdominios y su creencia. Su conocimiento acerca de que cada término general nos permite construir una única sucesión (KoT) sustenta a su KFLM y a su KMT; por un lado, le permite identificar el error que está cometiendo el estudiante al manifestar que el término general que han encontrado les servirá para todas las sucesiones (KFLM), estableciéndose la relación $KoT \rightarrow KFLM$ y por otro, sustenta la creación de la metáfora que utiliza para favorecer la enseñanza del concepto término general, refiriéndose al término general como "la llave" (KMT (2)), generándose la relación $KoT \rightarrow KMT$. A la vez que estos dos subdominios, su KMT y su KoT, se relacionan con la creencia que posee sobre el potencial didáctico que tienen las metáforas. Esta creencia evoca el KoT que requería para generar la metáfora y sustentar su conocimiento sobre lo favorable que resultará para la compresión del concepto hablar del término general como "la llave" (KMT).

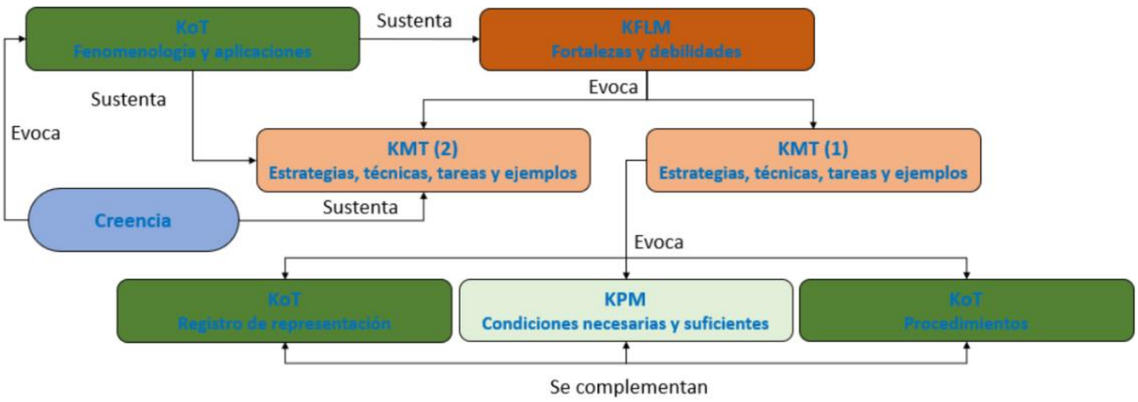
También observamos que el conocimiento que el profesor posee sobre el error matemático que conlleva la idea manifestada por el estudiante (KFLM), evoca conocimientos asociados a su KMT que le permiten abordar esta idea errónea por medio de una estrategia apropiada para que los estudiantes vean que cada sucesión tiene su propio término general (KMT (1)) y por medio de una metáfora que, en su opinión, favorece la compresión del concepto término general (KMT (2)), generando un par de relaciones $KFLM \twoheadrightarrow KMT$.

[4] No se especifica el número de líneas porque la evidencia de este subdominio la encontramos a lo largo de todo el episodio.

Las últimas relaciones que observamos se dan entre el KMT y subdominios de su MK. Su conocimiento de una estrategia que le permite mostrar a los estudiantes que cada sucesión tiene su propio término general (KMT (1)) evoca un conjunto de conocimientos que le permiten desarrollar esta estrategia. Conocimiento correspondiente a su KoT, gracias al cual puede construir y representar sucesiones no numéricas, estableciéndose la relación $KMT \rightarrow KoT$; y conocimiento correspondiente a su KPM, el cual le permite presentar en cada sucesión los términos necesarios y suficientes para poder determinar el término general, generándose la relación $KMT \rightarrow KPM$. En esta situación también hemos observado una relación $KoT \leftrightarrow KPM$, pues se evidencia cómo estos subdominios se complementan en la construcción de cada sucesión no numérica.

Figura 15

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.5.



El profesor continuó su trabajo con la presentación de la primera sucesión numérica. En este episodio (ejemplo 1.6) se describe la forma en que utilizó esta sucesión, para ejemplificar cómo se representa algebraicamente el término general de una sucesión. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. Presenta a los estudiantes la sucesión $2, 4, 6, 8, \ldots$ y les pide, buscando la participación de los estudiantes, que determinen la expresión matemática que les permite obtener estos valores, el término general de esta sucesión.

$$2, 4, 6, 8 \ldots.$$

P: ¿Cuál es la llave? ¿Qué expresión matemática te permite calcular esto?
A: Sumar – sumar dos
P: Pero qué expresión matemática.
A: Dos por número menos uno – multiplica por dos.
P: Multiplicar por dos, qué, el término que quieras ¿verdad? Muy bien esa es la llave, la has dicho en tu idioma, pero ahora vamos a decirlo matemáticamente.

$$a_n = 2n$$

La llave de esta serie o de este cofre es multiplicar por dos el término que tú quieras ¿verdad? ¿Cómo le llamamos a un término que tú quieras? a_n, ¿no?

(E.1.6)

Para indagar en los indicios de conocimiento que observamos en este episodio, consideramos las respuestas que el profesor nos entregó al consultarle sobre el uso de las metáforas y de los conocimientos previos en la selección de los ejemplos, también le realizamos la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué al momento de seleccionar los ejemplos apela constantemente a contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente?

P: Porque el conocimiento se basa en lo previo, si tú no tienes asimilado, no has comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estás con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

I: ¿Por qué selecciona esta sucesión (2, 4, 6, 8) como la primera sucesión numérica que presenta?

P: Numéricamente es simple, que empiecen con una sucesión simple y además que conocen y que han conocido desde mucho tiempo. La misma lógica de antes (no numérica), algo que está cercano, algo que han trabajado y que no es ajeno, luego si estás poniendo una sucesión más compleja, primero a lo mejor no ves ni siguiera que hay una sucesión, porque no le ves…, es que mentalmente, de manera fácil ven que hay una relación entre un término y otro, es por la simplicidad del ejemplo.

(P.1.6)

Las respuestas entregadas por el profesor evidencian que, al seleccionar este ejemplo, opera su creencia sobre cómo se va construyendo el aprendizaje y moviliza conocimientos correspondientes a su KSM y a todos los subdominios de su PCK. Sabe que el conocimiento que los estudiantes poseen sobre la tabla del 2 puede contribuir a la búsqueda del término general de esta sucesión (KMLS; secuenciación con temas – P.1.6., 12-13, 16-18) y que asociar la sucesión propuesta a la tabla del 2 permite evidenciar la relación que existe entre los términos de la sucesión (KSM; conexiones auxiliares – P.1.6., 16-17). También conoce la potencialidad del ejemplo de sucesión que ha seleccionado, permite visualizar que existe una relación entre un término y otro (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.6., 15-18) y sabe que los estudiantes no tendrán problemas para determinar el término general de la sucesión (KFLM; fortalezas y dificultades – P.1.6., 17).

Durante la selección de este ejemplo evidenciamos una relación entre la creencia manifestada por el profesor y algunos subdominios de conocimiento. Su creencia sobre cómo se construye el aprendizaje evoca conocimientos de su KSM y KMLS, los cuales se relacionan entre sí, y favorecen la selección de un ejemplo que se basa en los saberes previos de los estudiantes, específicamente en la tabla del 2. Su conocimiento sobre que la conexión existente entre la sucesión que ha seleccionado y la tabla del 2 permite evidenciar la relación que hay ente los términos de esta sucesión (KSM), sustenta su conocimiento sobre que los saberes que poseen los estudiantes en relación con la tabla del 2 pueden contribuir a la búsqueda del término general (KMLS), estableciéndose una relación $KSM \rightarrow KMLS$.

También evidenciamos una relación $KMLS \rightarrow KFLM$, ya que su comprensión de que los conocimientos que los estudiantes ya poseen, asociados a la tabla del 2, pueden favorecer la búsqueda de este término general (KMLS), sustenta su conocimiento sobre que los estudiantes no tendrán problemas para determinar el término general de la sucesión presentada (KLFM).

Por último, en la selección de este ejemplo vemos una relación entre los tres subdominios ya mencionados y su KMT. Su conocimiento sobre la potencialidad del ejemplo que ha seleccionado (KMT) se sustenta en su conocimiento sobre la conexión que existe entre la tabla del 2 y el término general de la sucesión propuesta (KSM), en su conocimiento sobre los saberes que poseen los estudiantes que pueden contribuir a la búsqueda de este término general (KMLS) y en su conocimiento de que los estudiantes no tendrán problemas para determinar el término general (KFLM), estableciéndose una relación $KSM/KMLS/KFLM \rightarrow KMT$.

Figura 16

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.1.6.

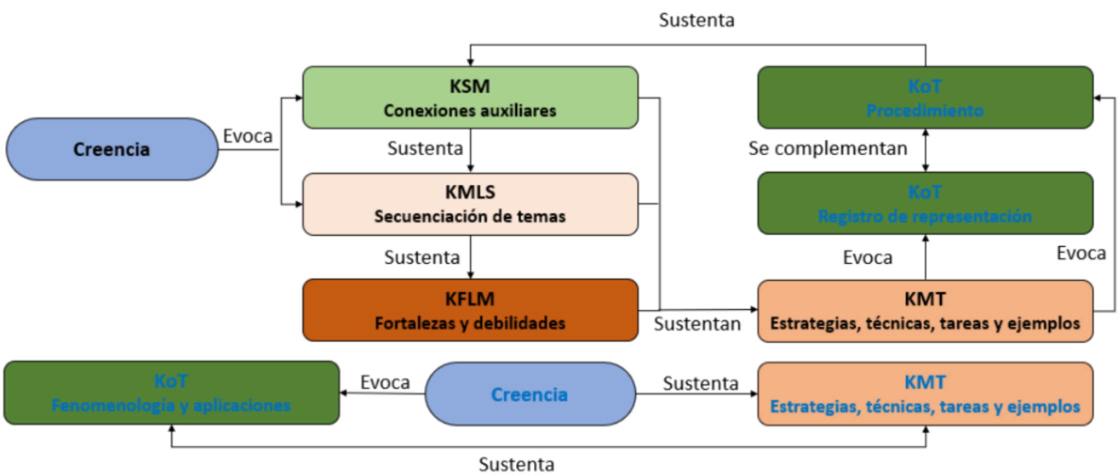
En el episodio E.1.6. vemos que durante el uso de este ejemplo influyó su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas y además encontramos evidencias de los subdominios que el profesor movilizó al utilizar este ejemplo. Pablo sabe cuál es la función que cumple el término general de una sucesión (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.1.6., 1-2), conoce el término general de la sucesión que ha seleccionado (KoT; procedimientos – E.1.6., 4-7) y sabe representarlo algebraicamente (KoT; registro de representación – E.1.6., 10). Y como ya hemos mencionado, sabe que el uso de la metáfora favorecerá la compresión del concepto término general (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.6., 2; P.1.6., 5-9).

De esta forma en el desarrollo de este ejemplo evidenciamos distintas relaciones. El conocimiento que posee sobre la potencialidad del ejemplo de sucesión que ha seleccionado (KMT) evoca algunos conocimientos que le permiten desarrollar este ejemplo. Evoca su conocimiento sobre el término general de la sucesión (KoT) y el conocimiento que le permite representar algebraicamente un término general, generando de esta forma una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. Estos conocimientos correspondientes a su KoT se complementan entre sí, permitiéndole representar algebraicamente el término general de la sucesión, estableciéndose una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. Vemos otra relación entre su KoT y su KSM, el conocimiento que posee sobre el término general de la sucesión que ha seleccionado (KoT) sustenta su KSM, permitiéndole establecer una relación entre la sucesión propuesta y la tabla del 2, generándose una relación $KoT \rightarrow KSM$.

También encontramos una relación entre su creencia, su KMT y su KoT. La idea que manifiesta en relación con el potencial didáctico de las metáforas evoca el KoT que le permite crear esta metáfora y, sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta para la compresión de los estudiantes referirse al término general como "la llave" (KMT). Finalmente, evidenciamos una relación $KoT \rightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre la función que cumple el término general de una sucesión sustenta la creación de la metáfora que utiliza para favorecer la compresión de este concepto (KMT).

Figura 17

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.6.



El profesor sigue trabajando con la sucesión $2, 4, 6, 8, \ldots$. Los estudiantes acaban de encontrar el término general de la sucesión, en este episodio (ejemplo 1.7) vemos al profesor ejemplificando cómo se debe trabajar con el término general para obtener cualquier término de la sucesión. Corresponde a un ejemplo pasivo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor presenta dos ejemplos de cómo deben operar con el término general que han obtenido para esta sucesión, uno de generalización lejana y otro de generalización cercana, sin propiciar la participación de los estudiantes durante la búsqueda de estos términos.

P: Pues la fórmula es el doble de n. Si yo quiero el $10{,}10 \times 2 = 20$ (señalando n y 2 en $a_n = 2n$). Si quiero el $2000, 2000 \times 2 = 4000$ (señalando n y 2 en $a_n = 2n$). Luego entonces ¿tengo la llave de esta serie?

A: Sí.

P: Sí, luego entonces, ahora controlo la serie. Mira ¿puedo saber él término que quiera rápidamente? (Refiriéndose a la serie $a_n = 2n$).

A: Sí.

(E.1.7.)

Con el propósito de indagar en los indicios de conocimiento que encontramos en el desarrollo de este ejemplo, consideramos la pregunta referente al uso de las metáforas, dado que en este ejemplo también apela a su uso.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al abordar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

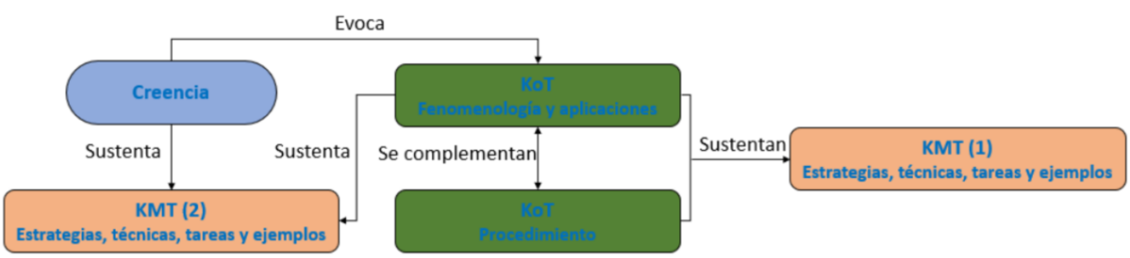
(P.1.7.)

En estos episodios encontramos evidencia de los distintos subdominios movilizados por el profesor al utilizar este ejemplo. En el episodio correspondiente al uso del ejemplo vemos que Pablo conoce el procedimiento para calcular los términos de una sucesión por medio de su término general (KoT; procedimientos – E.1.7., 1-3), conoce una estrategia que le permite mostrar lo favorable de trabajar con el término general al momento de calcular cualquier término de una sucesión (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.7., 1-2) y sabe que el término general le permite calcular cualquier término de la sucesión (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.1.7., 5-6). Y en el episodio correspondiente a la entrevista evidenciamos que Pablo pone de manifiesto su creencia en relación con el potencial de las metáforas (P.1.7., 2-5) y su conocimiento sobre lo favorable que resulta, para compresión del concepto término general, referirse este término como “la llave” (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.7., 2-5; E.1.7., 3).

Durante el desarrollo de este ejemplo hemos encontrado distintas relaciones que involucran a su KoT y su KMT. Evidenciamos una relación entre distintas categorías de un mismo subdominio de conocimiento. El conocimiento que Pablo posee sobre que el término general permite calcular cualquier término de una sucesión (KoT) se complementa con su conocimiento sobre cómo se calculan los términos de una sucesión por medio del término general (KoT), generándose una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. Esta relación parece sustenta su conocimiento de una estrategia que le permite mostrar lo favorable de trabajar con el término general al buscar cualquier término de la sucesión (KMT (1)) porque sabe que podrá calcular cualquier término y cómo debe hacerlo, estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KMT$. Por último, vemos algunas relaciones entre su creencia y su KMT y su KoT. Su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas evoca el KoT necesario para elaborar la metáfora y, sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta hablar del término general como “la llave”. Se evidencia también una relación entre estos dos subdominios. Su conocimiento sobre que el término general permite calcular cualquier término de una sucesión (KoT) sustenta la creación de la metáfora que el profesor utiliza en clases (KMT (2)), generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 18

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.7.



En el episodio (ejemplo 1.8) que se describe a continuación vemos al profesor utilizando la sucesión numérica y la sucesión no numérica para ejemplificar lo favorable que resulta, al querer determinar cualquier término de una sucesión, conocer la representación algebraica del término general. En el caso de estas sucesiones, los estudiantes solo han representado algebraicamente el término general de la sucesión numérica, mientras que, para la sucesión no numérica, solo han identificado el patrón que está detrás de su construcción.

El ejemplo 1.8 corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. El profesor pide a los estudiantes, para motivar su participación en el desarrollo de este ejemplo, que determinen el término 2.000 de ambas sucesiones. Con esta acción busca enfatizar la importancia de conocer la expresión algebraica del término general, concepto que están comenzando a estudiar.

P: Pero si yo te pregunto ¿cuál es el término 2.000 en esta serie?... (señalando la sucesión no numérica) Te tienes que esperar un poco, primero intenta buscar la llave, hasta que no encuentres la llave no la podemos abrir. Pero si te la pregunto en esta (señalando a_n, para la sucesión numérica). ¿Cuál es el termino 2.000 de esa?

A: 4.000.

P: No tienes problemas. Ni en el 2.001 ni en ninguno, porque tienes la llave.

(E.1.8.)

Con el propósito de profundizar en los indicios de conocimientos que encontramos en el este apartado, le realizamos a Pablo las siguientes preguntas, que encontramos en el fragmento de entrevista que mostramos a continuación:

I: ¿Por qué utiliza metáforas al abordar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

I: ¿Por qué selecciona una sucesión no numérica y una numérica para mostrar la importancia del término general?

P: Por resaltar el mensaje de fondo, tú tienes que controlar el patrón independientemente del caso de la sucesión que tenga, segundo si el patrón tú lo expresas algebraicamente lo controlas mucho más cómodamente.
Ver la ventaja que tiene tener un término general para controlar una u otra no numérica.

(P.1.8.)

La respuesta que nos entrega el profesor nos da evidencias de los subdominios de conocimientos movilizados durante en la selección de este ejemplo. Pablo sabe que de las distintas formas en que se puede representar un patrón, la representación algebraica del patrón que sustenta la construcción de una sucesión es la más apropiada para obtener los términos de dicha sucesión (KoT; registros de representación – P.1.8., 9-10); que el término general nos permite obtener cualquier término de la sucesión (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.1.8., 11-12); y que trabajar con estas dos sucesiones, una con término general y la otra no, le permitirá resaltar la importancia de conocer el término general de una sucesión (KoT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.8., 11-12).

Durante la selección de este ejemplo evidenciamos una relación entre dos categorías de un mismo subdominio. Su conocimiento sobre cuál es el tipo de representación de un patrón (que sustenta una sucesión) más apropiado para buscar los términos de la sucesión (KoT) se complementa con su conocimiento sobre que el término general nos permite obtener cualquier término de una sucesión (KoT), estableciéndose una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. La relación entre estas dos categorías sustenta su conocimiento sobre lo apropiado que resulta la estrategia que está utilizando para ejemplificar la importancia de conocer el término general de una sesión (KMT), generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 19

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.1.8.

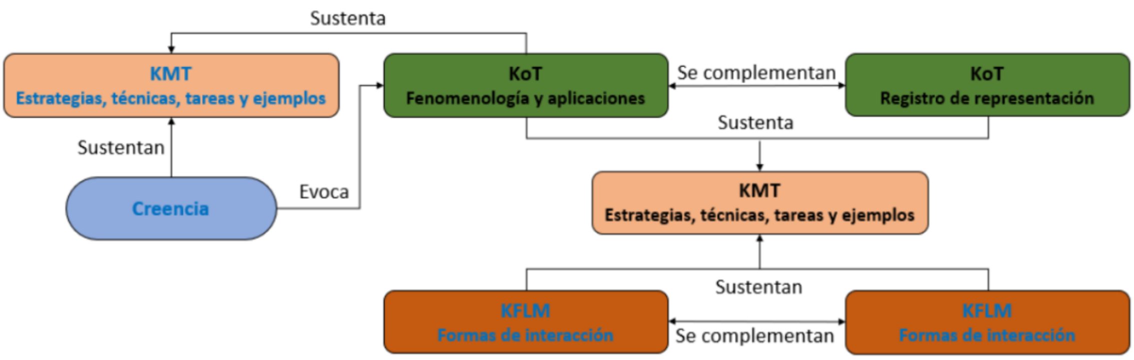
Estos episodios nos permiten obtener evidencias de la creencia que el profesor posee en relación con el potencial didáctico de las metáforas (E.1.8, 1-2) y de los conocimientos movilizados por Pablo al momento de utilizar este ejemplo. El conocimiento que posee sobre la forma en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático le permite saber que no tendrán problemas en determinar cualquier término de la sucesión numérica propuesta, porque conocen el término general (KFLM; formas de interacción con un contenido matemático – E.1.8., 3-7); y que les resultará complejo determinar el término que les está solicitando de la sucesión no numérica, porque no conocen el término general (KFLM; formas de interacción con un contenido matemático – E.1.8., 1-3). También encontramos evidencia de su KMT, Pablo sabe lo favorable que resulta, para compresión del concepto término general, referirse este término como "la llave" (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.8., 2-3, 7; P.1.8., 2-5), como ya hemos señalado en otros episodios.

Durante el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una relación entre conocimientos de una misma categoría, su conocimiento sobre lo complejo que les resultará determinar el término 2.000 de la sucesión no numérico, por no conocer el término general (KLFM), y lo rápido que encontraran cualquier término de la sucesión numérica, por conocer el término general (KFLM) se complementan, generando una relación $KFLM \leftrightarrow KFLM$. Esta relación, a su vez, sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta la estrategia que ha seleccionado para ejemplificar la importancia de conocer el término general de una sucesión (KMT), estableciéndose una relación $KFLM \rightarrow KMT$.

Por último, evidenciamos nuevamente una relación entre su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas y su KoT y KMT, evocando el conocimiento necesario para elaborar la metáfora (KoT) y sustentando su conocimiento sobre lo favorable que resulta hablar del término general como de "la llave" (KMT). También evidenciamos en el desarrollo de este ejemplo la relación $KoT \rightarrow KMT$, su conocimiento sobre que el término general permite calcular cualquier término de una sucesión (KoT) sustenta la creación de la metáfora que el profesor utiliza en clases (KMT).

Figura 20

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.8.



En el episodio que se describe a continuación (ejemplo 1.9) vemos al profesor utilizando dos sucesiones para ejemplificar cómo se puede obtener el término general de algunos casos particulares de sucesiones. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor utiliza nuevamente una sucesión que se puede asociar a las tablas de multiplicar para que los estudiantes se familiaricen con el procedimiento que les permite obtener y representar algebraicamente el término general, generando la participación de los estudiantes en el desarrollo del ejemplo.

P: Te están diciendo que tú busques la llave, término general, del ejercicio a, 2a, ¿Es muy difícil el 2a?
A: No.
P: No, ese no es difícil.
A: Es la tabla del 3.
P: Es la tabla del 3, y ese es la tabla del 2 (señalando en el pizarrón la primera serie que trabajaron), ¿cuál es el término general del a?
A: Tres – tres – treinta
A: ¿Cuál es el término general de a? Mirad cuál es el término general de ese (señalando la serie $2, 4, 6, 8, \ldots$) El a es $3, 6, 9, 12$ entonces. ¿cuál es el término general de esta serie? Como tú has dicho es la tabla del tres
A: A ene – por dos – 3 por a ene.
A: Efectivamente $3 \times a_n$. Esa es $2 \times a_n$. Esta es $3 \times a_n$.

(E.1.9.)

Con el propósito de obtener información que nos permita convertir los indicios de conocimiento en evidencias de conocimiento y dado el tipo de ejemplo que Pablo está utilizando, consideramos dos de las preguntas que ya se han presentado y una pregunta específica para este ejemplo. A continuación, mostramos un fragmento de entrevista donde se incluyen estas preguntas y las respuestas de Pablo.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar. Yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estás con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

I: ¿Por qué al momento de seleccionar los ejemplos apela constantemente a contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente?

P: Porque el conocimiento se basa en lo previo. Si tú no tienes asimilado, no has comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo

I: ¿Por qué selecciona esta sucesión?

P: Es una sucesión muy similar a la anterior. En complicación es sencilla, porque pueden visualizar luego el término general cómodamente. En el fondo es la tabla del tres, la anterior era la tabla del dos.

(P.1.9.)

En estas respuestas el profesor pone de manifiesto su creencia en relación con cómo se va construyendo el nuevo aprendizaje, con base en los saberes previos que poseen los estudiantes (P.1.9., 8-9). También encontramos evidencia de los distintos conocimientos movilizados por el profesor durante la selección de este ejemplo. Pablo sabe lo apropiado que resulta la sucesión que ha seleccionado para que los estudiantes visualicen su término general (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.9., 11-12); que asociar la sucesión propuesta a la tabla del 3 permite visualizar el término general de la sucesión (KSM, conexiones auxiliares – P.1.9., 12-13); que el conocimiento que los estudiantes poseen sobre la tabla del 3 puede contribuir a la construcción del término general (KMLS; secuenciación con temas – P.1.9.,12-13); y que los estudiantes no tendrán problemas para determinar el término general de la sucesión (KFLM; fortalezas y dificultades – P.1.9., 11).

Durante la selección de este ejemplo observamos las mismas relaciones que identificamos en el ejemplo 6. Su creencia sobre cómo se construye el aprendizaje evoca conocimientos correspondientes a su KSM y a su KMLS, los cuales se relacionan entre sí, favoreciendo la selección de un ejemplo que se basa en los saberes previos de los estudiantes, la tabla del 3. Saber que la conexión que existe entre la sucesión que ha seleccionado y la tabla del 3 permite visualizar el término general de la sucesión, sustenta su conocimiento sobre que lo aprendido por los estudiantes en relación con la tabla del 3 puede contribuir a la construcción del término general, estableciéndose una relación $KSM \rightarrow KMLS$.

También evidenciamos una relación $KMLS \rightarrow KFLM$, su conocimiento sobre que los estudiantes no tendrán problemas para determinar el término general de la sucesión presentada (KLFM), se sustenta en que Pablo sabe que el conocimiento que los estudiantes poseen sobre la tabla del 3 puede contribuir a la construcción del término general (KMLS).

Por último, vemos una relación $KMLS/KSM/KFLM \rightarrow KMT$. Su conocimiento sobre lo apropiado que resulta esta sucesión para que los estudiantes visualicen su término general (KMT) se sustenta en su conocimiento sobre los saberes que poseen los estudiantes que pueden contribuir a la construcción de este término general (KMLS); sobre su conocimiento de la conexión que existe entre la tabla del 3 y la sucesión propuesta, la cual permite visualizar el término general (KSM); y sobre su conocimiento de que los estudiantes no tendrán problemas en determinar el término general (KFLM).

Figura 21

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.1.9.

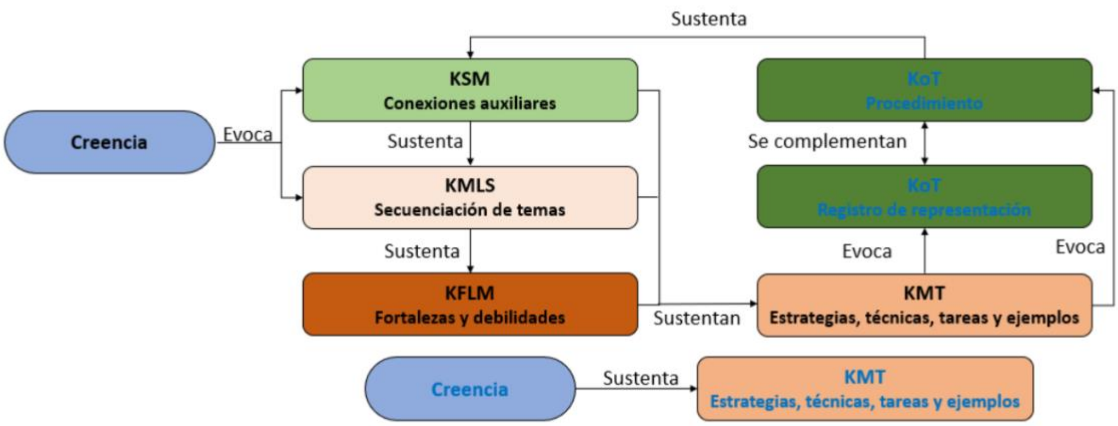
Los episodios P.1.9. y E.1.9. también nos permitieron obtener evidencia de los subdominios movilizados por el profesor durante el uso de este ejemplo. En ellos vemos que Pablo conoce el término general de la sucesión que están desarrollando (KoT; procedimientos – E.1.9., 13) y que sabe representarlo algebraicamente (KoT; registros de representación – E.1.9., 13). También encontramos (una vez más) evidencia de su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.1.9., 2-5) y de su KMT; Pablo sabe que al referirse al término general como “la llave" favorece la compresión de los estudiantes, de este nuevo concepto (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplo – E.1.9., 1; P.1.9., 2-5).

Durante el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. Su conocimiento sobre la potencialidad de la sucesión que ha seleccionado parece evocar algunos conocimientos que se relacionan entre sí y que permiten el desarrollo de este ejemplo. Su conocimiento sobre el término general de la sucesión que están desarrollando (KoT) y sobre cómo se representa algebraicamente este término general (KoT), genera una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. El conocimiento que posee sobre el término general de la sucesión que están desarrollando (KoT) sustenta su KSM, permitiéndole establecer una relación entre esta sucesión y la tabla del 3, estableciendo una relación $KoT \rightarrow KSM$.

Finalmente, en el desarrollo de este ejemplo vemos una relación entre su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas y su conocimiento sobre lo favorable que resulta, para la compresión de los estudiantes, hablar del término general como “la llave”.

Figura 22

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.9.



En este episodio (ejemplo 1.10) vemos cómo el profesor utiliza el error que están cometiendo los estudiantes, al determinar el término general, para ejemplificar un proceso que les permite verificar la pertinencia de un término general propuesto para una determinada sucesión. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor utiliza el término general que los estudiantes han establecido para la sucesión $3,5,7,9,11,13,\ldots$ para mostrarles un procedimiento que les permite verificar la pertinencia de este término.

P: Por ejemplo, vete a la C.
$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots..$$
P: ¿Qué observas en la C?
A: Más dos.
P: Pero claro, ¿cuál es el principio? Entonces tendrás que decir cuál es el principio, no es lo mismo empezar por el 3 que por el 1, aunque la clave sea sumar dos.
A: A entonces cómo lo resolvemos.

P: Pues date cuenta de la lógica, para pensar la llave que te valga para buscar los términos. Entonces cómo buscarían ustedes el término general del C, que es 3, 5, 7, 9, ¿Cuál es el término general?
A: Seria 1 más 2 – a ene más 2 – a ene más 3.
P: Vamos a verlo, si tú buscas el término 1, y tú dices que es $a_n + 3$. Ahora quiero que escuchéis y penséis, si tú buscas el término primero y dices que es, cómo has dicho que es el término según tú.
A: A ene más dos
P: $a_n + 2$, vale, si buscas el primero, la n es 1, más 2, tres, el primero cuadra, vamos a buscar al siguiente, el siguiente término, el segundo término, pues sería dos más tres, ¿dos más tres es cinco?
A: Cinco – sí.
P: A el segundo también, parece que esta llave está abriendo los dos primeros, pero no tiene que abrir los dos primeros, te tiene que abrir cualquiera. Vámonos al quinto, si tú buscas el quinto término qué sería ¿cinco más dos?
A: No – Sí – Sí.
P: ¿Y es verdad que el quinto término es siete?
A: No – cinco más dos es siete
P: ¿Y ese es el quinto término?
A: No.
P: Luego, la llave que estamos usando no es la que abre este cofre. El término general de esta serie, estamos hablando de esta serie (escribe en la pizarra 3, 5, 7, 9, 11) todavía no lo hemos descubierto.

(E.1.10.)

Al analizar los distintos subdominios que Pablo movilizó durante el desarrollo de este ejemplo consideramos la respuesta que nos dio al consultarle sobre el uso de las metáforas.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar. Yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

(P.1.10.)

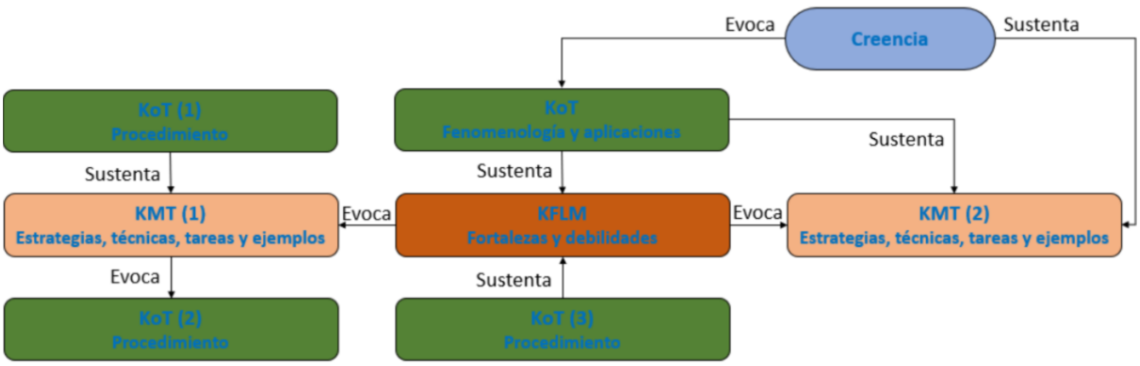
En estos episodios encontramos evidencia de la creencia que el profesor posee con respecto al potencial didáctico de las metáforas (P.1.10., 2-5) y de los conocimientos que habría movilizado durante el uso de este ejemplo. Observamos que Pablo conoce un procedimiento que le permite comprobar la pertinencia de un término general propuesto para una sucesión (KoT; procedimientos – E.1.10., 16-25); y sabe que el término general de una sucesión nos debe permitir obtener todos los términos de la sucesión, respetando el orden (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.1.10., 16-27); que para determinar el término general de una sucesión se debe considerar el termino a_1 y la diferencia que existe entre dos términos consecutivos (KoT; procedimientos – E.1.10., 5-6); y cómo determinar los términos de una sucesión por medio del término general (KoT; procedimiento – E.1.10., 16-18). También encontramos evidencias de conocimientos correspondientes a su PCK. Sabe que referirse al término general como “la llave” puede favorecer la compresión de los estudiantes de este concepto (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.10., 20, 28); conoce el error que cometen algunos estudiantes al determinar un término general que considera solo la distancia que existe entre dos términos consecutivos, pero no considera el término a_1 (KFLM; Fortalezas y dificultades – E.1.10., 5-6, 24-27); y conoce una estrategia que permite a los estudiantes evaluar la pertinencia del término general propuesto (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.10., 16-30).

Durante el desarrollo de este ejemplo observamos las siguientes relaciones. Vemos cómo distintos conocimientos correspondientes a su KoT, su conocimiento sobre los elementos que se deben considerar al establecer el término general de una sucesión (KoT (3)) y su conocimiento sobre que el término general nos permite obtener todos los términos de una sucesión (KoT), sustentan su conocimiento sobre el error que están cometiendo los estudiantes al establecer un término general que no les permite obtener los términos de la sucesión en el orden correcto y que no considera el término a_1 en su elaboración (KFLM), generándose dos relaciones $KoT \rightarrow KFLM$. Este KFLM evoca conocimientos correspondientes a su KMT que le permiten abordar el error que comenten los estudiantes. Evoca el conocimiento que Pablo posee de dos estrategias: una que permite a los estudiantes evaluar la pertinencia del término general que han seleccionado (KMT (1)) y otra que puede favorecer la compresión de los estudiantes del concepto término general (KMT (2)), evidenciándose en ambos casos la relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$.

Evidenciamos también una relación entre la creencia que Pablo posee sobre el potencial didáctico de las metáforas y su conocimiento sobre lo favorable que resulta para la compresión de los estudiantes referirse al término general como “la llave”, su creencia sustenta su KMT. Esta creencia también evoca su conocimiento sobre la función del término general, el cual sustenta la creación de la metáfora que utiliza en clase, generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$. Por último, encontramos distintas relaciones entre su KMT y su KoT, su conocimiento sobre un procedimiento que permite verificar la pertinencia de un término general propuesto para una sucesión (KoT) sustenta la estrategia que presenta a los estudiantes para evaluar el término general que han propuesto (KMT), generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$, a la vez que, el uso de esta estrategia evoca el conocimiento que el profesor posee sobre cómo se calculan los términos de una sucesión por medio del término general (KoT) este conocimiento le permite ejecutar la estrategia, evidenciándose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$.

Figura 23

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.10.



El siguiente episodio (ejemplo 1.11) se describe el trabajo que realizaron con el ejemplo de sucesión que seleccionó el profesor para que los estudiantes determinen su término general. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor selecciona la sucesión $3, 5, 7, 9, 11$ ... con el propósito de que los estudiantes establezcan su término general, motivando de esta forma la participación de los estudiantes en el desarrollo del ejemplo.

I: ¿Cuál es el termino general de esta serie? De manera que, con la fórmula, tú busques el que quieras.
(Escribe en la pizarra) $3, 5, 7, 9, 11$ ... $a_n =$
P: Primero, segundo, tercero, cuarto, este es el quinto ¿podéis buscar una expresión matemática que te permita buscar cualquiera?
A: Por dos más uno.
P: Pero por dos cuál.
A: Dos por a ene más uno.
P: A vale voy a copiarlo, dos a ene más uno, esta es una expresión, esto es una llave ¿abre o no abre este cofre? Vamos a verlo, vamos a comprobarlo.
(Escribe en la pizarra) $a_n = 2a_n + 1$
P: Vamos a comprobar si este (señalando $a_n = 2a_n + 1$) es la llave de este (señalando la serie $3, 5, 7, 9, 11$). Ya sabéis que estoy diciendo si este es el término general de esta serie, sería la manera correcta. Voy a buscar el término 1, entonces sería dos por el 1, que era el a_1 más, dos por uno, dos, más uno, tres.
(Escribe en la pizarra) $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
P: El uno si ha salido, pero estoy diciendo que la llave tiene que valer para todos los términos no para unos cuantos. Entonces vamos a buscar el término dos, dos por dos, más uno, sale cinco.
(Escribe en la pizarra) $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
P: Ah mira. Me parece que esta es la llave, me parece que puede ser. Y ahora tú coges… Ah, vamos a buscar el término cinco cuál sería, pues sería dos por cinco más uno ¿Lo cumple?
(Escribe en la pizarra) $a_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$
A: Sí.

P: A tú has buscado la llave, has controlado el juego (conoces el término general).

(E.1.11.)

Con el propósito de obtener información que nos permitiera identificar los conocimientos movilizados por el profesor durante la selección y uso de este ejemplo, le realizamos las siguientes preguntas.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.
I: ¿Por qué razón selecciona el ejercicio c?
P: Por la simplicidad del ejercicio para ellos. No quise coger una progresión que tuviera una complicación matemática en buscar el término general, es cómoda para ver la ventaja de luego usarlo (término general), la ventaja que tiene el controlarlo.

(P.1.11.)

Las respuestas entregadas por el profesor nos dan evidencia de los subdominios movilizados durante la selección de este ejemplo. Pablo sabe que para los estudiantes será sencillo determinar el término general de la sucesión que ha seleccionado (KFLM; fortalezas y dificultades – P.1.11., 7-8); y que esta sucesión es apropiada para que los estudiantes vean lo favorable que resulta trabajar con el término general (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.1.11., 9-10). De esta forma, hemos evidenciado una relación $KMT \leftrightarrow KFLM$, su conocimiento sobre lo apropiada que resulta esta sucesión para mostrar a los estudiantes lo favorable de utilizar el término general (KFLM), se complementa con su conocimiento sobre lo sencillo que resultará para los estudiantes determinar el término general de esta sucesión (KMT), esta relación favorece la elección de este ejemplo de sucesión.

Figura 24

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.1.11.

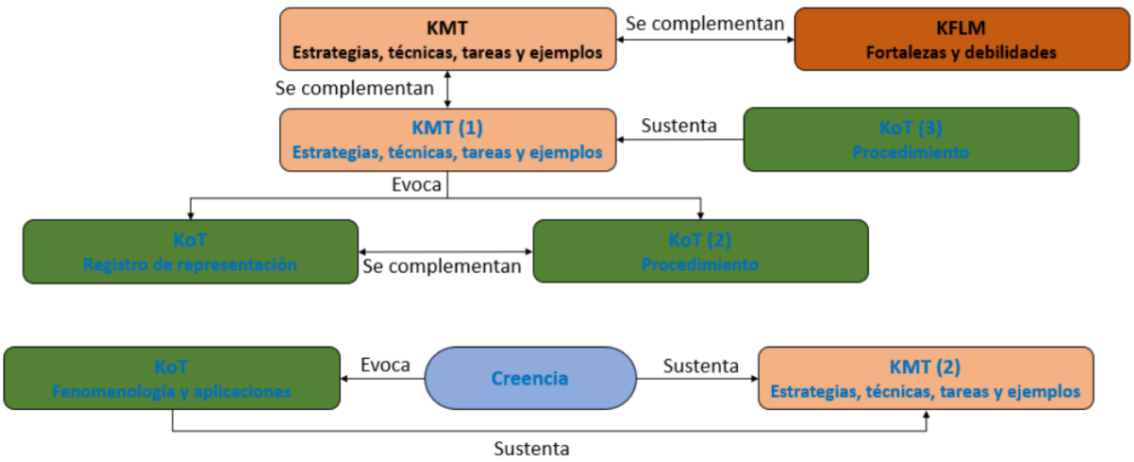
Estos episodios también nos permitieron obtener evidencia de los conocimientos movilizados por el profesor al utilizar este ejemplo. Vemos que Pablo conoce un procedimiento que le permite verificar la pertinencia de un término general propuesto para una sucesión (KoT; procedimientos – E.1.11., 12-26); y el procedimiento que le permite obtener los términos de una sucesión por medio del término general (KoT; procedimientos – E.1.11., 15-25). Sabe expresar algebraicamente el término general que los estudiantes han propuesto para la sucesión (KoT; registro de representación – E.1.11., 11); y que el término general nos debe permitir obtener todos los términos de una sucesión y en el mismo orden (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.1.11., 4-5). También encontramos evidencia de la creencia que el profesor posee con respecto al potencial didáctico de las metáforas (P.1.11., 2-5) y del conocimiento que posee sobre lo favorable que resulta para la comprensión de los estudiantes referirse al término general como "la llave" (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.1.11., 18).

Durante el desarrollo de este ejemplo encontramos evidencia de distintas relaciones. Vemos una relación $KMT \leftrightarrow KMT$, su conocimiento sobre lo apropiada que resulta este ejemplo de sucesión para que los estudiantes determinen su término general (KMT), se complementa con su conocimiento de una estrategia que permite a los estudiantes verificar la pertinencia del término general que han propuesto (KMT (1)). Este último KMT evocar y se sustenta en conocimientos correspondientes a su KoT. Se sustenta en el conocimiento que Pablo posee de un procedimiento que le permite verificar la pertinencia del término general propuesto para una sucesión (KoT (1)), generando una relación $KoT \rightarrow KMT$; y evoca los conocimientos que necesita para desarrollar esta estrategia, el conocimiento que le permite expresar algebraicamente el término general propuesto (KoT) y el conocimiento que le permite determinar los términos de una sucesión por medio del término general (KoT (2)), conocimientos que se complementan durante el desarrollo del ejemplo, generando una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$ y una $KoT \leftrightarrow KoT$.

También encontramos las mismas relaciones que ya han sido descritas en otros ejemplos, la relación entre su creencia, su KMT y su KoT. La idea que manifiesta en relación con el potencial didáctico de las metáforas evoca el KoT que le permite crear esta metáfora y sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta para la compresión de los estudiantes referirse al término general como "la llave" (KMT). Finalmente, evidenciamos una relación $KoT \rightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre la función que cumple el término general de una sucesión (KoT) sustenta la creación de la metáfora que utiliza para favorecer la compresión de este concepto (KMT).

Figura 25

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.1.11.



5.2. Sesión 2

El profesor comenzó esta sesión revisando algunos ejercicios que les había propuesto al finalizar la clase anterior en los que se pedía a los estudiantes que encontraran los cuatro primeros términos de una sucesión utilizando el término general. Los términos que obtuvieron en una de las sucesiones llevó al profesor a presentar y definir, por medio de un ejemplo, las sucesiones crecientes y decrecientes. Puso énfasis en la diferencia que hay entre la posición de un término y su valor y comenzó a desarrollar el estudio de las progresiones aritméticas, analizando la definición que se presenta en el texto de estudio, la construcción de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y realizando la construcción del término general de una progresión aritmética y la búsqueda de algunos de sus términos. Finalizó esta sesión introduciendo la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética.

En el episodio que se presenta a continuación (ejemplo 2.1) vemos al profesor presentado un ejemplo de sucesión creciente y uno de sucesión decreciente. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. Los términos que obtuvieron para una de las sucesiones lo llevaron a introducir los conceptos creciente y decreciente; el profesor presenta un ejemplo que le permite aclarar cómo es una sucesión creciente y una decreciente, en este ejemplo vemos al profesor interactuando con los estudiantes.

$$-1/3\,;\ -1/4\,;1/5\,;5/6$$

P: Empezáis a darte cuenta de que hay algunos términos que son negativos, pero luego son positivos. Mira ¿está sucesión va creciendo o decreciendo?

A: Decreciendo – Bueno la mitad de cada uno – Creciente.

P: Va creciendo, ¿no? A ver, luego tú te puedes encontrar sucesiones, ¿cuándo digo que una sucesión es creciente? Cuando los términos a medida que van avanzando, son mayores que el anterior, ¿puede haber sucesiones en el sentido contrario?

A: ¿En sentido contrario a qué te refieres?

P: Que sean…, esta es creciente hemos dicho ¿no? Va aumentando. Hemos dicho eso ¿no? Y ¿puede haber sucesiones decrecientes? Estoy preguntando.

A: ¿En los negativos solamente?

P: No tiene por qué ser negativo Escucha bien, no confunda ¿Qué significa una sucesión decreciente? Que los términos van disminuyendo, no tienen por qué ser negativos, puede que sí, puede que no. La clave es que el siguiente es menor que el anterior, y así sucesivamente. Por ejemplo, la serie de los números naturales. ¿Cómo es?

A: Creciente – Creciente, va aumentando.

P: Creciente.

A: Bueno eso depende de donde lo mire – Da siempre lo mismo.

P: Es cierto, ha hecho un matiz muy lógico. Yo te puedo poner una serie vista en sentido contrario. Por ejemplo $10, 9, 8, 7, 6, \ldots$ es una serie, y ¿esta cómo es?

A: Decreciente.

(E.2.1.)

Para indagar en los distintos conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo, le realizamos a Pablo las siguientes preguntas.

I: ¿Por qué selecciona esta sucesión? (preguntando el ejemplo de sucesión creciente, la serie de los números naturales).

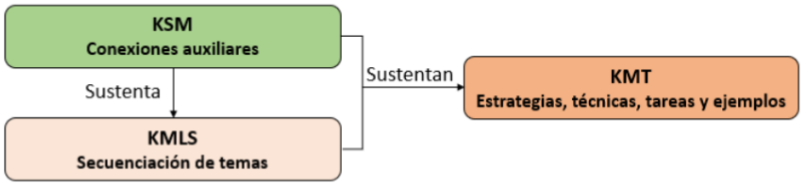
P: Porque es una sucesión que ya conocían, y resulta sencillo ver que es creciente, que los términos van aumentando.

(P.2.1.)

Las respuestas entregadas por el profesor nos dan evidencias de los conocimientos que Pablo movilizó durante la selección del ejemplo. Sabe que existe una conexión entre la serie de los números naturales y las sucesiones crecientes (KSM; conexiones auxiliares – P.2.1., 3); que el conocimiento que los estudiantes poseen de la serie de los números naturales puede ser el soporte para la comprensión de la sucesión creciente (KMLS; secuenciación de temas – P.2.1., 3-4); y que este ejemplo de sucesión permitirá que los estudiantes visualicen la condición que cumplen las sucesiones crecientes (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.2.1., 3-4). De esta forma, durante la selección de este ejemplo evidenciamos distintas relaciones. En primer lugar, vemos que el conocimiento que Pablo posee sobre la conexión que existe entre la serie de los números naturales y las sucesiones crecientes (KSM) sustenta su conocimiento sobre que lo que han trabajado previamente los estudiantes de la serie de los números naturales puede contribuir a la comprensión de las sucesiones crecientes (KMLS), generándose una relación $KSM \rightarrow KMLS$. Y la relación que existe entre estos dos conocimientos parece sustentar su KMT. El saber que existe una relación entre las sucesiones creciente y la serie de los números naturales (KSM) y que el conocimiento que los estudiantes poseen sobre la serie de los números naturales puede contribuir a la comprensión de las sucesiones crecientes (KMLS), sustentan su conocimiento sobre lo favorable que resulta el ejemplo de sucesión que ha seleccionado para evidenciar la característica de las sucesiones crecientes (KMT), estableciéndose una relación $(KSM \rightarrow KMLS) \rightarrow KMT$.

Figura 26

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.2.1.

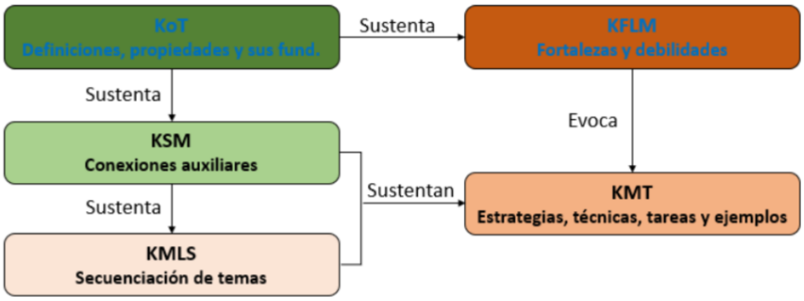


El episodio también nos permitió obtener evidencia de los subdominios movilizados por el profesor al momento de utilizar este ejemplo. Vemos que Pablo conoce la condición que cumplen las sucesiones crecientes y las decrecientes (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos – E.2.1., 5-7, 13-15); y reconoce el error que están cometiendo algunos estudiantes al asociar las sucesiones decrecientes a los números negativos (KFLM; fortalezas y dificultades – E.2.1., 12).

Durante el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una relación entre su KoT y su KSM, el conocimiento que posee sobre la condición que cumplen las sucesiones crecientes y decrecientes (KoT), parece sustentar a su conocimiento de la conexión que existe entre las sucesiones crecientes y la serie de los números naturales (KSM), estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KSM$. También vemos que este conocimiento sobre las sucesiones crecientes y decrecientes (KoT) sustenta a su conocimiento sobre el error que están cometiendo algunos estudiantes a asociar las sucesiones decrecientes a los números negativos (KFLM), generándose una relación $KoT \rightarrow KFLM$. Finalmente evidenciamos una relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre el error que manifiestan los estudiantes en relación con las sucesiones crecientes y decrecientes (KFLM), evoca su conocimiento sobre una estrategia que le permita afrontar este este error (KMT).

Figura 27

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.2.1.



En el siguiente episodio (ejemplo 2.2) vemos a Pablo utilizando un ejemplo para abordar una confusión que observa en relación con los términos de una sucesión. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. El profesor utiliza los valores que han obtenido para una de las sucesiones $1, 3, 6, 10$ ... para ejemplificar que el valor de un determinado término no tiene por qué coincidir con el número que determina su posición. El profesor motiva la participación de los estudiantes durante el desarrollo de este ejemplo.

P: No confundan el valor de un término con el orden del término, el término 1 puede valer 8, o puede valer 1, o puede valer lo que fuera. El término 2 no tiene por qué valer dos, pero dos es la posición, y a veces están mezclando la posición con su valor, ¿no? ¿Cuánto vale en esta sucesión el término 1?
A: Uno.
P: Uno, pero mira aquí ahora. Y ¿cuánto vale el término 2?
A: No lo sabemos.
P: Sí lo sabéis.
A: Tres.
P: Tres, lo acabas de calcular.
A: Lo sacamos con la fórmula.
P: Claro, ¿ya sabéis cuánto vale el segundo término? Tres ¿no?
A: Sí.

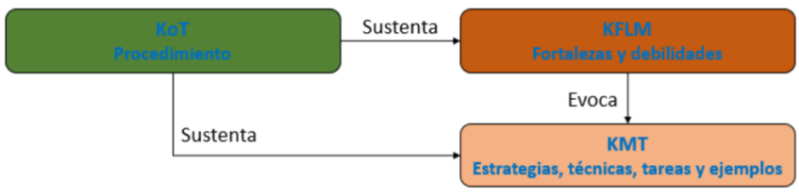
(E.2.2.)

Este episodio nos ha permitido obtener evidencia de los conocimientos movilizados por el profesor al utilizar este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que la posición de un término no tiene por qué coincidir con su valor, son distintos elementos (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos – E.2.2., 1-4); que algunos estudiantes comenten el error de confundir la posición de un término con su valor (KFLM; fortalezas y dificultades – E.2.2., 3-4); y conoce una estrategia que le permite mostrar a los estudiantes que la posición de un término no tiene por qué coincidir con su valor (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.2.2, 4-10).

Durante el desarrollo de este ejemplo hemos evidenciado una relación $KoT \rightarrow KFLM$ y una $KoT \rightarrow KMT$. El conocimiento que Pablo posee sobre los distintos elementos asociados a cualquier término de una sucesión (KoT), sustenta el conocimiento que posee sobre el error que cometen algunos estudiantes al confundir el valor de un término con su posición (KFLM); y su conocimiento de una estrategia apropiada para abordar este error (KMT). También evidenciamos, por ello, una relación entre estos dos conocimientos, el KFLM movilizado por Pablo parece evocar su conocimiento de una estrategia (un ejemplo) que le permite abordar el error que están cometiendo algunos estudiantes (KMT), generándose una relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$.

Figura 28

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.2.2.



En el siguiente episodio (ejemplo 2.3) vemos al profesor realizando un ejemplo de cómo el término general de las progresiones aritméticas, la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, nos permite obtener el término general de una progresión aritmética en particular. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor desarrolla una actividad que "obliga" a los estudiantes a buscar el término general de una progresión aritmética, propone a los estudiantes el término a_1 y la distancia de una progresión aritmética y les pide que determinen el término 200. Utiliza esta situación para centrase en la ejemplificación de cómo obtener el término general por medio de la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Motiva la participación de los estudiantes, guiándolos en el procedimiento de construcción del término general.

P: Por ejemplo, pon los primeros términos de una progresión aritmética cuyo término 1 es el ocho y la distancia es 5. ¿Y cómo buscarías tú el término 200?
A: a_n.
P: Un momento, escuchar y pensar. Tú quieres buscar el término 200. Está claro que no vas a ir de uno en uno. Si empezaras de uno a uno llegarías a que sí, y te va a llevar un rato ¿no? Esa no es la cuestión, vale. Esta es la llave de todas las llaves, es la llave maestra de todas las progresiones aritméticas.
(Escribe en la pizarra) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
P: Por ejemplo, con estos datos (señalando $a_1 = 8 \ y \ d = 5$) ¿Puedo buscar la llave de esta progresión? Y luego ¿buscar este (señalando a_{200}) o el que quiera?

A: Sí.
P: Muy sencillo, mete aquí (en $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$) los datos que tienes ($a_1 = 8\ y\ d = 5$) y te sale una llave más cómoda para buscar todos los términos que quieras más cómodamente. Por ejemplo ¿Cómo sería la llave solo de esta? Pues sería ¿El a_1 cuánto vale?
A: Ocho.
P: La sustituyes ocho, n menos uno ¿Cuánto vale la distancia?
A: Cinco.
(Escribe en la pizarra) $a_n = 8 + (n-1) \cdot 5$
P: ¿Cinco por n?
A: Cinco n.
P: Cinco n y menos cinco, verdad, ¿y esto lo puedo reducir todavía?
(Escribe en la pizarra) $a_n = 8 + (n-1) \cdot 5 = 8 + 5n - 5$
P: Por aquí hay un ocho y aquí un menos cinco ¿Cuánto queda?
A: Tres más cinco n.
P: Cinco n más tres, verdad, vale, esto es igual a cinco n más tres
(Escribe en la pizarra) $a_n = 8 + (n-1) \cdot 5 = 8 + 5n - 5 = 5n + 3$
P: Resulta que con esta llave es más cómoda que esta ($a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$) yo puedo manejarme con esta sucesión $(8, 13, 18)$.

(E.2.3.)

Con el propósito de obtener evidencia que nos permitiera profundizar en los conocimientos movilizados por el profesor durante la selección y el uso de este ejemplo, le realizamos las siguientes preguntas.

I: ¿Por qué selecciona estos primeros datos y les pide buscar 200 y no uno más pequeño?
P: Por recurrir a algo concreto a lo que ya habíamos anunciado en momentos anteriores. Y para que vean la ventaja que tiene controlar una sucesión, que no importa que sea el 4 o el 200, tú cómodamente con un cálculo similar llegas al 200 por tener el término general. Que sí tú no lo tuvieras, pero has controlado la clave de las progresiones geométricas te puede tomar tres semanas para llegar al término.
I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

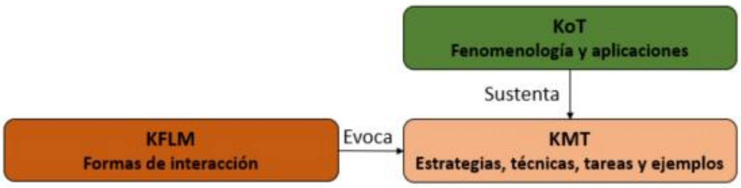
(P.2.3.)

La respuesta entregada por Pablo nos permitió obtener evidencia de los conocimientos que habrían operado en la selección de este ejemplo. Sabe que la búsqueda del término 200 le permite mostrar lo favorable que resulta controlar la sucesión (conocer el término general) (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.2.3., 4); que el término general le permite obtener cualquier término de la sucesión de forma cómoda (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.2.3, 4-5); y conoce una estrategia que podrían utilizar los estudiantes para determinar los términos de una progresión sin considerar su término general (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático – P.2.3., 6-8).

Durante la selección del ejemplo evidenciamos una relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$, el conocimiento que Pablo posee sobre la estrategia que podrían ocupar algunos estudiantes para determinar los términos de una sucesión, sin considerar el término general (KFLM), evoca su conocimiento sobre una estrategia, la búsqueda de un término de generalización lejana, la cual le permitiría mostrar lo favorable que resulta trabajar con el término general (KMT). También vemos una relación entre este KMT y su KoT, pues el conocimiento que posee sobre que el término general le permite obtener de forma cómoda cualquier término de la progresión (KoT), sustenta su conocimiento sobre lo apropiado que resulta proponer la búsqueda de un término de generalización lejana para mostrar lo favorable de trabajar con el término general (KMT), generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 29

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.2.3.

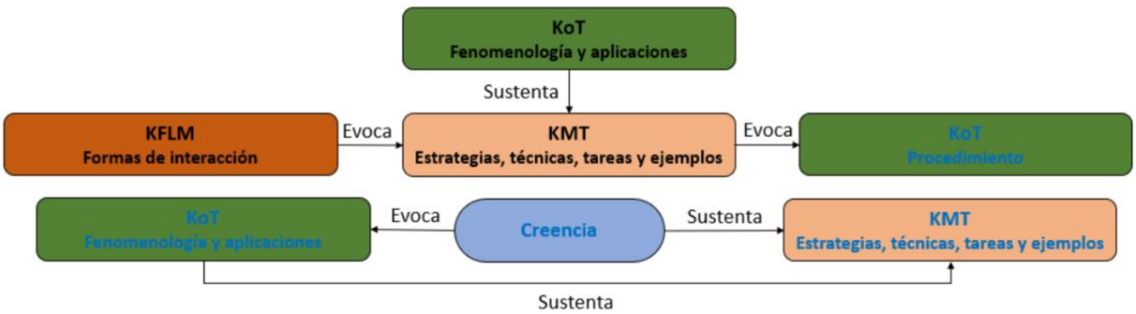


Estos episodios también nos entregaron evidencias de los conocimientos movilizados por Pablo al utilizar este ejemplo. Encontramos evidencias de su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.2.3., 10-13); y de que Pablo sabe que el término general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ le permite obtener el término general de cualquier progresión aritmética (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.2.3., 6-10). Pablo sabe cómo construir el término general de una progresión aritmética a partir del término general de las progresiones aritméticas, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (KoT; procedimientos – E.2.3., 14-27); que la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ nos permite obtener cualquier término de cualquier progresión aritmética (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.2.3., 27-29); y que referirse al término general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ como "la llave maestra" y al término general de una progresión aritmética como "la llave" puede favorecer la comprensión de estos conceptos (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.2.3., 7, 9-10).

Durante el desarrollo de este ejemplo vemos una relación entre su KMT y su KoT. Su conocimiento sobre lo apropiado que resulta plantear la búsqueda del término 200 para mostrar lo favorable de trabajar con el término general de la progresión aritmética (KMT), evoca al conocimiento que le permite construir el término general de la progresión aritmética a partir de la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (KoT), estableciéndose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. También evidenciamos la relación que hemos encontrado en episodios anteriores, entre su creencia, su KoT y su KMT. Su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas evoca los conocimientos que posee sobre la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y sobre el término general de una progresión aritmética (KoT) y sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta referirse a la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ como "la llave maestra" y al término general de una progresión aritmética como "la llave" (KMT). El KoT que ha movilizado es el conocimiento que sustenta la creación de estás metáforas, generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 30

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.2.3.



En el siguiente episodio (ejemplo 2.4) vemos el trabajo que el profesor continuó desarrollando con la progresión aritmética anterior, abordando algunos ejemplos de cómo deben trabajar con el término general para obtener distintos términos de la progresión. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. Después de haber obtenido el término general de la progresión, el profesor utiliza esta información para desarrollar un par de ejemplos de cómo deben operar con el término general para obtener un determinado término de la progresión, guiando a los estudiantes en el proceso y motivando su participación.

(Escribe en la pizarra) $a_n = 5n + 3$
P: Por ejemplo, si yo quiero buscar el término diez ¿Cuál es el término diez de esa?
¿Cinco por diez?
A: Cincuenta y tres.
P: Vale, y si ahora quiero buscar el término 200 de esta, que es el que yo quería,
pues sería 5 por 200.
A: 1.000.

P: 1.000, más tres.
A: 1.003.

(E.2.4.)

Para indagar en los conocimientos que operaron en la selección de este ejemplo, consideramos nuevamente esta pregunta, porque el profesor continuaba trabajando con la misma progresión, realizando la búsqueda del término que les propuso previamente.

I: ¿Por qué selecciona estos primeros datos y les pide buscar 200 y no uno más pequeño?
P: Por recurrir a algo concreto a lo que ya habíamos anunciado en momentos anteriores. Y para que vean la ventaja que tiene controlar una sucesión, que no importa que sea el 4 o el 200, tú cómodamente con un cálculo similar llegas al 200 por tener el término general. Que sí tú no lo tuvieras, pero has controlado la clave de las progresiones geométricas te puede tomar tres semanas para llegar al término.

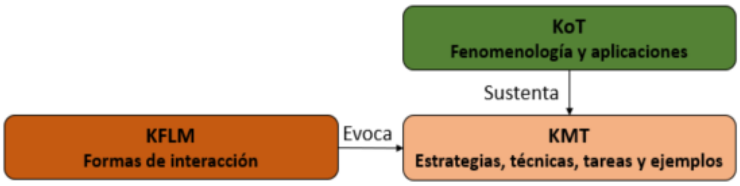
(P.2.4.)

Al tratarse del desarrollo del ejemplo que utilizó anteriormente para mostrar cómo construir el término general de una progresión aritmética, evidenciamos prácticamente las mismas relaciones. Pablo sabe que el término general de la progresión le permite obtener cualquiera de sus términos de forma cómoda (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.2.4, 4-5); sabe que la búsqueda de un término de generalización lejana le permite mostrar lo favorable que resulta controlar la sucesión (conocer el término general) (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.2.4., 4); y conoce la estrategia que podrían utilizar los estudiantes para determinar el término 200, sin utilizar el término general de la progresión (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático – P.2.4., 6-8).

Evidenciamos, en la selección de este ejemplo, las mismas relaciones que describimos en la selección del ejemplo anterior. Una relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre la estrategia que podrían utilizar los estudiantes (KFLM), evoca su conocimiento sobre una estrategia que le permite mostrar lo favorable de trabajar con el término general de la progresión (KMT). Y una relación $KoT \rightarrow KMT$, el conocimiento que posee sobre la utilidad del término general de una progresión aritmética (KoT), sustenta su conocimiento sobre lo permitente de esta actividad para mostrar los favorable de trabajar con el término general de la progresión (KMT).

Figura 31

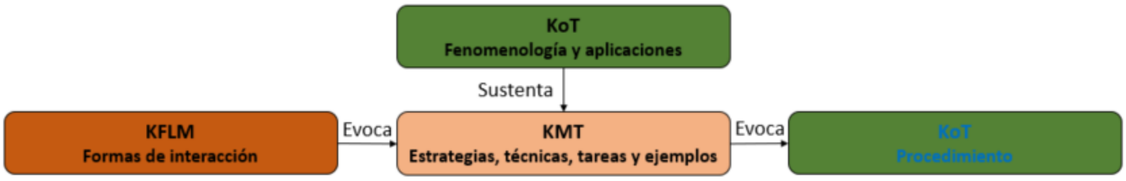
Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.2.4.



Durante el desarrollo de este ejemplo vemos que Pablo sabe cómo obtener los términos de una progresión aritmética por medio de su término general (KoT; procedimientos – E.2.4., 2-9). De esta forma, en el desarrollo de este ejemplo, vemos una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$, su conocimiento sobre lo permitente que resulta buscar un término de generalización lejana para mostrar lo favorable de trabajar con el término general de la progresión (KMT) parece evocar los conocimientos que le permiten buscar un determinado término por medio del término general (KoT).

Figura 32

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.2.4.



En el siguiente episodio (ejemplo 2.5) se describe la situación que el profesor utilizó para ejemplificar la forma de sumar los primeros n términos de una progresión aritmética. Corresponde a un ejemplo pasivo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor describe la historia de Carl Friedrich Gauss para mostrar a los estudiantes una forma de sumar los primeros ene términos de una progresión aritmética. En este ejemplo el profesor no propicia la participación de los estudiantes.

P: Bueno voy a proponer una situación que ocurrió en la realidad, nosotros vamos a aprender a buscar cualquier término de usa progresión aritmética pero también vamos a buscar la suma de todos los términos, por ejemplo, yo te digo ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros números?

P: ¿Habrá un mecanismo que te permita hacerlo cómodamente? Que no sea uno más dos tres, más tres seis, más cuatro diez, puntos suspensivos hasta llegar a 100, que tendrías que hacer 100 sumas, verdad. Y si te preguntan que hagas la suma de los 1.000 primeros, es pesado, ese mecanismo no es un mecanismo cómodo, entendéis.

P: Bueno os voy a comentar un caso real. Un maestro de primaria no tenía muchas ganas de trabajar y les dijo mira, van a sumar del 1 al 100, lo vais a hacer en tu cuaderno, cuando hayas sumado el último ahí me lo muestras. Les dejo esta tarea larga, cómoda y sencilla y los dejo, quería estar tranquilo.

P: No habían pasado dos minutos y se levanta un niño con diez años, maestro yo ya he acabado, cómo, que yo ya he acabado, y cuánto te da, me da 5.050. Y entonces el maestro se queda un poco pillado dice, espérate y tú cómo lo has hecho.

P: Estos son los números, ¿no?

(Escribe en la pizarra) 1,2, … … … … … . .97,98,99,100

A: Sí.

P: Si sumas el primero con el último, el segundo con el penúltimo, siempre sale lo mismo 101, el antepenúltimo con el tercero siempre sale 101, no maestro, cuántas parejitas hay en 100, 50 verdad maestro, pues 101 x 50 son 5.050.

1, 2, 3, … … …. 98, 99, 100

(E.2.5.)

Con el propósito de obtener evidencias de los distintos conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo, le realizamos a Pablo la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué expone toda la historia de cómo se originó la fórmula para la suma de los términos de una sucesión y no les dice simplemente esta es la fórmula?

P: No es solo el ejemplo, es también la significación, es una manera de predisponer a una curiosidad. La historia genera una curiosidad, entonces ya la propia curiosidad cambia la actitud del alumno ante lo que viene a continuación, ya es un logro. Segundo, depende del tipo de ejemplo, al final provoca una reacción en la que hace que tú te impliques más y quieras escuchar lo que pasa y luego te enteras cómo lo resolvió. Entonces también te puede ayudar eso un poco a controlar luego la situación, memorizar la suma de varios términos de una sucesión aritmética es relativamente cómoda porque en vez de memorizar así a ciegas tú dices espérate, este lo que hizo fue coger el primero y el último, bueno entre el primero y el ultimo está agrupando en pareja, pues al final hace un número de sumas que es la mitad de todos lo que hay, y esa forma de recordar la fórmula es muy cómoda.

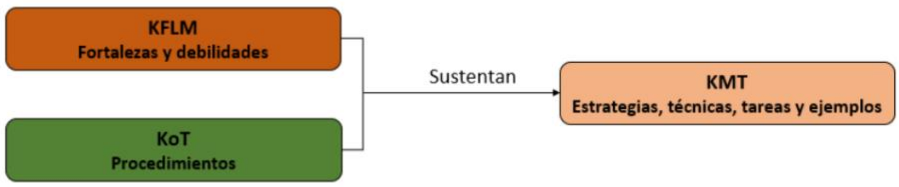
(P.2.5.)

La respuesta entregada por el profesor nos da evidencias de los conocimientos que habrían operado durante la selección de este ejemplo. Vemos que Pablo conoce el procedimiento que permite obtener la suma de los primeros ene términos de una progresión aritmética (KoT; procedimientos – P.2.5., 11-1), sabe que la ejemplificación que está utilizando tiene la potencialidad de favorecer el que los estudiantes recuerden el procedimiento que deben utilizar para sumar los primeros n términos de una progresión aritmética (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.2.5, 8-14) y genera interés en los estudiantes, en relación con el procedimiento que permite realizar la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (KFLM; Aspectos emocionales – P.2.5., 6-8).

De esta forma, durante la selección de este ejemplo, evidenciamos una relación $KFLM \rightarrow KMT$ y una relación $KoT \rightarrow KMT$. El conocimiento que Pablo posee sobre el procedimiento que permite calcular la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (KoT) y sobre el interés que genera en los estudiantes este ejemplo en particular (KFLM), sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta esta ejemplificación para que los estudiantes recuerden el procedimiento que deben realizar para sumar los primeros n términos de una progresión aritmética (KMT).

Figura 33

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.2.5.

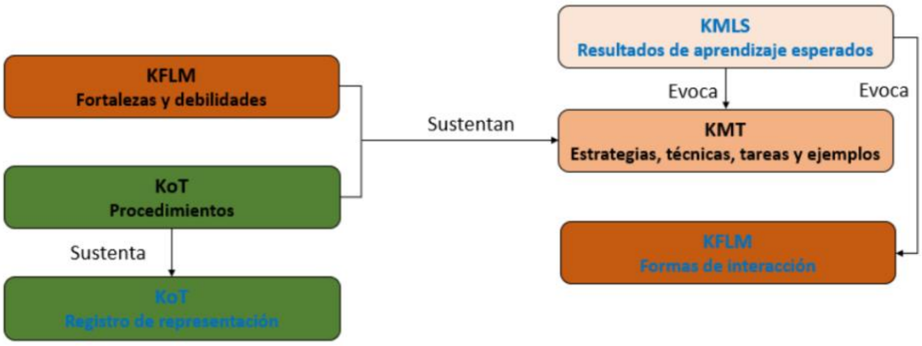


El episodio correspondiente a este ejemplo nos dio evidencias de que Pablo sabe que, al estudiar las progresiones aritméticas en este nivel, los estudiantes deben aprender a sumar los primeros n términos (KMLS; resultados de aprendizajes esperados – E.2.5., 3); conoce un procedimiento que podrían utilizar los estudiantes para calcular la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático – E.2.5., 5-9); y una forma de representar gráficamente el proceso que se realiza al sumar los primeros ene términos de una progresión aritmética (KoT; registros de representación – E.2.5., 24).

Durante la selección de este ejemplo evidenciamos una relación entre conocimientos de un mismo subdominio, el conocimiento que Pablo posee sobre el procedimiento que permite calcular la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (KoT), sustenta el conocimiento que posee de una representación gráfica de este procedimiento (KoT), estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KoT$. También hemos observado una relación entre su KMLS y el resto de los subdominios de su PCK. El conocimiento que posee sobre los resultados de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes al estudiar las progresiones aritméticas (KMLS), evoca su conocimiento sobre el procedimiento que podrían utilizar algunos estudiantes para calcular esta suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (KFLM); y su conocimiento sobre un ejemplo que resulta favorable para que los estudiantes recuerden la fórmula que les permite calcular esta suma (KMT), generándose una relación $KMLS \twoheadrightarrow KoT$ y una $KMLS \twoheadrightarrow KMT$.

Figura 34

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.2.5.



5.3. Sesión 3

En esta sesión vemos al profesor profundizando en el estudio de las progresiones aritméticas. Comienza revisando unos ejercicios sobre la búsqueda de los primeros términos de una sucesión, para luego enfocarse en el estudio de la progresión aritmética. Comienza recordándoles la importancia de conocer los elementos claves de esta progresión para construir su término general, el término a_1 y el valor de la distancia, asociando el valor de la distancia a la idea de creciente y decreciente que vieron en sesiones anteriores. Les entrega la fórmula para calcular la suma de los primeros n términos y realizan un primer ejercicio en donde se le entrega a los estudiantes el valor de la distancia y el término a_1 y se les pide que construyan el término general, que determinen algunos términos específicos y que desarrollen la suma de los primeros n términos. La sesión concluye con un ejercicio en el cual deben establecer el valor de la distancia y el término a_1, para luego construir el término general, buscar los términos solicitados y calcular la suma de primeros n términos.

En el siguiente episodio (ejemplo 3.1) vemos al profesor ejemplificando un procedimiento que les permite obtener el valor de la distancia de una progresión aritmética. Corresponde a un ejemplo pasivo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor utiliza la sucesión $3, 4, 5, 6, 7, 8...$ para mostrar a los estudiantes cómo pueden obtener el valor de la distancia y cómo este valor se relaciona con las sucesiones crecientes y decrecientes.

P: Ya lo estás viendo ahí (señalando $3, 4, 5, 6, 7, 8$), de qué depende, una vez que ves esto ya te das cuenta de que el término uno es tres, que la distancia es uno.
A: Pero la distancia la tienes que encontrar.
P: La ves ahí ¿no?, tú sabes que la distancia es siempre la diferencia entre dos términos consecutivos,

$$3,\ 4,\ 5,\ \overset{\frown}{6,\ 7},\ 8$$

P: Y, además, sabes que es creciente. Pero ¿y si le diera la vuelta y fuera decreciente? La distancia es menos uno, ¿lo ves o no?
A: Sí.
P: Entonces, ¿cómo busco yo siempre la distancia para evitar ese problema? Pues el siguiente menos el anterior, siguiente menos anterior, lo habéis visto, siguiente menos el anterior, entonces nunca tendrás problema en saber la distancia, ¿por qué? Porque una distancia puede ser positiva o negativa, pero claro tú dices espérate positiva siempre que es creciente, negativa siempre que sea…
A: Decreciente

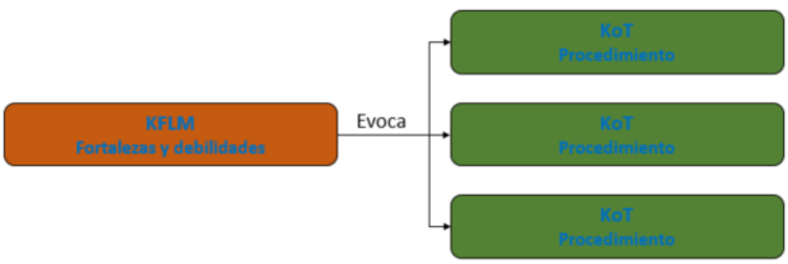
(E.3.1.)

Este episodio nos da evidencias de los distintos conocimientos movilizados por el profesor durante el desarrollo de este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que los estudiantes podrían tener dificultades al buscar la distancia de una progresión aritmética decreciente (KFLM; fortalezas y dificultades – E.3.1., 7-10); sabe cómo calcular la distancia de cualquier progresión aritmética, creciente o decreciente (KoT; procedimiento – E.3.1., 11-13); que las progresiones aritméticas crecientes tienen una distancia positiva y que las decrecientes tienen una distancia negativa (KoT; procedimiento – E.3.1., 13-16); y es capaz de identificar los elementos claves ($a_1\ y\ d$) de una progresión aritmética (KoT, procedimientos– E.3.1., 1-2).

En el desarrollo de este ejemplo vemos una relación entre su KFLM y su KoT. Su conocimiento acerca de que para los estudiantes podría ser complejo buscar la distancia de una progresión aritmética decreciente (KFLM) evoca un conjunto de conocimientos procedimentales que le permiten determinar la distancia de cualquier progresión aritmética (KoT), generándose una relación $KFLM \twoheadrightarrow KoT$.

Figura 35

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.3.1.



El siguiente episodio (ejemplo 3.2) describe la forma en que el profesor utilizó una progresión aritmética para ejemplificar el proceso de construcción de su término general. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor selecciona una de las progresiones propuestas en el texto de estudio, la progresión $3, 5, 7, 9, 11$ y pide a los estudiantes que determinen su término general utilizando el procedimiento que vieron en la clase anterior.

P: Quiero que observéis ahora otro ejemplo que tenéis aquí en el libro, de otra progresión aritmética, es 3, 5, 7, 9, 11 ¿Tú puedes buscar el término a_{20}?
A: Sí.
P: Podría buscar cualquier término ¿qué hacemos ahora? Tenemos una aritmética y queremos buscar un término ¿qué hacemos?
A: Hacemos la fórmula.
P: Directamente puedes coger la llave maestra, pero hay un camino más cómodo. Busco la llave de esta y busco el término que quiera, ¿cómo busco la llave de la que está en el libro? Vamos a ver los ingredientes, ¿cuál es el primer término?
A: El tres.
P: ¿Cuál es la distancia? ¿La diferencia?
A: Dos.
P: Tú tienes ahora aquí otra progresión aritmética, tú sabes que el primer término es 3, que la diferencia es 2, tú coges la llave maestra ($a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$), le metes estos ingredientes y obtienes la llave pequeñita.
P: ¿Cuál es la llave de esta progresión? ¿Cuál es la llave pequeñita que controla esa que está ahí? pues mete los ingredientes aquí (señalando $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$), y calculas con normalidad. ¿Cómo sería entonces? Decidme
A: Tres más…
P: Ah, ¿ahora qué?
A: n menos uno por dos.

(Escribe en la pizarra) $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$

P: Y ahora mira qué sale, mete la Thermomix los ingredientes y te sale el pastelito tranquilito ya sin problemas. ¿Cuánto vale eso? El tres está aquí, dos n que está aquí, menos dos, esto lo podemos agrupar, te sale dos n más uno.

$$a_n = 3 + 2 \cdot n - 2 = 3 - 2 + 2 \cdot n = 2 \cdot n + 1$$

P: Es decir, el termino general es $2n + 1$, esta es la llave pequeñita que la has sacado de la llave maestra, ¿habéis visto? Y ahora yo puedo buscar un término cualquier de esa (señalando $3, 5, 7, 9, 11$) cómodamente.

(E.3.2.)

Para obtener evidencias de los conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo de sucesión, le realizamos a Pablo la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué desarrolla la actividad con esta sucesión?
P: Es una sucesión simple, en la cual no es difícil encontrar el siguiente, y el siguiente, y el siguiente, aunque tú no conozcas el término general, pero claro si te preguntan un término muy avanzado cómo tú no tengas el término general. Te puede llevar a ver la ventaja que tiene el controlar, en este caso conocer el

término general de una sucesión. Volverlo a visualizar vamos, aparte de hacer la práctica en sí con esta en concreto.
I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

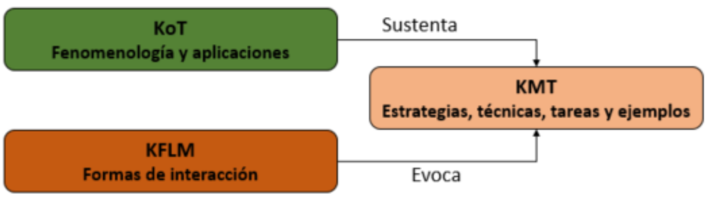
(P.3.2.)

La respuesta entregada por el profesor nos entregó evidencia de los conocimientos que movilizó durante la selección de este ejemplo. Pablo sabe que el término general de una progresión aritmética le permite obtener términos de generalización lejana de forma cómoda (KoT, fenomenología y aplicaciones – P.3.2., 3-4); que esta progresión aritmética le permite mostrar la ventaja de conocer el término general (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.3.2., 5-6); y conoce un procedimiento que algunos estudiantes podrían utilizar para buscar los términos de una progresión aritmética (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático – P.3.2., 2-3).

Durante la selección de este ejemplo evidenciamos una relación entre su KFLM y su KMT y otra entre su KoT y su KMT. El conocimiento que Pablo posee sobre el procedimiento que los estudiantes podrían utilizar para determinar los términos de una progresión aritmética, la construcción sucesiva de los términos (KFLM), evoca un ejemplo de progresión aritmética que le permite mostrar a los estudiantes lo cómodo de trabajar con el término general cuando se buscan términos de generalización lejana (KMT), generándose una relación $KFLM \twoheadrightarrow KMT$. Mientras que el conocimiento que posee sobre el potencial didáctico de esta progresión aritmética (KMT) se sustentar en su conocimiento sobre lo cómodo que resulta utilizar el término general para buscar términos de generalización lejana (KoT) estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 36

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.3.2.



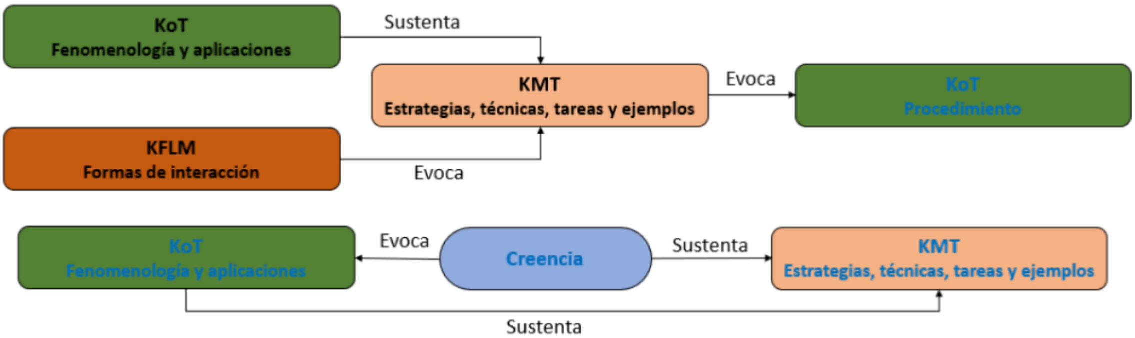
Estos episodios también nos permitieron obtener evidencias de su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.3.2., 9-12) y de los distintos conocimientos movilizados por Pablo durante el desarrollo de este ejemplo. Sabe realizar operaciones aritméticas con expresiones algebraicas (KoT; procedimientos – E.3.2., 22-26); sabe que el término general de las progresiones aritméticas, la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, le permite obtener cualquier término de cualquier progresión aritmética (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.3.2., 7); sabe que referirse al término general de las progresiones aritméticas como "la llave maestra" y al término general de una progresión en particular como "la llave pequeñita" puede favorecer la comprensión de estos conceptos (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.3.2., 7); sabe que el término general de una progresión aritmética le permite obtener cualquier término de la progresión de forma cómoda (KoT, fenomenología y aplicaciones – P.3.2., 27-29); y cómo construir el término general de una progresión aritmética a partir del término general de las progresiones aritméticas, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (KoT; procedimientos – E.3.2., 13-26).

En el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una primera relación entre su KMT y distintos conocimientos asociados a la categoría de procedimientos de su KoT. El conocimiento que posee sobre el potencial didáctico de la progresión aritmética que ha seleccionado, para mostrar la ventaja de conocer el término general (KMT), evoca los conocimientos procedimentales necesarios que le permiten construir el término general de la progresión aritmética seleccionada; es decir, saber cómo construir el término general de una progresión aritmética, a partir del término general de las progresiones aritméticas (KoT) y sobre cómo realizar operaciones aritméticas con expresiones algebraicas (KoT), estableciéndose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$.

También evidenciamos nuevamente las relaciones que se generan entre su creencia, su KMT y su KoT al utilizar alguna metáfora. Su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas evoca los conocimientos de fenomenología y aplicaciones referentes a la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y al término general de una progresión aritmética (KoT); y sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta referirse a la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ como "la llave maestra" y al término general de una progresión aritmética como "la llave" (KMT). El KoT que ha movilizado es el conocimiento que sustenta la creación de estás metáforas, generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 37

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.3.2.



El episodio (ejemplo 3.3) que se presenta a continuación corresponde al instante en que el profesor selecciona y utiliza por primera vez el ejemplo de sucesión que ha seleccionado. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. Pablo selecciona la sucesión $2,6,10,14,18$ ..., propuesta en el texto de estudio, y la utiliza en una primera instancia para ejemplificar el procedimiento que les permite obtener el término general de una progresión aritmética, motivando la participación de los estudiantes en el desarrollo de este ejemplo.

P: ¿Quién quiere leer el 9? Lo voy a usar de ejemplo.
A: Yo maestro, comprueba que la sucesión $2,6,10,14,18$ ... es una progresión aritmética. Calcula la expresión del término general y el término a_{80}.
P: Muy bien, ¿te falta algún ingrediente?
A: No.
P: No, ¿cuáles son los que tienes?
A: La distancia 4 – la n – el primer término.
P: Pues sería ese caso es el más simple ¿no? Te han dado los ingredientes. Yo voy a preguntar otra cosa que no está ahí, la suma de los 20 primeros.
P: Entonces el término general lo saco de ahí (señalando $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$). Esto lo debéis tener tú ya claro, esta es la llave maestra, la llave maestra la tienes tú tatuada, te la miras cuando tú quieras, porque no te la van a volver a dar. Bueno me vais diciendo ustedes.
A: Seria ocho, a no dos.
P: Dos, porque el a_1 es dos, y la distancia es…
A: Cuatro.
(Escribe en la pizarra) $a_1 = 2$ $d = 4$
P: Eso ya tenemos todo clarito. Entonces en este caso la a_1 es dos, pues como yo estoy buscando esto (señala a_n) voy con los ingredientes.
A: Dos más n menos uno por cuatro.
(Escribe en la pizarra) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$
P: Y ahora lo que hemos hecho antes, ahora yo cojo, calculo, simplifico, y me sale que el término general de esta (señalando $2, 6, 10, 14..$) la llave pequeñita de esta, ¿cuánto vale? Mira, ya esto, el que quiera hacerlo más lentamente que lo

haga, pero bueno, cuatro n, aquí sale un menos cuatro ($-1 \cdot 4$) pero aquí hay un dos.
A: Menos dos.
(Escribe en la pizarra) $a_n = 4n - 2$
P: Menos dos, esta es la llave, ya he respondido una pregunta.
(P.3.3.)

Para obtener evidencia de los distintos conocimientos que habrían operado en la selección de este ejemplo, realizamos a Pablo la siguiente pregunta.

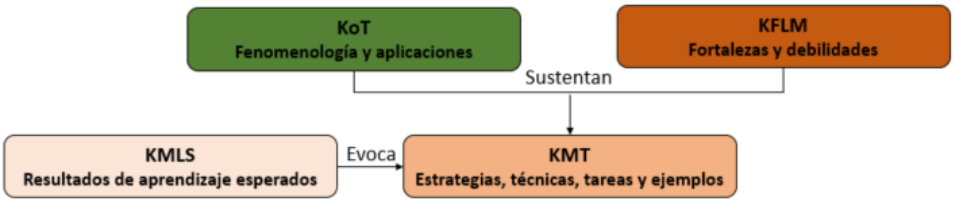
I: ¿Por qué razón trabaja con esta progresión?
P: Es un ejercicio simple donde tú puedes controlar, buscar un término general, de manera sencilla. Aquí la cuestión no estaba en la complicación del cálculo matemático sino en la utilidad de las herramientas, que conozcan el término general de las progresiones aritméticas, la expresión del término general y que lo apliquen en estos casos.
I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?
P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.
(P.3.3.)

La respuesta entregada por Pablo nos permitió obtener evidencia de los conocimientos movilizados durante la selección de este ejemplo de progresión aritmética. Vemos que Pablo sabe que los estudiantes no tendrán dificultad en determinar el término general de esta progresión (KFLM; fortalezas y dificultades – P.3.3., 2-3); que este ejemplo le permite profundizar en el estudio de la utilidad de las distintas fórmulas asociadas a las progresiones aritméticas (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.3.3., 3-5); que la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ le permite obtener el término general de una progresión aritmética (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.3.3., 5-6); que el término general de una progresión aritmética le permite obtener cualquiera de sus términos, en este caso el a_{80} (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.3.3., 5-6); y que conoce los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes al estudiar las progresiones aritméticas (KMLS; resultados de aprendizaje esperado – P.3.3., 3-5).

En la selección de este ejemplo vemos cómo los distintos conocimientos se relacionan con el KMT movilizado por el profesor. El conocimiento que posee sobre los resultados de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes al abordar las progresiones aritméticas (KMLS) evoca su conocimiento sobre un ejemplo de sucesión que le permite profundizar en el estudio de estas progresiones (KMT), estableciéndose una relación $KMLS \twoheadrightarrow KMT$. También evidenciamos una relación $KoT/KFLM \rightarrow KMT$, su conocimiento sobre la utilidad de la expresión $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ (KoT), sobre la utilidad del término general de una progresión aritmética (KoT) y su conocimiento sobre que los estudiantes no tendrían dificultad en establecer el término general de esta progresión (KFLM), sustentan su conocimiento sobre lo pertinente que resulta este ejemplo para profundizar en el estudio de las distintas fórmulas asociadas a las progresiones aritméticas (KMT).

Figura 38

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.3.3.

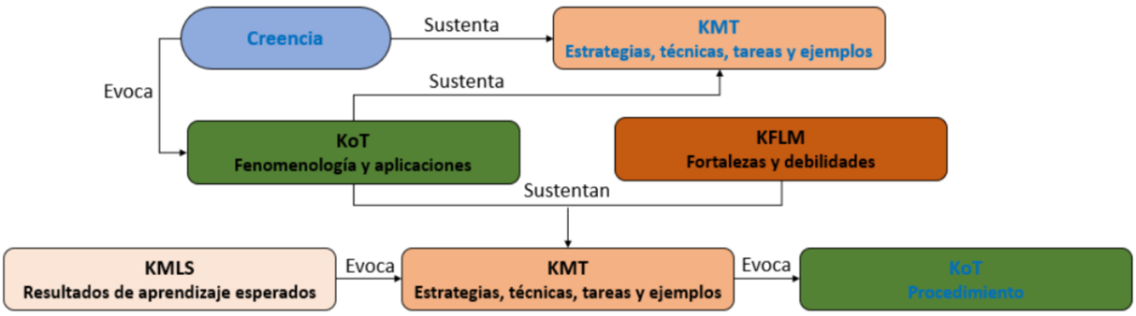


Estos episodios también nos han permitido obtener evidencias de los conocimientos y la creencia que el profesor habría movilizado al utilizar este ejemplo. Evidenciamos que Pablo sabe realizar operaciones aritméticas con expresiones algebraicas (KoT; procedimientos – E.3.3., 21-28); cómo construir el término general de una progresión aritmética a partir del término general de las progresiones aritméticas, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (KoT; procedimientos – E.3.3., 13-28); y que al referirse al término general de las progresiones aritméticas como a "la llave maestra" y al término general de una progresión en particular como a "la llave pequeñita" puede favorecer su comprensión de estos conceptos (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.3.3., 10-11, 23). También obtuvimos evidencia de su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.3.3, 8-11).

En el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una relación entre su KMT y su KoT. El conocimiento que posee sobre el potencial de esta sucesión para mostrar a los estudiantes la utilidad de las distintas fórmulas asociadas a las progresiones aritméticas (KMT) evoca a aquellos conocimientos procedimentales necesarios para el desarrollo de este ejemplo, a saber, su conocimiento sobre cómo construir el término general de una progresión aritmética a partir de la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y sobre cómo realizar operaciones aritméticas con expresiones algebraicas (KoT), generándose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. También encontramos nuevamente evidencias de la relación que se da entre su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas, su conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones correspondiente a su KoT y su conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos correspondiente a su KMT.

Figura 39

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.3.3.



El siguiente episodio (ejemplo 3.4) describe el instante en que el profesor utiliza la sucesión $2,6,10,14,18 \ldots$, para ejemplificar otro procedimiento. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. Después de haber obtenido el término general de la progresión aritmética el profesor guía a los estudiantes en el procedimiento que deben realizar para encontrar el término a_{80}, motivando la participación de los estudiantes en el desarrollo de este ejemplo.

P: Vale. Puedo buscar entonces el término 80.
A: Sí.
P: Sí, y ¿adónde me voy a buscar el término ochenta?
A: Al a_n – ochenta por cuatro.
P: Pues aquí (señalando $a_n = 4n - 2$) en la llave pequeñita es más fácil, entonces
el término 80 sería, coges la llave, cuatro por ochenta, sigue tú.
(Escribe en la pizarra) $a_{80} = 4(80)$
A: Menos dos.
P: Menos dos, y esto ¿cuánto es?
(Escribe en la pizarra) $a_{80} = 4(80) - 2 =$
P: No me coges la calculadora para eso. Cuatro por ochenta, cuatro por ocho treinta
y dos, trecientos veinte, menos dos.
A: 318
(Escribe en la pizarra) $a_{80} = 4(80) - 2 = 318$
P: 318, ya has respondido a la segunda pregunta, el término ochenta es el 318.
(E.3.4.)

Hemos considerado para la selección de este ejemplo las mismas preguntas que le realizamos a Pablo y las mismas relaciones de conocimiento que evidenciamos en el caso anterior, debido a que la ejemplificación de este procedimiento se desarrolla con el mismo ejemplo de sucesión que utilizó en el episodio descrito anteriormente.

I: ¿Por qué razón trabaja con esta progresión?
P: Es un ejercicio simple donde tú puedes controlar, buscar un término general, de
manera sencilla. Aquí la cuestión no estaba en la complicación del cálculo

matemático sino en la utilidad de las herramientas, que conozcan el término general de las progresiones aritméticas, la expresión del término general y que lo apliquen en estos casos.

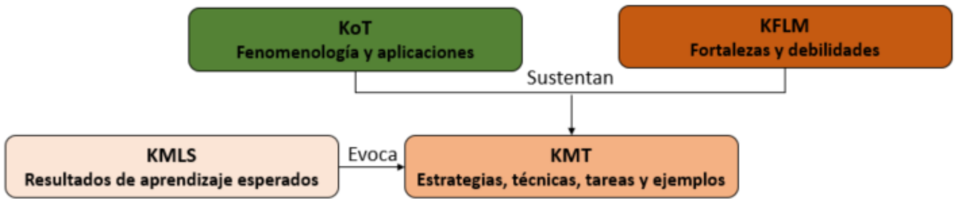
I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estas con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta.

(P.3.4.)

Figura 40

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.3.4.

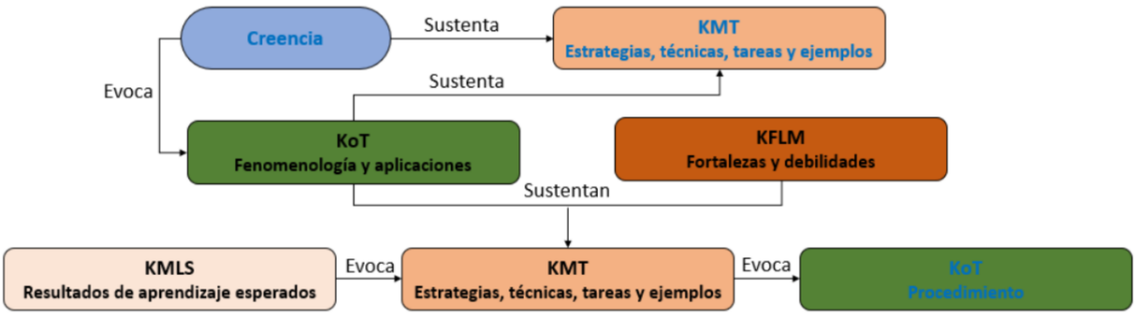


En el desarrollo de este ejemplo hemos encontrado evidencia de que Pablo sabe cómo obtener un determinado término de una progresión aritmética por medio de su término general (KoT; procedimientos – E.3.4., 6-14); y que el referirse al término general de una progresión en particular como “la llave pequeñita” puede favorecer su comprensión de este concepto (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.3.4., 5-6). Nuevamente obtenemos evidencia de su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas (P.3.4., 8-11).

En el desarrollo de este ejemplo, al igual que en el anterior, encontramos una relación entre su KMT y su KoT, pues el conocimiento que posee sobre el potencial de esta sucesión para mostrar a los estudiantes la utilidad del término general de una progresión aritméticas (KMT) evoca su conocimiento sobre cómo obtener un determinado término de una progresión aritmética por medio de su término general (KoT), conocimiento procedimental necesario para el desarrollo de este ejemplo, generándose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. También encontramos nuevamente evidencias de la relación que se da entre su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas, su conocimiento sobre la utilidad del término general de una progresión aritmética (KoT) y su conocimiento sobre lo favorable de referirse al término general de una progresión como “la llave pequeña” (KMT).

Figura 41

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.3.4.



El siguiente episodio (ejemplo 3.5) describe la última ejemplificación de procedimiento que el profesor desarrolló con la sucesión $2,6,10,14,18$ …. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor utiliza la sucesión $2,6,10,14,18$ … para ejemplificar el procedimiento que deben realizar para obtener la suma de los primeros 20 términos de una progresión aritmética por medio de la fórmula que desarrollaron durante la sesión anterior, motiva la participación de los estudiantes en el desarrollo de este ejemplo.

P: ¿Tú puedes buscar el término ... la suma de los veinte primeros?
A: Sí.
P: ¿Qué necesitas?
A: El a_1.
P: Y ¿lo conoces?
A: Dos.
P: Aquí (señalando $a_1 = 2$) dos más término veinte, no es este el término veinte (señalando a_n en la fórmula de s_n) ¿lo tienes?
A: No.
P: No, no pasa nada, pero sabes que es este (señalando a_{20}) que hay que tener en cuenta, no estás buscando otra cosa, pues lo pones, término veinte ¿por quién? ¿qué pone aquí? (señalando n en la fórmula de s_n)

$$s_{20} = (2 + a_{20}) \cdot n$$

A: Por veinte
P: Estoy buscando los veinte primeros, la n vale veinte, partido de dos ¿o no?

$$s_{20} = \frac{(2 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

A: Sí.
P: Sí, claro, entonces esto es lo que yo necesito, como me hace falta el veinte, ¿yo tengo problema en buscar un término en una progresión aritmética?
A: No.
P: Pues lo busco, igual que he buscado el ochenta, ¿no han buscado el ochenta?
A: Sí.
P: ¿Y yo puedo buscar el veinte? O el diecisiete, el que me dé la gana
A: Yo lo he buscado, da 798
P: Cuatro por veinte menos dos, ¿cuánto es eso?

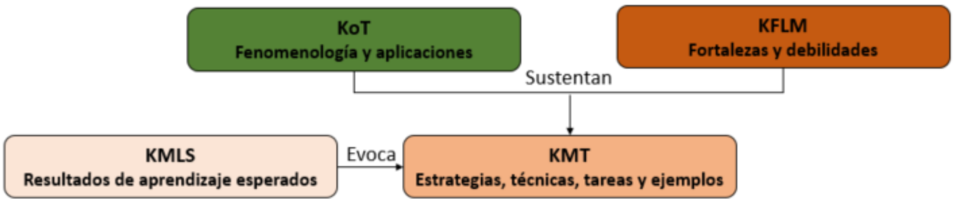
26 $a_{20} = 4(20) - 2 =$
27 A: 798 – no – 78 – no 78
28 $s_{20} = \dfrac{(2+78) \cdot 20}{2}$
29 P: ¿Podéis calcular la suma de los veinte primeros?
30 A: 800.

(P.3.5.)

Hemos considerado, para la elección de este ejemplo, las mismas relaciones que evidenciamos en el ejemplo 3.3, dado que el profesor sigue trabajando con el ejemplo de sucesión propuesto en el texto de estudio, la sucesión 2,6,10,14,18 …

Figura 42

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.3.5.

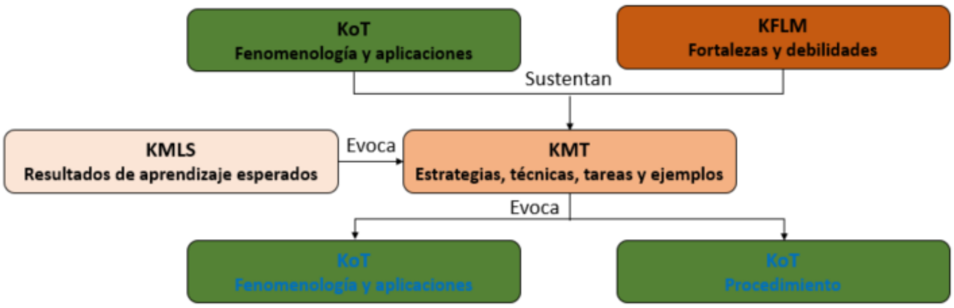


En este episodio hemos encontrado evidencias de los conocimientos movilizados por el profesor en el desarrollo de este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que el término general de una progresión aritmética le permite obtener cualquiera de sus términos (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.3.5., 18-23); y cómo obtener la suma de los primeros ene términos de una progresión aritmética, utilizando la fórmula $s_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$ (KoT; procedimientos – P.3.5., 10-30).

Al igual que en los ejemplos para la práctica de un procedimiento, descritos anteriormente, en el desarrollo de este ejemplo encontramos una relación entre su KMT y su KoT. El conocimiento que posee sobre lo pertinente que resulta este ejemplo de sucesión, para el estudio de las distintas fórmulas asociadas a las progresiones aritméticas (KMT), evoca los conocimientos necesarios para el desarrollo de esta ejemplificación, es decir, su conocimiento sobre la utilidad del término general de una progresión aritmética (KoT) y sobre cómo obtener los primeros n términos de una progresión aritmética (KoT), generando en ambos casos una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$.

Figura 43

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.3.5.



5.4. Sesión 4

Esta cuarta sesión comienza con la resolución de la actividad sobre progresiones aritméticas que quedó pendiente de la clase anterior. En ella se aborda una forma de determinar la distancia y el termino a_1 de una progresión aritmética, conociendo solo dos términos de ella; también se desarrolla la suma de los primeros n términos. Finaliza esta sesión con la propuesta de algunos ejercicios sobre progresiones aritméticas y geométricas que involucran situaciones cotidianas, ejercicios que le permiten establecer la diferencia entre las dos progresiones.

En este primer episodio (ejemplo 4.1) vemos al profesor ejemplificando un procedimiento que les permite obtener el término general de una sucesión conociendo solo dos términos de ella. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor utiliza uno de los ejercicios propuestos en el texto de estudio para guiar a los estudiantes en un proceso que les permite, por medio de los sistemas de ecuaciones, obtener el valor de a_1 y de la $distancia$ a partir de dos términos cualesquiera de una progresión, involucrando a los estudiantes en el desarrollo de este ejemplo.

P: Vamos a ver un caso, quiero que leáis el diez.
A: Calcular el término a_{21} de una progresión aritmética conocidos los términos $a_3 = 8$ y $a_{11} = 32$.
P: Anda, te han dado otra información ¿verdad?
A: Sí.
P: Pero en esa información no aparece ninguno de los dos ingredientes claves.
A: No.
P: No, pero no pasa nada, vamos a mirar qué tenemos, lo primero la recogida de datos. Tú sabes una cosa, que esto lo controlamos (señalando las fórmulas de a_n y s_n) tú sabes esto. Te han dado el tres, pero también te han dado cuál.
A: El once.
(Escribe en la pizarra) $a_3 = 8$ $a_{11} = 32$

P: Sí tú conoces dos términos de una progresión me da igual que sea tres, el once, el quince, me da igual lo que sea, ¿yo tengo capacidad de controlarla? Es decir, sería capaz de buscar el a_1 y la d.
A: Sí.
P: Muy fácil, ¿cuál es la única verdad que tu conoces de las progresiones aritméticas? Bueno tú conoces dos, conoces esto (a_n) y esto (s_n) no hay más verdades hasta ahora. ¿Es verdad o no es verdad?
A: Sí.
P: Pues con esto (señalando las fórmulas de a_n y s_n) y esto (señalando $a_3 = 8$ y $a_{11} = 32$) tú tienes que ser capaz de buscar el a_1 y la d. ¿Existe el a_1 y la d en esta expresión? (señalando la fórmula de a_n).
A: En la expresión sí.
P: Conoces el término tres, ¿cuánto es el término tres?
A: Ocho.
P: Y entonces ¿la n cuánto vale?
A: Ocho.
P: ¿La n cuánto vale?
A: Tres.
P: Tres, ¿este lo sabes? (señalando a_1 en la fórmula de a_n) pues no lo sabes.
P: Esto vale tres (la n en la fórmula de a_n) esto vale ocho (a_n en la fórmula de a_n).
A: No tres – no tres.
P: No confundas el a_3 vale ocho, pero esto es el lugar (señalando el 3 en a_3)
A: Es el número – ¿y el a_n?.
P: La n es lo que vale 3 (señalando $a_3 = 8$). Entonces qué tienes tú, una verdad pero dos incógnitas (señalando a_1 y d en $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$) que tú no conoces, ¿qué pasa cuando tú tienes una verdad y dos incógnitas? que si eres capaz de buscar otra verdad con las mismas incógnitas, ¿qué tienes?
A: Una ecuación.
P: ¿Qué tienes si tienes dos verdades con dos incógnitas?
A: Un sistema.
P: Ah, un sistema, y ¿tú sabes resolver un sistema?
A: Sí.

(E.4.1.)

Para indagar en los conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo, le realizamos a Pablo la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué selecciona ese ejercicio en particular?
P: Porque ahí hay un nivel superior, ahí es aplicar lo que han aprendido de las ecuaciones, de los sistemas de ecuaciones, esa es una herramienta que está ahí y te va a servir independientemente del área o el concepto que estés trabajando. Entonces aquí conociendo ya que lo que es una sucesión, hay una serie de datos que tú no tienes, pero puedes plantear dos igualdades ¿Qué dos verdades hay ahí? Pues mira te están dando dos términos, ¿tú sabes localizar dos términos con la llave? Plantea los datos que tienes y observas que puedes plantear dos verdades y tienes dos datos desconocidos.

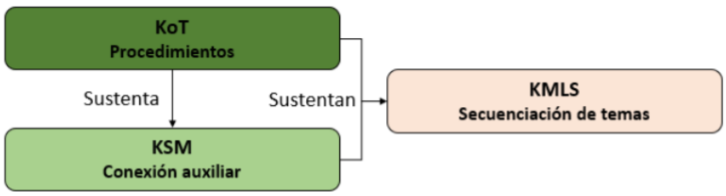
(P.4.1.)

La respuesta entregada por el profesor nos permitió obtener evidencias de los conocimientos que habrían operado en la selección de este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que las capacidades que han desarrollado los estudiantes al estudiar los sistemas de ecuaciones pueden contribuir al aprendizaje de la búsqueda del término general de una progresión aritmética (KMLS; secuenciación de temas – P.4.1., 2-3); cómo encontrar el valor de a_1 y de la distancia de una progresión, utilizando un sistema de ecuaciones (KoT; procedimientos – P.4.1., 5-9); y que en algunas ocasiones se puede apelar a los sistemas de ecuaciones para obtener el valor del a_1 y de la distancia de una progresión aritmética (KSM; conexiones auxiliares – P.4.1., 5-6).

Durante la selección de este ejemplo hemos evidenciado distintas relaciones, el conocimiento que Pablo posee sobre el procedimiento que le permite obtener el valor de a_1 y de la distancia por medio de un sistema de ecuación (KoT), sustenta su conocimiento sobre la conexión que se puede establecer entre los sistemas de ecuaciones y las progresiones aritméticas (KSM), generándose una relación $KoT \rightarrow KSM$. Mientras que estos dos conocimientos, su KoT y su KSM, sustentan su conocimiento sobre que las capacidades que desarrollaron los estudiantes al abordar los sistemas de ecuaciones pueden contribuir al aprendizaje de las progresiones aritméticas (KMLS), estableciéndose una relación $KoT/KSM \rightarrow KMLS$.

Figura 44

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.4.1.



Durante el desarrollo de este ejemplo encontramos evidencia de los conocimientos movilizados por el profesor durante el uso de este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que necesita conocer el valor de a_1 y de la distancia para establecer el término general de una progresión aritmética (KoT; procedimiento – E.4.1., 4-6); que, si tiene dos incógnitas necesita establecer un sistema con dos ecuaciones para determinar sus valores (KoT; procedimientos – E.4.1., 36-40); que los estudiantes son capaces de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (KFLM; fortalezas y dificultades – E.4.1., 41-44); y que algunos estudiantes comenten el error de confundir el valor de un término con su posición (KFLM; fortalezas y dificultades – E.4.1.,32-34).

Durante el desarrollo de este ejemplo observamos algunas relaciones entre los conocimientos movilizados por Pablo. Vemos cómo se relacionan entre sí distintos conocimientos correspondientes a una misma categoría, su conocimiento sobre los dos datos que se necesitan para establecer el término general de una progresión aritmética (KoT), se complementar con su conocimiento sobre cómo trabajar con sistemas de ecuaciones (KoT), estableciéndose una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. Estos dos conocimientos sustentan su conocimiento sobre cómo encontrar el valor de a_1 y de la distancia de una progresión, utilizando por medio de un sistema de ecuaciones (KoT), generándose una relación $KoT \rightarrow KoT$. También encontramos una relación $KFLM \rightarrow KMLS$, el conocimiento que posee sobre que los estudiantes son capaces de resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (KLFM), sustenta su conocimiento sobre que las capacidades que han desarrollado los estudiantes al estudiar los sistemas de ecuaciones pueden contribuir al aprendizaje de las progresiones aritmética (KMLS).

Figura 45

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.4.1.

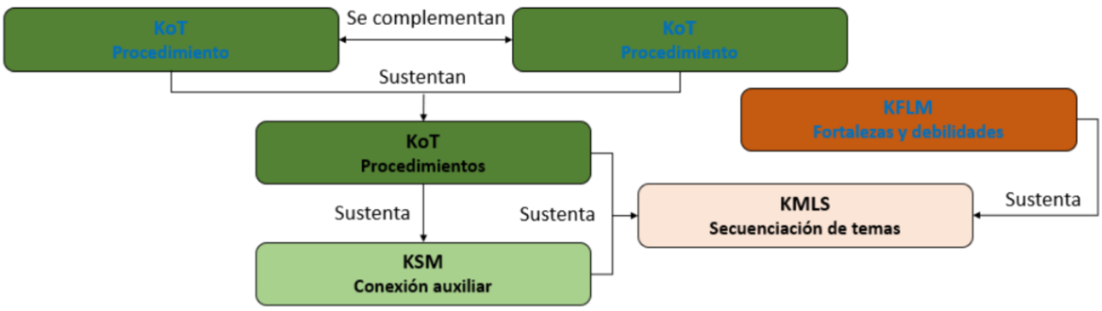


Figura 45: Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.4.1

En el siguiente episodio (ejemplo 4.2) vemos a Pablo proponiendo un ejemplo de progresión aritmética basado en una situación cotidiana. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor utiliza este ejemplo de progresión aritmética, el cual representa los kilómetros recorridos por un atleta diariamente, para reforzar lo que han estudiado en relación con las progresiones aritméticas. Fomenta la participación de los estudiantes en el desarrollo de este ejemplo.

P: En un entrenamiento un atleta empieza el primer día haciendo 6 kilómetros y cada día aumenta dos kilómetros, vale, si yo te pregunto en el día veinte, ¿cuántos kilómetros recorre solo el día veinte? ¿Tú lo podrías calcular?
A: No sé – no.
P: Acabo de decir los datos, empieza el primer día con seis kilómetros, cada día el entrenamiento lo aumenta en dos kilómetros ¿tú podrías buscar la respuesta a esa pregunta?
A: Sí.
P: Sí, y si te pregunto cuántos kilómetros recorrió desde el día que empezó hasta el día veinte, ¿podrías saber cuántos kilómetros ha hecho en total?

A: Sí

Datos
1º día → $6km = a_1$
Cada día suma $2km = d$
¿Cuánto corrió día 20?

6, 8, 10, 12

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{20} = 6 + (20-1) \cdot 2 =$
$= 6 + 19 \cdot 2 = 6 + 38 = 44$

Suma de los 20 primeros

$$s_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot n}{2} = \frac{(6+44) \cdot 20}{2} = \frac{50 \cdot 20}{2} = 500km$$

P: Este es el término general (señalando $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$) de una progresión aritmética cualquiera, la llave maestra decimos nosotros. Ha buscado el término 20 usando la llave maestra, no usando la mini llave. Si te piden que busques la mini llave, dicho correctamente, ¿cómo te lo preguntarían?

A: Que halle la expresión para esa …

P: Muy bien, que busques el término general para esa progresión aritmética, vamos a buscarlo porque aquí no lo ha buscado, ¿cómo sería entonces?

A: Seis más n menos uno por la distancia.

P: El término de esta es seis más n menos uno por, ¿en este caso?

A: Por d, por dos.

$$a_n = 6 + (n-1) \cdot 2$$

A: Es lo que he hecho yo.

P: Tú has buscado directamente el término 20, con esta misma llave (señalando $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$), está bien hecho, pero no has buscado la llave para esta

P: Muy bien, menos dos y seis, sale cuatro.

$$a_n = 2n + 4$$

P: ¿Cómo es el término 20? Dos por veinte más cuatro, cuarenta y cuatro. Luego preguntaba cuántos kilómetros recorría en todo el recorrido.

A: Pues la suma de todo.

P: Pues la suma de los veinte primeros. Y si te hubiera preguntado ¿cuántos kilómetros ha hecho hasta el día quince? ¿qué te haría falta aquí?

A: Pues el a_{15}.

(E.4.2.)

Para obtener evidencias de los conocimientos que habrían influido en la selección de este ejemplo, le realizamos a Pablo la siguiente pregunta.

I. ¿Por qué en los ejemplos, que utiliza para la enseñanza de las matemáticas, apela a situaciones cotidianas?

P. Capta la atención y crea expectación, si encima es algo muy asequible a la vida suya y directa, es significativo para ellos, y entonces en parte busco la garantía de que atiendan a una situación para luego ver cómo se puede resolver.

I: ¿Por qué les presenta esa situación en particular?

P: El deporte es una cosa que ellos ven cotidianamente, entienden lo que es un entrenamiento. Es un ejemplo que te permite controlar algo cotidiano, algo que tiene uso, la parte práctica de las matemáticas. No decir simplemente dada la sucesión tal, le marcas unos números, le haces la misma pregunta.

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estás con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta

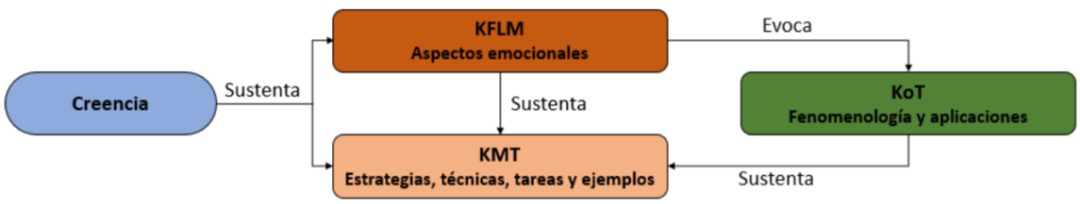
(P.4.2.)

La respuesta entregada por Pablo deja de manifiesto la creencia que posee sobre que los ejemplos que involucran situaciones cotidianas captan la atención y crean expectación en los estudiantes (P.4.2., 3). También nos da evidencias de los conocimientos que ha movilizado al seleccionar este ejemplo. Sabe que para los estudiantes resulta significativo conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas (KFLM; aspectos emocionales – P.4.2., 4); que el ejemplo, basado en una situaciones cotidiana, que ha presentado ayuda a que los estudiantes se involucren en la búsqueda del término que les ha solicitado y en la suma de los primeros ene términos (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.4.2., 4-5) y conoce aplicaciones cotidianas para las progresiones aritméticas -(KoT; fenomenología y aplicaciones – P.4.2., 7-10).

Durante la selección de este ejemplo vemos una relación $KFLM \rightarrow KMT$. El conocimiento que posee sobre lo significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas (KFLM), sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta este ejemplo, que apela a situaciones cotidianas, para que los estudiantes se involucren con el desarrollo de algunas de las fórmulas asociadas a las progresiones aritméticas (KMT). A la vez que ambos conocimientos parecen tener sustento en su creencia sobre el potencial que tienen los ejemplos que apelan a situaciones cotidianas para captar la atención de los estudiantes. También evidenciamos una relación entre su KFLM y su KoT; el conocimiento que posee sobre lo significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas (KFLM), evoca su conocimiento sobre situaciones cotidianas que pueden involucrar el uso de progresiones aritméticas (KoT), generándose una relación $KFLM \twoheadrightarrow KoT$. Y una relación entre su KoT y su KMT, el conocimiento que posee sobre algunas aplicaciones cotidianas para las progresiones aritméticas (KoT), sustenta su conocimiento sobre un ejemplo que resulta significativo para los estudiantes por apelar al uso cotidiano de las progresiones aritméticas (KMT), estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 46

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.4.2.

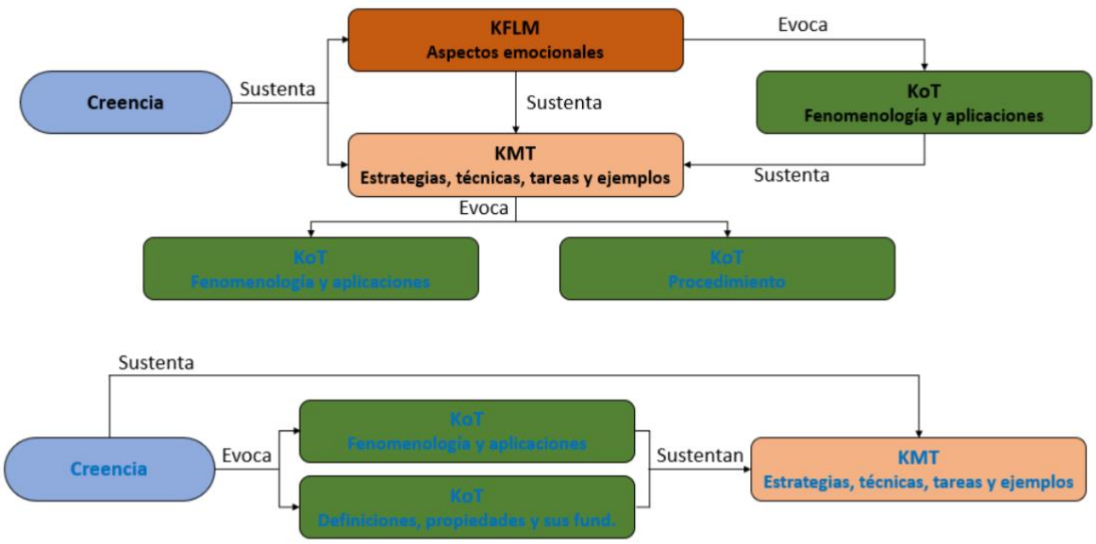


Estos episodios también nos permitieron obtener evidencia de los conocimientos movilizados por el profesor durante el desarrollo de este ejemplo. En él vemos que Pablo sabe cómo construir el término general de una progresión aritmética por medio de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (KoT; procedimientos – E.4.2., 18-28); que tanto la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ como el término general de una progresión aritmética, le permiten obtener cualquiera de los términos de dicha progresión (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.4.2., 25-28); que necesita determinar el valor del término a_n para determinar la suma de los primeros n de una progresión aritmética por medio de la fórmula propuesta por Gauss (KoT; procedimientos – E.4.2., 32-34); que la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ le permite obtener los términos de cualquier progresión aritmética (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.4.2., 13-14); que cada progresión aritmética tiene su término general (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos – E.4.2., 18); y que referirse al término general de las progresiones aritméticas como a "la llave maestra" y al término general de una progresión en particular como a "la mini llave" puede favorecer la comprensión de la diferencia que existe entre ambos conceptos (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – E.4.2., 13-18). También encontramos evidencias de su creencia en relación con el potencial didáctico de las metáforas (P.4.2, 12-15).

Durante el desarrollo de este ejemplo vemos una relación entre su KMT y su KoT. Su conocimiento sobre el potencial del ejemplo que ha seleccionado para involucrar a los estudiantes en el trabajo con progresiones aritméticas (KMT), evoca un conjunto de conocimientos correspondientes a su KoT, los cuales le permiten evaluar el trabajo realizado por los estudiantes al resolver las actividades propuestas con el ejemplo, estableciéndose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$. También vemos algunas relaciones entre su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas, su KoT y su KMT, similares a las evidenciadas anteriormente. Su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resultan las metáforas que utiliza en el desarrollo de este ejemplo (KMT); y evoca los conocimientos asociados a su KoT que sustentan la elaboración de las metáforas utilizadas, generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 47

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.4.2.



El siguiente episodio (ejemplo 4.3) describe el instante en que el profesor comienza a abordar el estudio de las progresiones geométricas. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un concepto. El profesor presenta un ejemplo de una situación cotidiana que le permite comenzar a introducir el concepto de progresión geométrica e ir diferenciando entre esta progresión y la aritmética que acaban de estudiar; genera algunas instancias para que los estudiantes interactúen con el ejemplo.

P: Una persona recibe un mensaje de WhatsApp, y le están invitando en el mismo mensaje que lo envíe a cinco personas más y así sucesivamente, de manera que esta persona manda el mensaje a cinco y esos cinco lo reciben y lo vuelven a enviar a cinco cada uno de ellos, ¿hasta ahí de acuerdo?
A: Sí.
P: Si desde el primer mensaje que le llega a la primera persona consideramos cinco envíos, ella hace uno a otros cinco, ahora viene el segundo envío esos hacen otros, esos hacen otros, hasta cinco envíos, contando como primero el que ella hace ¿me podrías decir cuántos WhatsApp se han enviado en total? o ¿cuántos WhatsApp se envían en el segundo envío? Por ejemplo, ¿esas preguntas las podéis responder con lo que hemos estudiado? Analiza la situación, qué tenemos para empezar.
A: La distancia.
P: ¿Por qué? Es que no están viendo lo que tenemos ¿cuál es el primer término? Primero recibo yo, un mensaje, ese es el primer término ¿no? ¿cuál es el siguiente término?
A: Cinco.
P: Cinco, mira, uno, cinco, sigue.
A: Diez.
P: A sí, cada uno envía cinco como he dicho.
A: Serian veinticinco.

P: ¿Es esa una progresión aritmética?
A: No.
P: No, entonces de entrada por lo menos tú sabes que aritmética…
A: No es – es geométrica.
A: Profe yo no me enterado.
P: Te ponen por delante la situación y vas a ver si es aritmética o no. Entonces en este caso tienes un primer WhatsApp que le llega, pero luego ella envía cinco, el segundo término es cinco, pero es que cada uno de los cinco en el siguiente envío, cada uno son cinco, cinco por cinco.
A: Veinticinco.
P Entonces tienes uno, cinco, veinticinco si quieres puedes continuar, pero ya con eso tienes bastante ¿es esto aritmético?
A: No.
P No, no lo es, por tanto, tú no puedes usar eso (señalando las fórmulas de a_n y s_n para una progresión aritmética) ¿Lo veis? Sabes que es una progresión, pero de este tipo no es (refiriéndose a las aritméticas).

(E.4.3.)

Para obtener evidencia de los distintos conocimientos que podrían haber operado en la selección de este ejemplo, le realizamos a Pablo las siguientes preguntas.

I. ¿Por qué en los ejemplos, que utiliza para la enseñanza de las matemáticas, apela a situaciones cotidianas?
P. Capta la atención y crea expectación, si encima es algo muy asequible a la vida suya y directa, es significativo para ellos, y entonces en parte busco la garantía de que atiendan a una situación para luego ver cómo se puede resolver.
I: ¿Por qué les propone esta situación en particular?
P: Es una situación que conocen, que han vivido más de una vez. Es para que una vez que han captado de qué va la cosa, cuál es el caso. Puedan darse cuenta de que hay elementos diferenciadores con respecto a la aritmética y meter la introducción de lo que es una geométrica.

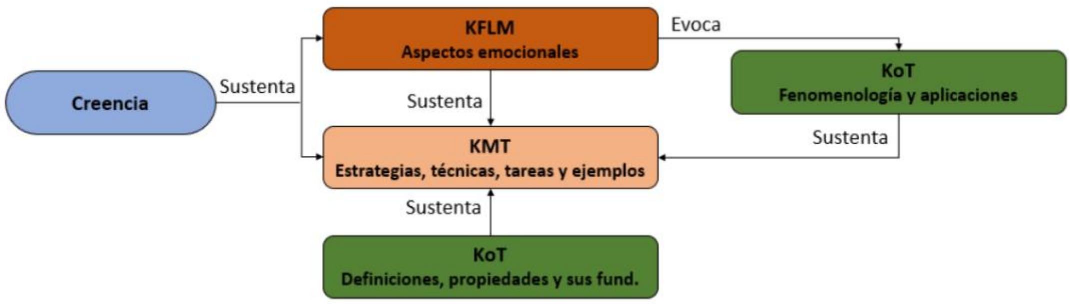
(P.4.3.)

Las respuestas entregadas por el profesor nos dan evidencias de los distintos conocimientos que habrían influido en la elección de este ejemplo. Vemos que Pablo conoce algunos usos cotidianos que pueden tener las progresiones geométricas (KoT; fenomenología y aplicaciones – P.4.3., 7-9); y sabe que para los estudiantes resulta significativo conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones geométricas (KFLM; aspectos emocionales – P.4.3., 4); que las progresiones aritméticas y geométricas se construyen en base a diferentes elementos, la distancia y la razón respectivamente (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos – P.4.3., 9); y que este ejemplo, de un caso cotidiano, permite que los estudiantes se involucren con el análisis de las progresiones geométricas y que visualicen las diferencias que existe entre los elementos de una progresión aritmética y geométrica (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.4.3., 9). Y al igual que en casos anteriores, en esta selección deja de manifiesto su creencia sobre que los ejemplos que involucran situaciones cotidianas captan la atención y crean expectación en los estudiantes (P.4.3., 3).

Durante la selección de este ejemplo vemos nuevamente una relación entre su creencia y su KFLM y KMT. Su creencia sobre el potencial de los ejemplos que apelan a situaciones cotidianas sustenta; por un lado, su conocimiento sobre lo significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones cotidianas de las progresiones geométricas (KFLM) y por otro, a su conocimiento sobre lo pertinente que resulta este ejemplo para involucrar a los estudiantes en el trabajo con progresiones aritméticas (KMT). También vemos como su conocimiento sobre los aspectos emocionales asociados al uso de ejemplos que apelan a situaciones cotidianas (KFLM), evoca a su conocimiento sobre los usos prácticos de las progresiones geométricas (KoT) y sustentar a su conocimiento sobre lo favorable que resulta este ejemplo para captar la atención de los estudiantes (KMT); generándose una relación $KFLM \twoheadrightarrow KoT$ y una relación $KFLM \rightarrow KMT$. Y como distintos conocimientos correspondientes a su KoT sustentan a su KMT, permitiéndole seleccionar un ejemplo que se basa en una aplicación cotidiana de las progresiones geométricas (KoT) y que permite evidenciar las diferencias entre esta progresión y las progresiones aritméticas (KoT), generándose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 48

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.4.3.

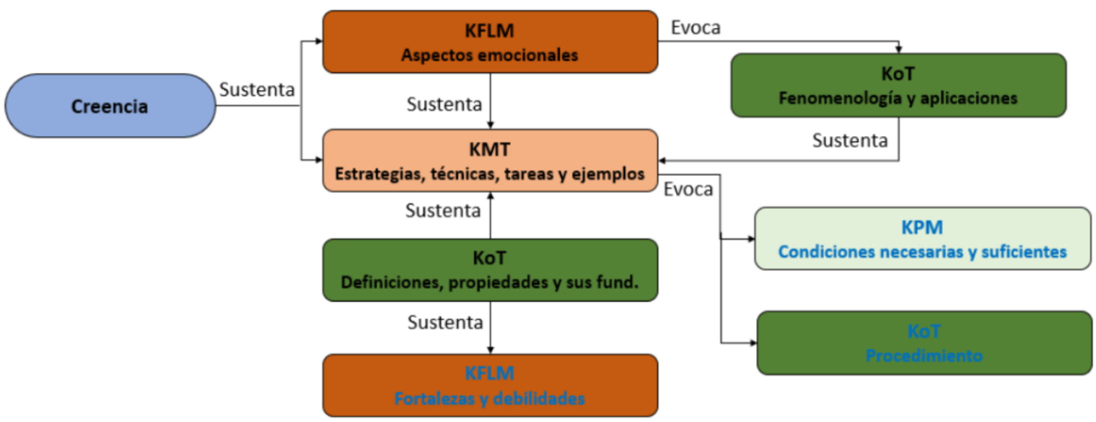


El desarrollo de este ejemplo nos permitió obtener evidencia de los distintos conocimientos movilizados por el profesor. En este episodio vemos que Pablo sabe cuántos términos de la sucesión se necesitan para evidenciar que no corresponde a una progresión aritmética (KPM; condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones – E.4.3., 32-33); que algunos estudiantes trataran de resolver ejercicios de progresiones geométricas con las fórmulas que estudiaron para las progresiones aritméticas (KFLM; fortalezas y dificultades – E.4.3., 9-14); y que los términos de una progresión geométrica se pueden obtener multiplicando el valor del término anterior por la razón (KoT; procedimientos – E.4.3., 28-30).

Durante el desarrollo de este ejemplo evidenciamos una relación entre su KoT y su KFLM; el conocimiento que ha manifestado sobre que la progresión aritmética se construye considerando una distancia y la geométrica considerando una razón, contribuye al conocimiento que posee sobre el error que comenten algunos estudiantes al querer resolver un ejercicio de progresión geométrica con las fórmulas que estudiaron al ver las progresiones aritméticas (KFLM), generándose una relación $KoT \rightarrow KFLM$. También evidenciamos algunas relaciones entre su KMT y algunos cocimientos correspondientes a su MK. Su conocimiento sobre un ejemplo que le permite evidenciar la diferencia entre una progresión geométrica y una aritmética (KMT); evoca a aquellos conocimientos que se requieren para su desarrollo, al conocimiento que posee sobre cómo obtener los términos de una progresión aritmética (KoT) y a su conocimiento sobre los elementos mínimos que permiten evidenciar que una sucesión no corresponde a una progresión aritmética (KPM), estableciéndose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$ y una relación $KMT \twoheadrightarrow KPM$.

Figura 49

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.4.3.



5.5. Sesión 5

El profesor comienza esta sesión retomando el estudio de las progresiones geométricas. Comienza con el desarrollo de algunos ejercicios propuestos en el texto de estudio, en donde se les pide a los estudiantes que determinen el término general y un término en particular de una progresión geométrica. Continúa la sesión con algunos ejercicios basados en diferentes aplicaciones prácticas que pueden tener las progresiones geométricas y aritméticas, esperando, en algunos casos, que los estudiantes sean capaces de visualizar a qué tipo de progresión corresponde el ejercicio.

En el siguiente episodio (ejemplo 5.1) se describe el trabajo que realizaron los estudiantes para desarrollar el ejercicio propuesto por el profesor. Corresponde a un ejemplo activo para la práctica de un procedimiento. El profesor pide a los estuantes que trabajen con un ejemplo de progresión geométrica propuesto en el texto y que determinen el término general de la progresión y el valor que se les pide.

P: ¿Quién quiere leer actividad 16?
A: Determinar si la sucesión $2, 6, 18, 54, 162$ … es una progresión geométrica y, si lo es, calcula la expresión del término general y el término a_9
P: ¿Qué pensáis? $2, 6, 18,$ … ¿eso es una progresión geométrica?
A: Sí
P: Bueno ¿alguien quiere salir a la pizarra? Vamos a ver primera, la actividad 16

Datos	Operaciones	
Es geométrica	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$a_9 = 2 \cdot 3^{9-1=8}$
¿ a_n?	$a_2 = 2 \cdot r^{2-1}$	$a_9 = 2 \cdot 6561$
¿ a_9?	$6 = 2 \cdot r^1$	
$a_n = 2, 6, 18, 54, 162$	$\frac{6}{2} = r^1$	$\boxed{a_9 = 13122}$
$a_1 \rightarrow 2$		
¿ r?	$\boxed{3 = r}$	

P: Te dan el término primero (señalando $a_1 \rightarrow 2$), la razón ¿cuánto es la razón? Lo saca de aquí no (señalando la serie) de uno entre el anterior siempre, lo ha hecho ella de esta manera (señalando el proceso para obtener r), lo ha hecho de otra manera, pero en el fondo puedes venirte aquí directamente (señalando $2, 6$) o puedes venirte aquí (señalando $18, 54$) donde tú quieras, la razón se ve que aquí es 3, en el fondo la razón te la han dado, un dato directamente
P: ¿Puedo buscar el término 9? Pues me voy a la herramienta esta (señalando $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$) el término general, y entonces el a_1 que sí te lo han dado, la razón también te la han dado, para buscar el 9, r elevado a 8 ¿qué vale cuánto? (señalando 6561). 13.122 este es el término 9.

(E.5.1.)

Para indagar en los conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejercicio en particular le realizamos al profesor la siguiente pregunta:

I: ¿Por qué selecciona esta progresión para que la desarrollen los estudiantes?
P: Es un ejemplo sencillo de lo que es una progresión geométrica. Estábamos viendo el inicio de lo que es una progresión geométrica, y la idea es que vean claramente el por qué, es decir que vean claramente que de un término a otro se multiplica por el mismo número, y se ve rápido ahí. Tener claro el concepto, se podía poner números donde la razón sea fraccionaria, y ahí no es tan fácil ver que hay un factor, de esta manera sí en los números naturales.

(P.5.1.)

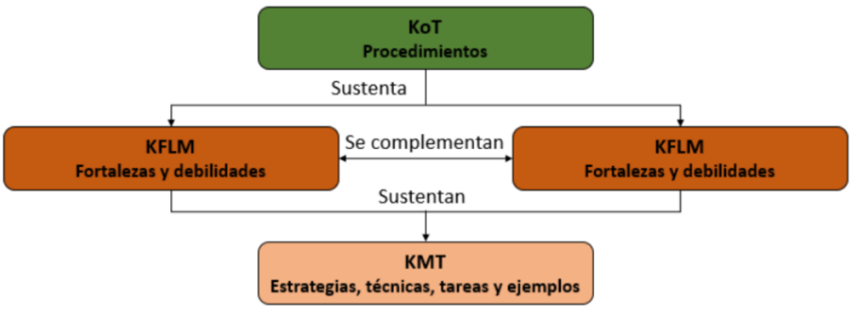
La respuesta entregada por el profesor nos permitió obtener evidencias de los conocimientos que habrían operado en la selección de este ejemplo de progresión. Vemos que Pablo sabe que la progresión $2, 6, 18, 54, 162$ … permite que los estudiantes visualicen el valor de la razón

(KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.5.1, 4-5); cómo se obtienen los términos de una progresión geométrica a partir de la razón (KoT; procedimientos – P.5.1, 4-5); y que a los estudiantes se les dificulta visualizar la existencia de un factor entre los términos de una progresión geométrica cuando la razón corresponde a un número fraccionario (KFLM; fortalezas y dificultades – P.5.1.,6-7); pero no tienen problemas cuando la razón corresponde a un número natural (KFLM; fortalezas y dificultades – P.5.1.,6-7).

En la selección de este ejemplo vemos una relación entre su KoT y su KFLM. El conocimiento que posee sobre cuál es el proceso que permite obtener los términos de una progresión geométrica trabajando con la razón (KoT) sustenta su conocimiento sobre cuándo resulta más fácil o complejo para los estudiantes visualizar el factor que existe entre los términos de una progresión geométrica (KFLM), estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KFLM$. También observamos una relación entre dos conocimientos correspondientes a la categoría fortalezas y dificultades, en este caso vemos cómo su conocimiento de una fortaleza se complementa con el de una debilidad, ambos asociados a la capacidad que tendrían los estudiantes para visualizar la existencia de un factor entre los término de una progresión geométrica, generándose una relación $KFLM \leftrightarrow KFLM$. Esta relación sustenta su conocimiento sobre lo favorable que resulta esta sucesión para que los estudiantes visualicen a existencia de un factor entre los términos de la progresión geométrica propuesta (KMT), estableciéndose una relación $KFLM \rightarrow KMT$.

Figura 50

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.5.1.

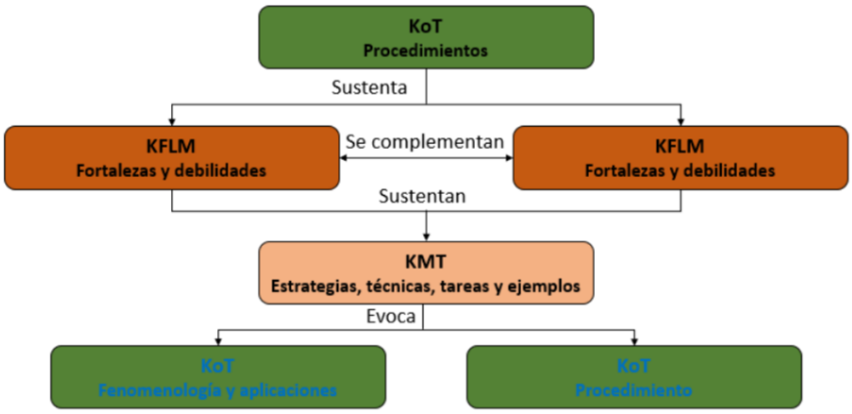


El episodio correspondiente al desarrollo de este ejercicio nos permitió obtener evidencias de los conocimientos movilizados por Pablo al utilizar la progresión $2, 6, 18, 54, 162$ .... Pablo sabe que el valor de la razón se puede obtener dividiendo el valor de un término por el del anterior (KoT; procedimientos – E.5.1., 9); y que la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ le permite obtener cualquier término de cualquier progresión geométrica (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.5.1, 14-15).

Durante el desarrollo de este ejemplo vemos una relación donde su KMT evoca a su KoT. Su conocimiento sobre lo adecuado de este ejemplo para que los estudiantes puedan determinar el valor de la razón de la progresión $2, 6, 18, 54, 162$ ... (KMT) provoca que el profesor movilice un conjunto de conocimientos correspondientes a su KoT, los cuales le permiten evaluar el trabajo que realizó el estudiante al desarrollar la actividad propuesta con la esta progresión, generándose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$.

Figura 51

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.5.1.



En el siguiente episodio (ejemplo 5.2) vemos al profesor ejemplificando un procedimiento para obtener el término a_1 de una progresión geométrica cuando se conoce uno de sus términos. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor presenta un procedimiento diferente al que ha utilizado un alumno para determinar el término a_1 de la progresión geométrica, motivando la participación de estudiantes durante la ejemplificación de este procedimiento.

P: Quién quiere leer el 20
A: Halla el primer término de una progresión geométrica cuya razón es 3 y el quinto término es 405.

20

Datos
$a_5 = 405$
$r = 3$
$a_1?$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$

$a_1 = \frac{a_5}{r^{5-1}}$

$a_1 = \frac{405}{3^4} = \frac{405}{81} = 5$

$\boxed{a_1 = 5}$

P: ¿Qué herramienta ha elegido Laura? La del término general ¿por qué? Porque te han dado como dato un término que es el quinto, ha cogido esta herramienta ($a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$) y ahora va y dice que el termino 1 (señalando a_1) lo ha

despejado de aquí (señalando $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$) ¿lo están viendo? El término uno está aquí ($a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$) es la incógnita, la r me la han dado, le están dando el término quinto (señalando a_n en $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$) ¿Qué vale cuánto?
A: 405
P: ¿Está bien despejado? (a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$)
A: Sí
P: Otro podría haber dicho, espérate vamos a colocar en la herramienta los datos que tengo, tengo el término 5 ¿vale cuánto? 405 que es igual al primero que no conozco por la razón que si conozco, 3 elevado a cinco menos uno
P: ¿Por qué? Porque es el quinto (señalando el 405) cinco menos uno es cuatro

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad 405 = a_1 \cdot 3^{5-1}$$

P: ¿Yo puedo sacar de aquí el a_1 directamente?
A: Sí
P: Y sale lo mismo. O lo despejas antes, o si te gusta más sustituyes, ves lo que tienes, que es lo que no tienes, y dices ¿puedo sacar lo que no tengo con esto? Una simple ecuación, verdad, de primer grado. ¿Lo habéis entendido?
A: Sí

(P.5.1.)

Para obtener evidencias de los conocimientos que podrían haber influido en la elección de este ejemplo, le realizamos al profesor la siguiente pregunta.

I: ¿Por qué les presenta otra forma de obtener el término a_1?
P: Para hacerles ver lo que ellos pueden hacer con las herramientas que tienen, no es típico ejercicio donde tú de entrada tienes todos los datos. Tú puedes calcular un término si conoces la razón y si conoces el primer término, pero ¿qué pasa cuando falte algo de esto? También tienes otras herramientas, este caso con otras herramientas también te permite buscar la respuesta, porque aquí por ejemplo también podían buscar el término 4, luego el 3 porque no es muy largo; pero si en vez del término 5 hubiera sido el término 500. Sí, el proceso vale, pero puede llevar tres meses.

(P.5.2.)

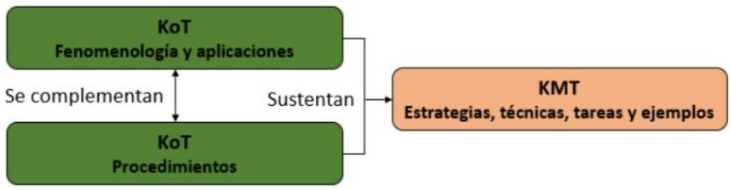
En este episodio obtuvimos evidencias de los distintos conocimientos que habrían influido en la selección de este ejemplo. Evidenciamos que Pablo sabe que conociendo el valor de la razón y de a_1 se puede obtener cualquier término de una progresión geométrica (KoT; fenomenología y aplicaciones – E.5.2., 3-4); que este ejemplo le permite mostrar que no hay una única forma de trabajar con las fórmulas que están estudiando (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.5.2., 2); y conoce un procedimiento que le permitiría, en este caso, obtener el término a_1 (KoT; Procedimientos – P.5.1., 5-7).

En la selección de este ejemplo observamos dos relaciones; una primera relación entre conocimientos correspondientes a distintas categorías de su KoT y una segunda relación entre su KoT y su KMT. El conocimiento que posee sobre que sí conocemos el valor de la razón y de a_1

podemos obtener cualquier término de una progresión geométrica (KoT), se complementar con su conocimiento sobre un procedimiento que, en este caso, le permitiría obtener el término a_1, generándose una relación $KoT \leftrightarrow KoT$. Y esta relación es la que sustenta su conocimiento sobre lo pertinente que resulta este ejemplo, que no proporciona el valor de a_1, para mostrar que no hay una única forma de trabajar con las fórmulas que están estudiando (KMT), estableciéndose una relación $KoT \rightarrow KMT$.

Figura 52

Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.5.2.



Durante el desarrollo de este ejemplo evidenciamos un conocimiento correspondiente a su KoT, el profesor conoce un procedimiento, diferente al comentado en la entrevista, que le permite obtener el término a_1 de la progresión geométrica que están desarrollando (KoT; procedimientos – E.5.2, 13-17).

Vemos durante el desarrollo de este ejemplo una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$, el ejemplo que ha propuesto para mostrar que no hay una única forma de trabajar con las fórmulas que están estudiando, lo lleva a movilizar el KoT que le permite presentar una estrategia de desarrollo distinta a la desarrollada por el estudiante, de esta forma es el KMT evoca a su KoT.

Figura 53

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.5.2.

En el siguiente episodio (ejemplo 5.3) vemos cómo el profesor ejemplificó el procedimiento que estaban utilizando para determinar un término de una sucesión. Corresponde a un ejemplo activo para la enseñanza de un procedimiento. El profesor ejemplifica gráficamente el procedimiento que han realizado algunos estudiantes para obtener el valor de la distancia, genera instancias para que los estudiantes interactúen con este ejemplo.

P: No, para buscar la distancia lo que ha hecho ha sido, 2 el a_1, 10 el a_3 ¿cuántas veces va la distancia del uno al otro?

$$\underset{a_1}{2} \;\text{———}\mid\text{———}\; \underset{a_3}{10}$$

P: Tú acá has hecho más de una distancia, aquí hay otra, porque esa es la definición de progresión aritmética, no conoces de cuánto son las distancias, pero sí que de aquí (a_1) a aquí (a_3) van 8 ¿cuánto es d? Si $2d$ es 8 ¿Cuánto es d?

$$\underset{a_1}{2} \;\overset{d}{\text{———}}\overset{+}{\mid}\overset{d}{\text{———}}\; \underset{a_3}{10} \qquad \begin{array}{l} 2d = 8 \\ d = \end{array}$$

A: Cuatro
A: Porque le da 8 dividido entre 2, porque es el a_1
P: Es que el a_1 vale 2 y el a_3 10, ahí está (señalando el esquema) entonces la diferencia son dos distancias, la diferencia es 8 entre estos (entre a_1 y a_3).
P: Y ¿si no fuera el tercero? Si fuera el 23, pues tú tendrías el término 1 y el término 23 ¿cuántas distancias van? 22 ¿no?

$$a_1\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}a_{23}$$

A: Sí
P: Pues toda esta diferencia (desde a_1 hasta a_{23}) la que fuera lo divides entre…
A: 22
P: Esto viene de la propia definición de una progresión aritmética ¿lo entendéis?

(E.5.3.)

Para obtener información en relación con los conocimientos que abrían influido en la elección de esta ejemplificación, le realizamos a Pablo la siguiente pregunta:

I: ¿Por qué ejemplifica de esta forma el procedimiento?
P: Para que visualicen y comprendan el procedimiento. En el fondo aquí el argumento matemático es muy básico, es decir tú sabes dividir, sabes multiplicar, no es un problema de herramientas matemáticas que tú no domines. El problema no está en la herramienta matemática necesaria, sino en que análisis. En que visualices y comprendas la situación.

(P.5.3.)

La respuesta entregada por el profesor nos permitió obtener evidencias de los diferentes conocimientos movilizados durante la selección de este ejemplo. Vemos que Pablo sabe que esta ejemplificación permite que los estudiantes puedan visualizar y comprender el procedimiento que están utilizando para obtener el valor de la distancia (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – P.5.3., 2); y que los estudiantes poseen los conocimientos y capacidades previas requeridas para abordar este ejercicio (KMLS; secuenciación de temas – P.5.3., 2-5).

En la selección de este ejemplo vemos una relación entre su KMT y su KMLS. El conocimiento que Pablo posee sobre lo apropiado que resulta esta ejemplificación para que los estudiantes visualicen y comprendan el procedimiento que han utilizado para obtener el valor de la distancia (KMT), se sustenta en su conocimiento sobre las capacidades y los conocimientos matemáticos necesarios para aprender este nuevo contenido (KMLS), generándose una relación $KMLS \rightarrow KMT$.

Figura 54

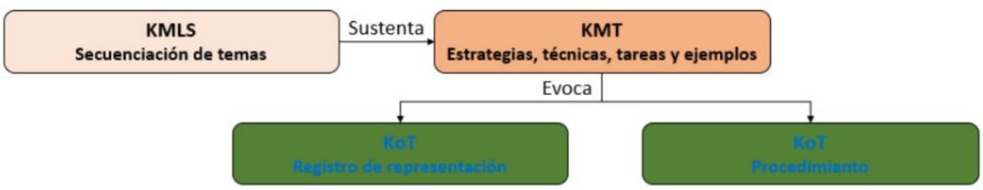
Relaciones de los subdominios durante la selección del ejemplo E.5.3.

También obtuvimos evidencias de los conocimientos movilizados por el profesor al utilizar este ejemplo. Evidenciamos que Pablo sabe cómo realizar interpolaciones para obtener el valor de la distancia (KoT; procedimientos – E.5.3., 11-16); y cómo representar gráficamente el procedimiento que están utilizando para obtener el valor de la distancia (KoT; registros de representación – E.5.3, 6).

Durante el desarrollo de este ejemplo observamos relaciones entre su KMT y su KoT. Los conocimientos sobre cómo realizar interpolaciones (KoT) y sobre cómo representar gráficamente el procedimiento que estaban utilizando (KoT), son evocados por su KMT, ya que son movilizados para desarrollar la ejemplificación que permite que los estudiantes visualicen y comprendan el procedimiento que están utilizando para buscar el valor de la distancia (KMT), generándose una relación $KMT \twoheadrightarrow KoT$.

Figura 55

Relaciones de los subdominios durante el uso del ejemplo E.5.3.



6.Resultados

En este capítulo se muestran los resultados que obtuvimos al analizar la información del capítulo anterior, de esta forma abordamos los objetivos propuestos en esta investigación. Se mencionan y ejemplifican los distintos tipos de ejemplos utilizados por el profesor al abordar el estudio de las sucesiones. Se describen los distintos conocimientos movilizados por Pablo al abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas por medio de ejemplos, agrupando estos conocimientos en las distintas categorías del MTSK identificados en los diferentes episodios. Y se mencionan y describen las relaciones entre subdominios de conocimiento que observamos en los procesos de selección y de uso de los ejemplos. Finalizando con la presentación de un esquema que muestra las relaciones que observamos en cada tipo de ejemplo.

6.1. Tipos de ejemplos

Hemos caracterizado los ejemplos utilizados por el profesor sobre la base de tres aspectos ya establecidos: (a) la finalidad educativa del ejemplo, (b) la entidad matemática que está ejemplificando y (c) si el profesor busca o no que los estudiantes interactúen con el ejemplo. Observamos que la mayoría de los ejemplos que Pablo utilizó para abordar el estudio de las sucesiones numéricas correspondían a ejemplos activos. Con estos ejemplos el profesor abordó la enseñanza de los distintos conceptos y la enseñanza y practica de los procedimientos. Mientras que, en el caso de los ejemplos pasivos, dada su naturaleza, todos se enfocaban en la enseñanza de procedimientos, en la mayoría de los casos, y de conceptos.

De esta forma en nuestro análisis identificamos

- Ejemplos activos para la enseñanza de un concepto
- Ejemplos activos para la enseñanza de un procedimiento
- Ejemplos activos para la práctica de un procedimiento
- Ejemplos pasivos para la enseñanza de un procedimiento
- Ejemplos pasivos para la enseñanza de un concepto

6.2. Conocimientos especializados

En el capítulo anterior se describen y se clasifican, sobre la base de los distintos subdominios del modelo MTSK, cada uno de los conocimientos movilizados por el profesor al abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas por medio de ejemplos. Dado que esta información se presenta disgregada a lo largo de todo el capítulo, presentaremos ahora, en primer lugar, una descripción general de los conocimientos movilizados por el profesor en cada dominio, considerando cada uno de los subdominios que lo conforman. Con esta información comenzamos a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación ¿Cómo son y cómo se relacionan los conocimientos especializados que moviliza un profesor al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas en la Educación Secundaria?

En relación con los conocimientos que forman parte del domino conocimiento matemático vemos que:

- En el subdominio KoT encontramos distintos conocimientos asociados a las sucesiones numéricas, por ejemplo, conocimientos procedimentales y de representación asociados a las sucesiones numéricas y no numéricas y a las progresiones geométricas y aritméticas así como conocimientos de fenomenología y aplicaciones referidos a las sucesiones numéricas y a las progresiones geométricas y aritméticas. También evidenciamos conocimientos correspondientes a otros temas de estudio como los patrones, los sistemas de ecuaciones y las operaciones algebraicas. En relación con este último, por ejemplo, sabe que si tiene dos incógnitas necesita establecer un sistema con dos ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas.

- En el subdominio KSM encontramos evidencias de conocimiento sobre conexiones auxiliares y sobre conexiones de simplificación. Por ejemplo, sabe que asociar la sucesión 2, 4, 6, 8, … a la tabla del 2 permite evidenciar la relación que existe entre los términos de la sucesión y que la función que cumple el patrón que está detrás de la construcción de la sucesión no numérica se puede asociar al rol que cumple el término general de una sucesión numérica.

- En el subdominio KPM evidenciamos el conocimiento que le permitía establecer las “condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones”, en los casos que observamos este conocimiento le permitía presentar los elementos necesarios y suficiente para definir un patrón o una sucesión en particular.

En relación con los conocimientos correspondientes al dominio PCK movilizados durante la enseñanza de las sucesiones numéricas observamos que:

- En el subdominio KFLM, el profesor moviliza distintos conocimientos correspondientes a las fortalezas y a las dificultades y a las formas de interacción con el contenido matemático asociadas al aprendizaje de las sucesiones numéricas y a otros contenidos. Por ejemplo, sabe que algunos estudiantes comenten el error de confundir la posición de un término con su valor y que no tendrán problemas en determinar los términos generales de las sucesiones $2, 4, 6, 8, \ldots$ y $3, 6, 9, 12, \ldots$, pero también evidenciamos que sabe que los estudiantes son capaces de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y que conoce algunas de las estrategias que los estudiantes suelen utilizar al resolver problemas de patrones.

- En el subdominio KMT encontramos conocimientos correspondientes a la potencialidad matemática de las diferentes estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que utilizó. Por ejemplo, vemos que conoce una estrategia que le permite mostrar que la posición de un término no tiene por qué coincidir con su valor, la potencialidad del ejemplo de sucesión 2, 4, 6, 8, …, para abordar la construcción del término general, y sabe que referirse al término general de las progresiones aritméticas $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ como a "la llave maestra", puede favorecer la comprensión de este concepto.

- En el subdominio KMLS, evidenciamos conocimientos sobre algunos de los resultados de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes al abordar las sucesiones numéricas y sobre los conocimientos y las capacidades que poseen los estudiantes y que pueden favorecer el aprendizaje de las sucesiones numéricas. Por ejemplo, sabe que el conocimiento que los estudiantes poseen sobre la tabla de 2 y sobre la tabla del 3 puede contribuir a la búsqueda del término general de la sucesión $2, 4, 6, 8, \ldots$ y $3, 6, 9, 12, \ldots$, respectivamente, y que las capacidades que han desarrollado los estudiantes al estudiar los sistemas de ecuaciones pueden contribuir al aprendizaje de la búsqueda del término general de una progresión aritmética cuando emplean la fórmula del término general.

Dentro del dominio de las creencias destacamos aquí las distintas creencias que el profesor puso de manifiesto cuando buscábamos profundizar en los conocimientos que él movilizaba. Pablo nos dio evidencias de su creencia en relación con el uso de las metáforas, con el uso de ejemplos que apelaban a los conocimientos previos y sobre cómo se van construyendo los nuevos saberes.

6.3. Relaciones entre subdominios

Como se puede apreciar en nuestra pregunta de investigación, nuestro objetivo va más allá de conocer cuáles son los conocimientos que el profesor moviliza al abordar el estudio de las sucesiones por medio de ejemplos. Nuestro objetivo principal es comprender, a través de la observación de un conjunto de clases y de entrevistas, cómo se relacionan los distintos subdominios de conocimiento movilizados por un profesor al seleccionar y utilizar diferentes tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas en la Educación Secundaria.

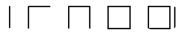
Para alcanzar nuestro objetivo y de esta forma dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, presentaremos a continuación las relaciones que observamos entre los distintos conocimientos movilizados por Pablo. Debido a que hay algunas relaciones que se presentan en más de un tipo de ejemplos, presentaremos las distintas relaciones agrupadas de acuerdo con el instante en el cual las observamos. Comenzaremos presentando el análisis que realizamos de las relaciones que se generaban durante la selección de los ejemplos, comenzaremos mencionando y describiendo la relación que observamos. Esta descripción irá acompañada de algunos ejemplos en los cuales se puede observar la relación que se describe, para finalizar con un cuadro que nos muestra en cuál de los ejemplos que analizamos en el capítulo anterior observamos dicha relación y a qué tipo de ejemplo correspondían. Luego este proceso se repite con las relaciones que observamos durante el desarrollo de los distintos ejemplos que analizamos. Al final de la descripción de las relaciones que observamos en la selección y en el uso de los ejemplos, presentaremos un esquema para mostrar las distintas relaciones que observamos en cada tipo de ejemplo, durante su selección y su uso.

6.3.1. Relaciones observadas durante la selección de los ejemplos

En la selección de los distintos ejemplos encontramos diferentes relaciones intra-dominio (Delgado y Espinoza, 2021) principalmente entre los subdominios del PCK. Este proceso nos permitió obtener información de las siguientes relaciones:

- Relación KMLS-KMT. Observamos que el tipo de relación que se genera entre estos subdominios está determinado por la categoría del KMLS que se pone en juego:
    - Si el conocimiento corresponde a la categoría de resultados de aprendizaje esperado, el KMLS evoca al KMT. El conocimiento que Pablo poseía sobre los resultados de aprendizaje que debían alcanzar los estudiantes al abordar un determinado contenido, provocaba que seleccionara una estrategia que tuviera el potencial matemático para alcanzar ese objetivo y el conocimiento sobre el potencial matemático de las distintas estrategias, técnicas, tareas y ejemplos corresponde a su KMT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	3.5	3.4; 3.3
Pasivos		

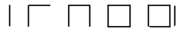
    - Pero si el conocimiento movilizado corresponde a la categoría de secuenciación de temas, el KMLS sustenta al KMT. En estos casos, el conocimiento que el profesor poseía sobre los saberes y las capacidades que tenían los estudiantes para aprender el contenido que estaban abordando, contribuía a sustentar su conocimiento sobre el potencial matemático que una determinada estrategia tenía para abordar dicho contenido. Por ejemplo, su conocimiento sobre el potencial que tiene la sucesión $2{,}4{,}6{,}8 \dots$ para abordar la representación algebraica del término general, se sustenta, en aparte, en su conocimiento sobre que las capacidades que los estudiantes desarrollaron al estudiar la tabla del 2 puede contribuir a la compresión del término general de una sucesión; y su conocimiento sobre el potencial que tiene la sucesión no numérica  para ejemplificar la importancia de conocer el patrón que está detrás de la sucesión, antes de continuar con el procedimiento de construcción de los términos, se sustenta, en parte, en su conocimiento sobre que las capacidades que los estudiantes desarrollaron al trabajar con sucesiones no numéricas (patrones) puede contribuir a la comprensión de la importancia de conocer el término general de una sucesión. En estas instancias es donde vemos que el KMLS sustenta al KMT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3; 1.6; 2.1; 5.3	1.9
Pasivos		

- Relación KMLS – KFLM. Se daba específicamente entre la categoría secuenciación de temas (KMLS) y la categoría fortalezas y dificultades (KFLM), siendo el KMLS el que sustenta al KFLM. El conocimiento que Pablo movilizaba sobre las fortalezas y las dificultades asociadas al aprendizaje de las sucesiones numéricas se sustentaba en su conocimiento sobre las distintas capacidades y conocimientos que tienen los estudiantes para aprender este contenido. Por ejemplo, su conocimiento sobre que los estudiantes no tendrían problemas para determinar el término general de la sucesión $3, 6, 9, 12, \ldots$, se sutenta en su conocimiento sobre que las capacidades desarrolladas al estudiar la tabla del 3 pueden contribuir a la construcción del término general de la sucesión. El conocer la capacidad le permite establecer la fortaleza.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.6	1.9
Pasivos		

- Relación KFLM – KMT. Concordamos con lo propuesto por Zakaryan et al. (2018) quienes plantean que, si bien ambos subdominios se pueden potenciar mutuamente, es el KFLM el que potencia más al KMT, lo que coincide con lo que observamos en nuestro análisis, en donde vemos que es el KFLM el que sustenta o evoca con mayor frecuencia al KMT y esto depende de la categoría del KFLM que se movilice.

    - Si el conocimiento movilizado corresponde a las categorías de fortalezas y dificultades o aspectos emocionales, el KFLM sustenta al KMT. El conocimiento que el profesor posee sobre el potencial matemático que puede tener una determinada estrategia, en ocasiones se sustenta por estas categorías. Por ejemplo, saber que la tarea consistente en solicitar a los estudiantes que determinen el término 108 de la sucesión , tiene el potencial de mostrar lo favorable que resulta trabajar con el término general de la sucesión, se sustenta en su conocimiento sobre lo complejo que resulta para los estudiantes determinar el término 108 sin conocer el término general de la sucesión no numérica que están desarrollando; y su conocimiento sobre lo significativo que resulta para los estudiantes conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas, sustenta su conocimiento sobre que el ejemplo, basado en una situaciones cotidiana que ha presentado, ayuda a que los estudiantes se involucren en la búsqueda del término que les ha pedido y en la suma de los primeros ene términos de la progresión.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.4; 1.6; 4.3[5]	1.9; 3.3; 3.4; 3.5; 4.2[5];5.1
Pasivos	1.1[5], 2.5	

- Pero si el conocimiento corresponde a la categoría formas de interacción con un contenido matemático, el KFLM evoca al KMT. En este caso su conocimiento sobre la potencialidad matemática o sobre las limitaciones u obstáculos asociados a una determinada estrategia, es evocado por el conocimiento que posee sobre los procesos y estrategias utilizadas por los estudiantes al interactuar con un determinado contenido matemático. Por ejemplo, su conocimiento sobre lo apropiado que resulta solicitar la búsqueda de un término de generalización lejana para mostrar lo favorable de trabajar con el término general de la sucesión, responde al conocimiento que posee sobre la estrategia que podrían utilizar los estudiantes para determinar el término 200, sin utilizar el término general de la progresión. En las situaciones que observamos, su conocimiento sobre el uso de un proceso o estrategia inapropiada le llevaba a utilizar una estrategia que tenía el potencial matemático para abordar esta situación. Es en esta instancia en donde vemos al KFLM evocando al KMT.

[5] En estos ejemplos el conocimiento del KFLM que sustentaba al KMT correspondía a la categoría de aspectos emocionales. En el resto de los ejemplos es la categoría fortalezas y dificultades la que sustenta al KMT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	2.3; 2.4	3.2
Pasivos		

- Relación KoT—KMT. Observamos una estrecha relación entre estos dos subdominios (Zakaryan y Ribeiro, 2016) en donde las distintes categorías del KoT sustentan al conocimiento asociado a estrategias, técnicas, tareas y ejemplos correspondientes al KMT movilizado por Pablo. Por ejemplo, el conocimiento que Pablo manifiesta sobre lo apropiado que resulta el ejemplo que ha seleccionado para mostrar que no hay una única forma de obtener el término a_1 con las fórmulas que están estudiado, se sustenta en su conocimiento sobre los distintos procedimientos que le permiten obtener el término a_1; mientras que su conocimiento sobre lo pertinente que resulta solicitar a los estudiantes del término 200 de la sucesión $8, 13, 18, 23, \ldots$ para mostrar lo favorable de trabajar con el término general de la sucesión, se sustenta en su conocimiento sobre que el término general de una sucesión nos permite obtener cualquiera de sus términos de la sucesión de forma cómoda. En la línea de Carrillo et al. (2014), vemos que el KMT que moviliza Pablo no contiene conocimiento matemático, pero requiere de su KoT para su funcionamiento.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.4; 1.8; 2.3; 2.4; 4.3; 3.5; 5.2	3.2; 3.3; 4.2
Pasivos	2.5	

- Relación KSM – KMT. Encontramos algunas relaciones distintas a la evidenciada por Zakaryan y Ribeiro (2016) entre la categoría de complejización y el KMT. En nuestro análisis identificamos relaciones entre las categorías de conexiones de simplificación y conexiones auxiliares del KSM con la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos correspondientes al KMT. Por ejemplo, saber que un ejemplo de sucesión, basado en la serie de los números naturales permite que los estudiantes visualicen la condición que cumplen las sucesiones crecientes, se sustenta en el conocimiento de la conexión que existe entre los números naturales y las sucesiones crecientes; y su conocimiento sobre lo apropiado que resulta el ejemplo de sucesión $2,4,6,8 \ldots$ para comenzar a desarrollar la construcción del término general de una sucesión, se sustenta en su conocimiento sobre que la conexión que existe entre la tabla del 2 y las sucesiones numéricas permite visualizar el término general de la sucesión propuesta. En todas estas relaciones el KSM sustentaba al KMT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3[6]; 1.6; 2.1	1.9
Pasivos		

- Relación KSM – KMLS. Evidenciamos relaciones distintas a las descritas por Escudero-Domínguez y Carrillo (2016) quienes se enfocaron en las relaciones que se establecían entre los conocimientos correspondientes a las categorías de conexiones de complejización y simplificación del KSM con la categoría resultado de aprendizaje esperado del KMLS. En nuestro análisis encontramos relaciones entre las categorías de conexiones de simplificación y conexiones auxiliares del KSM con la categoría secuenciación de temas del KFLM. Por ejemplo, el conocimiento que Pablo posee sobre que asociar la sucesión $3, 6, 9, 12, \ldots$ a la tabla del 3 permite visualizar el término general de la sucesión, sustenta su conocimiento sobre que las capacidades que desarrollaron los estudiantes al abordar la tabla del 3 pueden contribuir a la construcción del término general. El conocimiento que Pablo manifestó sobre las capacidades y los conocimientos que poseían los estudiantes para abordar el aprendizaje de las sucesiones se sustentaba en su KSM.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3[7]; 1.6; 2.1	1.9; 4.1
Pasivos	1.2	

- Relación KLFM – KoT. En este caso hemos observamos una relación que se daba siempre entre dos categorías: su conocimiento sobre aspectos emocionales se relaciona con su conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones. Por ejemplo, el conocimiento que Pablo posee sobre el interés que genera en los estudiantes conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas, le lleva a movilizar su conocimiento sobre algunas aplicaciones cotidianas que pueden tener las progresiones aritméticas. Es en estos casos es donde podemos ver al KFLM evocando conocimiento correspondiente al KoT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	4.3	4.2
Pasivos		

[6] En este ejemplo la categoría conexiones de simplificación sustenta a la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. En los otros ejemplos es la categoría conexiones auxiliares la que sustenta al KMT.

[7] En este ejemplo la categoría conexiones de simplificación sustenta a la categoría resultados de aprendizaje esperado. En los otros ejemplos es la categoría conexiones auxiliares la que sustenta al KFLM.

- Relación creencias – KFLM/KMT. Su creencia en relación con que los ejemplos que involucran situaciones cotidianas captan la atención y crean expectación en los estudiantes, sustenta conocimientos correspondientes a las categorías de aspectos emocionales y de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Por ejemplo, el saber que para los estudiantes resulta significativo conocer las aplicaciones que pueden tener las progresiones aritméticas y que un ejemplo, basado en una situación cotidiana, ayuda a que los estudiantes se involucren en el desarrollo de las progresiones aritméticas, corresponden a conocimientos que se sustentan en su creencia sobre el potencial de los ejemplos que apelan a situaciones cotidianas.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3; 4.3	4.2
Pasivos	1.1	

- Relación creencias – KSM/KMLS. Encontramos evidencia de una creencia que siempre evoca conocimientos correspondientes a estos dos subdominios en un mismo proceso. La creencia que Pablo posee sobre que el nuevo conocimiento se va construyendo sobre los saberes previos, provoca que el profesor movilice conocimiento correspondiente, por un lado, a las categorías de conexiones de simplificación y conexiones auxiliares, y por otro, a la categoría de secuenciación de temas. Por ejemplo, su conocimiento sobre que el estudio de las sucesiones se puede construir sobre las habilidades y los conocimientos desarrollados al estudiar los patrones así como su conocimiento sobre la relación que existe entre la regla que define la construcción de un patrón y el término general de una sucesión, le permiten apelar a los saberes previos de los estudiantes al momento de abordar el estudio de las sucesiones. Es en estos casos donde vemos a una de sus creencias evocando a su KSM y a su KMLS.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3[8]; 1.6	1.9
Pasivos	1.2	

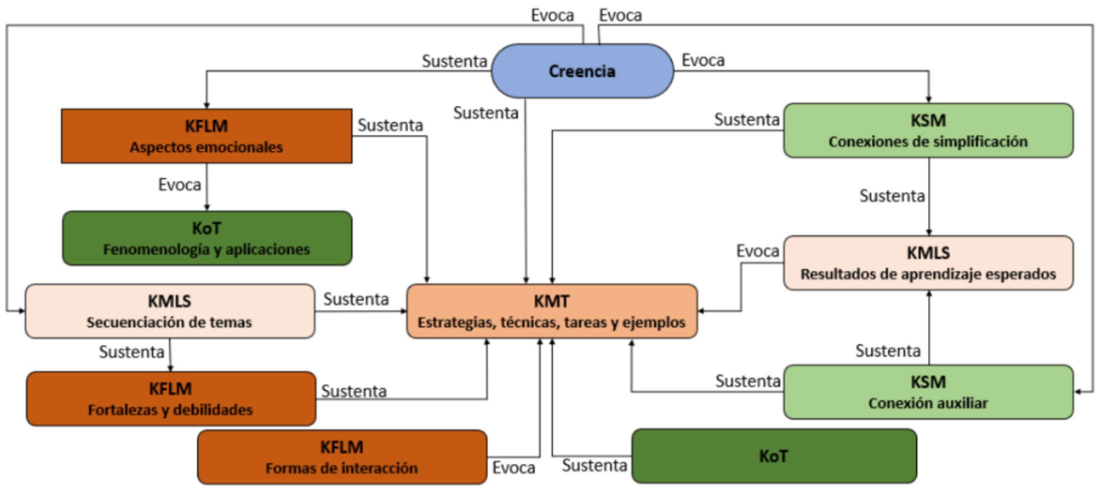
Los esquemas que se presentan a continuación muestran una síntesis de las distintas relaciones que observamos al analizar los conocimientos movilizados por Pablo durante la selección de los distintos tipos de ejemplos. Estas relaciones corresponden a las descritas en este apartado.

[8] En este ejemplo la creencia Pablo posee provoca que movilice conocimientos correspondientes a las categorías de conexiones de simplificación y secuenciación de temas. Y en los otros ejemplos moviliza conocimientos correspondientes a las categorías de conexiones auxiliares y secuenciación de temas.

En el primer esquema se presentan las distintas relaciones que observamos al analizar los conocimientos que Pablo ponía en juego durante la selección de los ejemplos activos que utilizó para abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas.

Figura 56

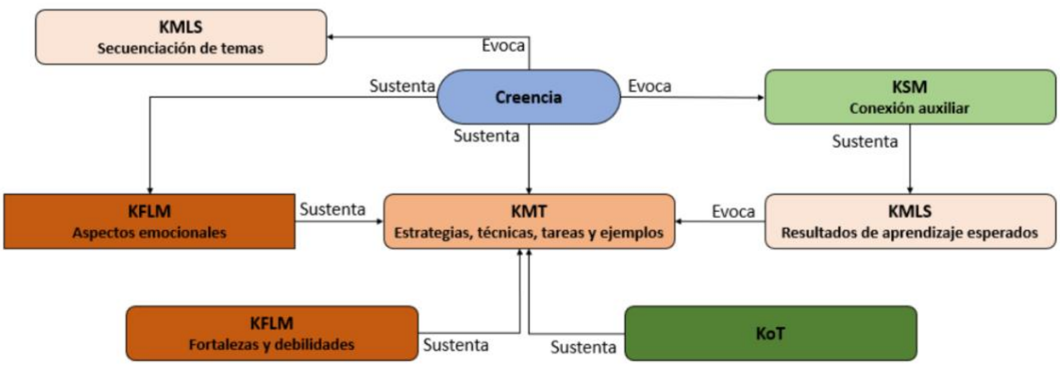
Relaciones observadas durante la selección de ejemplos activos



El esquema que se presenta a continuación muestra las distintas relaciones que observamos al analizar los conocimientos que Pablo ponía en juego durante el proceso de selección de los ejemplos pasivos.

Figura 57

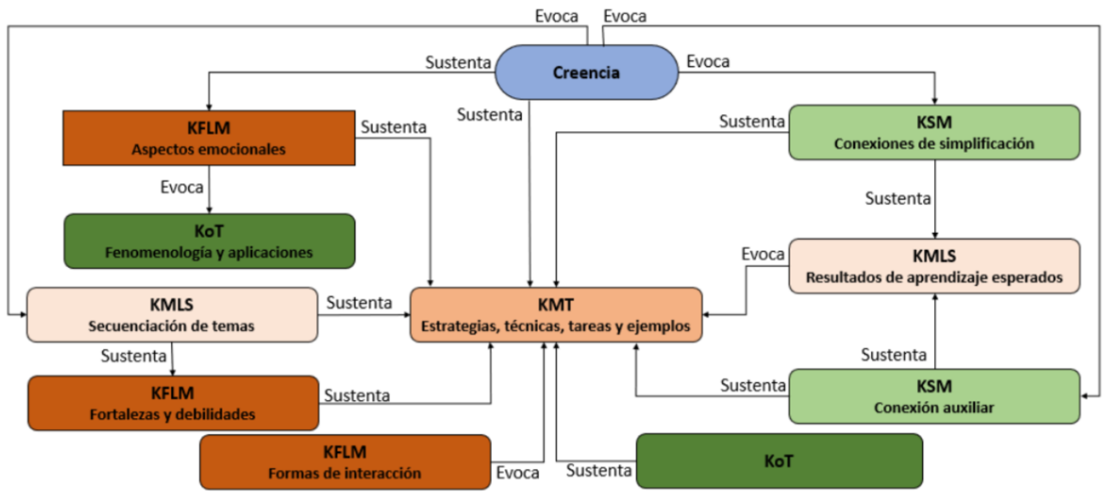
Relaciones observadas durante la selección de ejemplos pasivos



El siguiente esquema muestra las relaciones que observamos durante el proceso de selección de los ejemplos enfocados en la enseñanza. Estas relaciones son las mismas que observamos en la selección de los ejemplos activos.

Figura 58

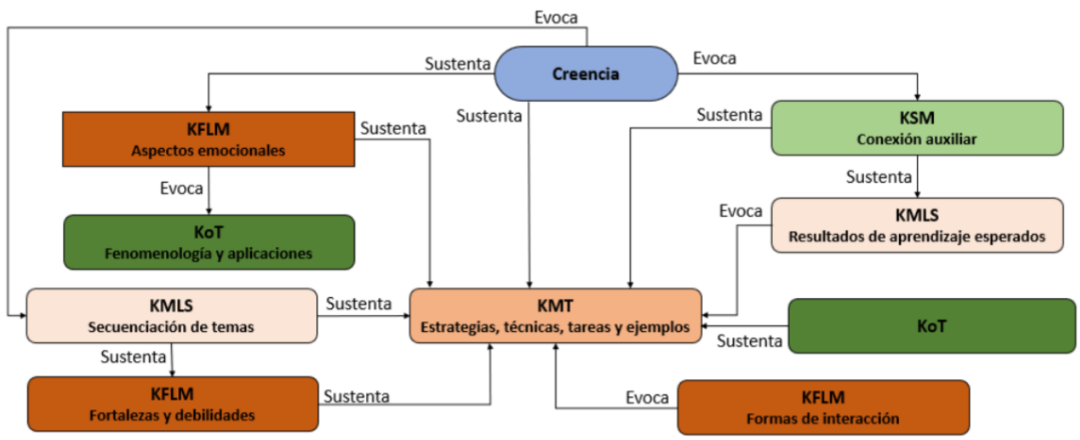
Relaciones observadas durante la selección de ejemplos enfocados en la enseñanza



Este último esquema muestra las relaciones que observamos al analizar los conocimientos movilizados por Pablo durante la selección de los ejemplos enfocados en la práctica de distintos conocimientos asociados a las sucesiones numéricas.

Figura 59

Relaciones observadas durante la selección de ejemplos enfocados en la práctica



6.3.2. Relaciones observadas durante el uso de los ejemplos

El análisis de las relaciones que se generaron entre los subdominios del MTSK durante el desarrollo de los ejemplos activos nos permitió obtener información de las siguientes relaciones:

- Relación KMT – KoT. Por primera vez encontramos al KMT tomando un rol *principal* en la relación con otro subdominio, pues vemos que al momento de utilizar el ejemplo que ha seleccionado es el KMT el que evoca al KoT. Por ejemplo, el conocimiento que le ha permitido seleccionar un ejemplo de sucesión con el potencial matemático de profundizar en el estudio de la suma de los primeros ene términos de una progresión aritmética, provoca que el profesor movilice los conocimientos necesarios para el desarrollo del ejemplo, en este caso, su conocimiento sobre la utilidad del término general de una progresión aritmética y sobre cómo obtener los primeros ene términos de una progresión aritmética. La actividad que selecciona para abordar un determinado contenido, basado en el potencial que ve en ella (KMT), determina los conocimientos asociados a su KoT que tendrá que movilizar para su desarrollo. Es en este proceso donde vemos que el KMT evoca al KoT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3; 1.6; 2.3; 2.5; 4.3; 5.2; 5.3; 1.10	1.9; 1.11; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5; 4.2
Pasivos		

- Relación KMT – KPM. Vemos una situación similar a la descrita en la relación anterior, en donde el KMT que le ha permitido seleccionar una determinada estrategia para abordar un contenido en particular, le lleva a movilizar conocimiento correspondiente a su KPM. Por ejemplo, su conocimiento sobre el potencial que tiene una determinada estrategia para mostrar a los estudiantes que cada sucesión tiene su propio término general provocó, al momento de su desarrollo, que el profesor movilizara su conocimiento sobre cuáles son los términos necesarios y suficientes que permiten determinar el término general de cada una de las sucesiones que presenta. En estos casos vemos al KMT evocando al KPM.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.5; 4.3	
Pasivos		

- Relación KoT – KoT. El desarrollo de los ejemplos nos permitió identificar las relaciones intra-subdominio (Delgado y Espinoza, 2021) que se generaban entra las categorías de registros de representación y de procedimientos o solo entre conocimientos correspondientes a la categoría de procedimientos. Por ejemplo, durante el desarrollo de una actividad en la cual los estudiantes tenían que establecer el término general de una sucesión se genera esta relación: el profesor representaba algebraicamente el término general propuesto por los estudiantes y evaluaba en ella algunos términos para comprobar su pertinencia; y en otro ejemplo vemos que Pablo sabe cómo construir y representar sucesiones no numéricas. Es en estos casos donde vemos que estas dos categorías se complementan (1.3; 1.6; 1.9; 1.11; 4.1).

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3; 1.6	1.9; 1.11; 4.1[9]
Pasivos	1.7	

- Relación KoT – KFLM. Según Escudero-Ávila et al. (2017), el conocimiento matemático es el que subyace en la base del KFLM, lo que concuerda con lo observado en nuestro análisis. En esta relación vemos al KoT sustentado al KFLM, específicamente a los conocimientos correspondientes a la categoría de fortalezas y dificultades. Por ejemplo, el conocimiento que posee sobre la condición que cumplen las sucesiones crecientes y decrecientes sustenta su conocimiento sobre el error que comenten algunos estudiantes al asociar las sucesiones decrecientes a los números negativos, mientras que su conocimiento sobre los elementos que se deben considerar para establecer el término general de una progresión aritmética, le permite reconocer el error que comenten algunos estudiantes al no considerar el término a_1. Es estas situaciones es donde observamos esta relación.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.4; 1.5; 1.10; 2.1; 2.2; 4.3;	
Pasivos		

- Relación KoT – KMT. Si bien el desarrollo de los ejemplos nos permitió encontrar relaciones en las cuales el KMT evocaba al KoT, también nos permite obtener evidencias de la relación KoT – KMT, donde las distintas categorías del KoT sustentan a la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT. Por ejemplo, el conocimiento que Pablo posee sobre la función del término general de una sucesión le permite utilizar una metáfora para favorecer la compresión de este concepto. Esto lo hace al referirse al término general como a *la llave.* Y su conocimiento sobre una estrategia que permite a los estudiantes verificar la pertinencia del término general que han propuesto para una sucesión, se sustenta en su conocimiento de este procedimiento, que corresponde a su KoT. Vemos cómo el KMT requiere del KoT para su funcionamiento (Carrillo et al. 2014).

[9] En este ejemplo vemos una relación entre conocimientos correspondientes a la categoría de procedimientos. En los otros ejemplos la relación se da entre las categorías de procedimientos con la categoría de registros de representación.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3; 1.5; 1.6; 1.8; 2.2; 2.3; 1.10	1.11; 3.2; 3.3; 3.4; 4.2
Pasivos	1.1; 1.7	

- Relación KFLM – KMT. En este caso es el KFLM el que evoca al KMT, pero esta relación se limita a dos categorías, a su conocimiento sobre las fortalezas y las dificultades, específicamente sobre los errores, obstáculos y dificultades relacionados con el aprendizaje y el que evoca a su conocimiento sobre estrategias, técnica, tareas y ejemplos. Por ejemplo, el profesor movilizó su conocimiento sobre una estrategia que le permitía mostrar a los estudiantes que la posición de un término no tiene por qué coincidir con su valor, como respuesta conocimiento que tenía sobre el error que estaban cometiendo algunos estudiantes al confundir la posición de un término con su valor; también su conocimiento sobre el error que cometían algunos estudiantes al asociar las sucesiones decrecientes a los números negativos, lo llevó a proponer la sucesión 10, 9, 8, 7, 6, 5 … como un ejemplo de sucesión decreciente, porque sabía que este ejemplo tenía el potencial matemático para corregir el error que estaban cometiendo algunos estudiantes, conocimiento que forma parte de su KMT.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.5; 2.1; 2.2; 1.10	
Pasivos		

- Relación KoT – KSM. En esta relación vemos al KoT sustentando al KSM. El conocimiento que Pablo poseía sobre los distintos procedimientos asociados a las sucesiones numéricas, le permitían establecer conexiones de simplificación y auxiliares. Por ejemplo, su conocimiento sobre la función del término general de una sucesión sustenta la conexión que establece entre este término y la regla que define la construcción de un patrón; y el conocimiento que posee sobre el procedimiento de construcción de una sucesión le permite establecer una relación entre el patrón que está detrás de la construcción de la sucesión no numérica y el rol que cumple el término general de una sucesión numérica.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.3[10]; 1.6	1.9
Pasivos	1.2	

[10] En este ejemplo el KoT sustenta a la categoría de conexión de simplificación. En los otros ejemplos el KoT sustenta a la categoría de conexión auxiliar.

- Relación creencia – KMT. En este caso la relación se da entre la creencia que posee sobre el potencial didáctico de las metáforas y KMT. Esta creencia sustenta su conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Por ejemplo, su conocimiento sobre que referirse al término general de una sucesión como a *la llave* favorece la comprensión de los estudiantes en relación con este concepto, se sustenta en la creencia que ha manifestado en relación con el potencial didáctico de las metáforas.

	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.5; 1.6; 1.8; 1.10; 2.3	1.9; 1.11; 3.2; 3.3; 3.4; 4.2
Pasivos	1.7	

- Relación creencia – KoT. En este caso su creencia sobre el potencial didáctico de las metáforas se relaciona con la categoría de fenomenología y aplicaciones correspondientes a su KoT, evocando el conocimiento que le permite crear la metáfora. Por ejemplo, la creencia que el profesor posee sobre el potencial didáctico de las metáforas le lleva a movilizar su conocimiento sobre que cada término general nos permite obtener los términos de una única sucesión, el cual le permite referirse al término general como a *la llave*, ya que solo nos permite abrir/obtener los términos de una única sucesión.

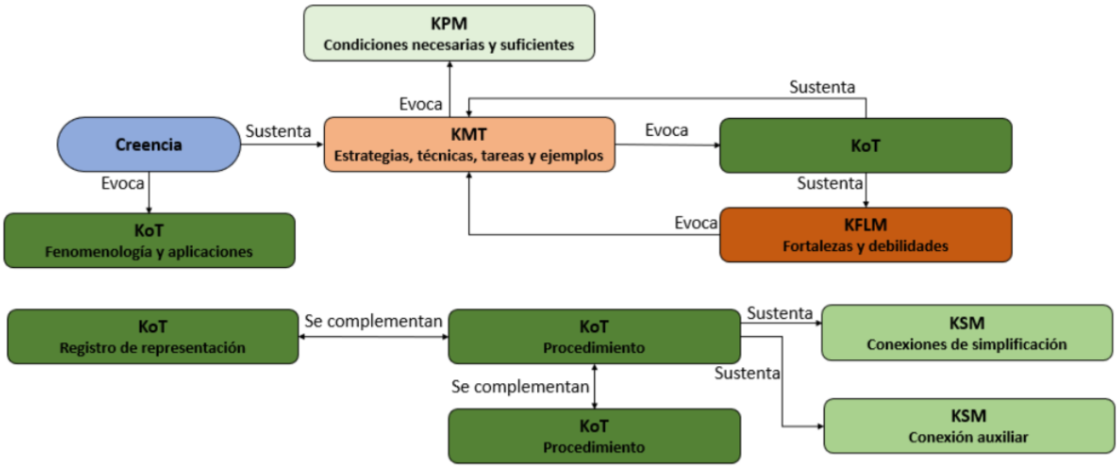
	Para la enseñanza	Para la práctica
Activos	1.5; 1.6; 1.8; 1.10; 2.3	1.11; 3.2; 3.3; 3.4; 4.2
Pasivos	1.7	

Los esquemas que se presentan a continuación muestran una síntesis de las distintas relaciones que observamos al analizar los conocimientos movilizados por Pablo durante el uso de los distintos tipos de ejemplos. Estas relaciones corresponden a las descritas en este apartado.

En el primer esquema se presentan las relaciones que observamos durante el desarrollo de los ejemplos activos utilizados por Pablo al abordar la enseñanza de las sucesiones numéricas.

Figura 60

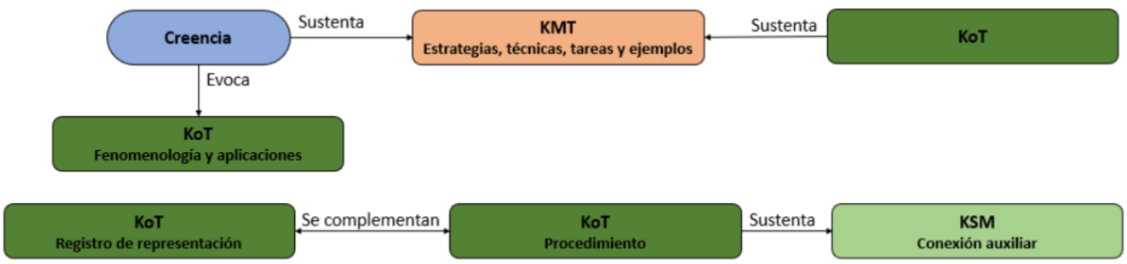
Relaciones observadas durante el uso de ejemplos activos



El siguiente esquema muestra las relaciones que observamos durante el desarrollo de los ejemplos pasivos. En este caso las relaciones involucran, mayoritariamente, a subdominios del MK.

Figura 61

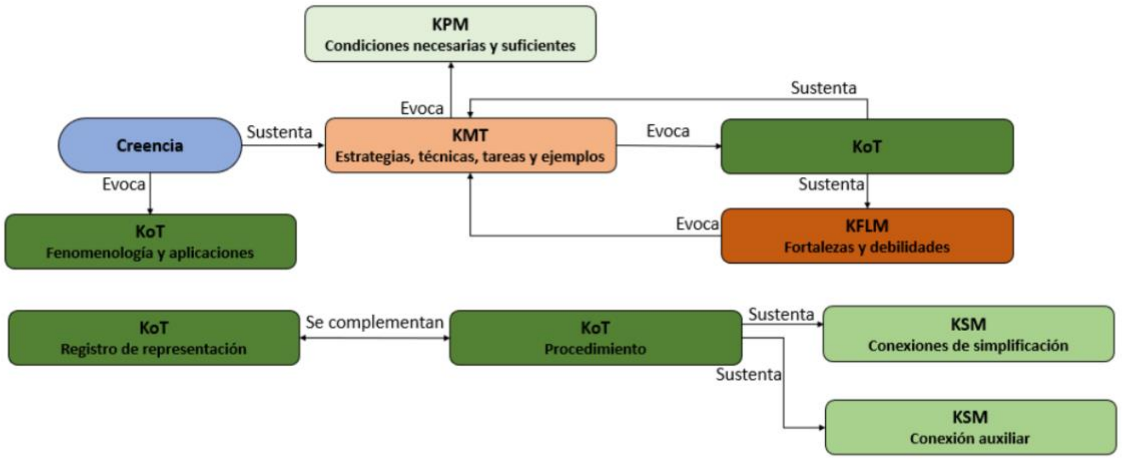
Relaciones observadas durante el uso de ejemplos pasivos



El esquema que se presenta a continuación muestra las relaciones que observamos durante el desarrollo de los ejemplos que se enfocaban en la enseñanza. Las relaciones son similares a las observadas durante el desarrollo de los ejemplos activos.

Figura 62

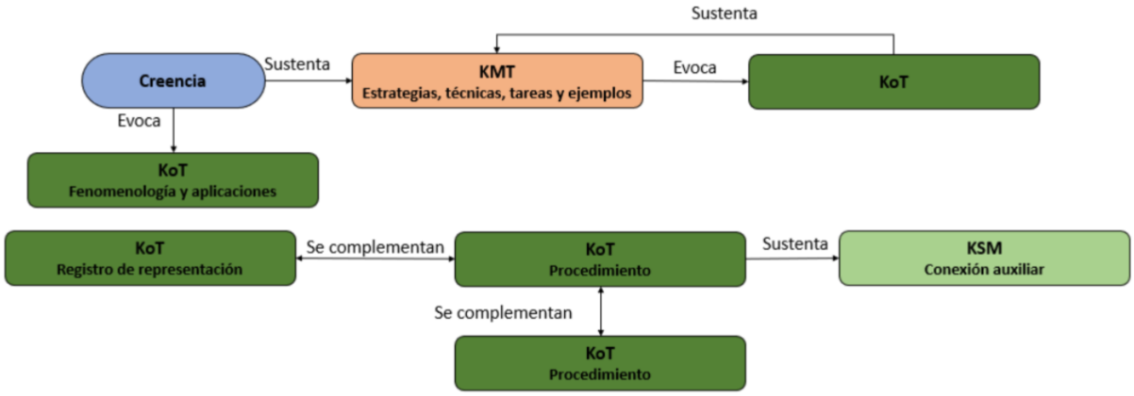
Relaciones observadas durante el uso de ejemplos enfocados en la enseñanza



Este último esquema muestra las relaciones que observamos durante el desarrollo de los ejemplos enfocados en la práctica de algún procedimiento.

Figura 63

Relaciones observadas durante el uso de ejemplos enfocados en la práctica



7. Conclusiones

El análisis de los distintos conocimientos movilizados por el profesor al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para abordar el estudio de las sucesiones numéricas nos ha permitido extraer información sobre las distintas relaciones entre subdominios de conocimiento que se generan en estos procesos, considerando diferentes tipos de ejemplos. Aquí exponemos las conclusiones que obtuvimos al analizar las relaciones que se generaban, tanto en la selección, como en el uso de los ejemplos, y presentamos las similitudes y diferencias que encontramos entre las relaciones que se generaban en las distintas instancias y en los distintos tipos de ejemplos.

El análisis de las distintas relaciones que se generaban entre los conocimientos movilizados por Pablo durante la selección y el uso de los ejemplos nos permite corroborar lo planteado por Sosa et al (2017), en relación con que la ejemplificación se presenta como un escenario favorable para profundizar en el estudio del MTSK. En ambos momentos, selección y uso, el profesor moviliza y relaciona conocimientos pertenecientes a los tres dominios del MTSK, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento matemático y creencias asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Ambos momentos, la selección y el uso de los ejemplos, brindan una oportunidad para profundizar en el conocimiento del profesorado de matemáticas. Sin embargo, sobre la base de lo observado en nuestra investigación, creemos que el momento más apropiado para profundizar en el MTSK es durante la selección del ejemplo, ya que es ahí cuando se genera un mayor número de interconexiones entre los distintos subdominios de conocimiento movilizados por el profesor. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de un conocimiento sólido, tanto matemático como didáctico, para la selección de ejemplos útiles (Zaslavsky, 2008).

Este análisis nos ha permitido dar respuestas a nuestra pregunta de investigación. Nos ha permitido comprender cómo son y cómo se relacionan los conocimientos especializados movilizados por Pablo al seleccionar y utilizar distintos tipos de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones numéricas.

En la selección de los ejemplos observamos una mayor presencia de conocimientos correspondientes al PCK, lo que favorece el estudio de las relaciones intra-dominio que se pueden generar entre los conocimientos de este dominio, y el estudio sobre cómo el KMT se relacionaba con el resto de los subdominios, siendo el KMT evocado o sustentado por los otros subdominios de conocimiento, lo que concuerda con lo observado por Zakaryan y Ribeiro (2016). Estas situaciones las observamos en la selección de los ejemplo pasivos y activos y en los ejemplos para la enseñanza y para la práctica, pero con menor frecuencia en los ejemplos pasivos.

En la selección de los ejemplos pasivos, la mayoría de las relaciones que se generan entre los subdominios de conocimiento implican que uno sustenta al otro, si la relación involucra al KMT y a otro subdominio, el KMT siempre es sustentado por el otro conocimiento, por el KFLM o por el KoT. El único caso en donde vemos que un conocimiento evoca a otro se da entre el KMT y el KMLS, en donde el KMLS evoca al KMT.

En la selección de los ejemplos activos y los ejemplos para la enseñanza y para la práctica observamos las mismas relaciones entre subdominios. Al igual que en el caso anterior, la relación más frecuente entre los conocimientos es de un subdominio sustentando a otro. Si esta relación involucra al KMT, el KMT siempre es el subdominio sustentado, por el KFLM, por el KMLS, por el KSM o por el KoT. También vemos algunos casos en donde un subdominio evoca a otro, si el KMT forma parte de esta relación, siempre es el subdominio evocado y siempre por otro subdominio del PCK.

En relación con el proceso de uso de los ejemplos, al igual que en la selección, el profesor moviliza conocimientos correspondientes a los distintos subdominios del MTSK. Sin embargo, observamos una mayor presencia de conocimientos correspondientes al MK, lo que favorece el estudio de este dominio de conocimiento, debido al mayor número de relaciones que se generan entre los subdominios del MK. Esta situación la observamos al analizar los conocimientos involucrados en el uso de ejemplos activos y pasivos y en el uso de los ejemplos enfocados en la enseñanza y en la práctica.

En el uso de los ejemplos pasivos, la relación que se daba entre dos subdominios diferentes correspondía a un subdominio sustentando a otro y siempre era el KoT el que sustentaba a otro subdominio. La otra relación que encontramos era de un subdominio complementándose con otro, en este caso ambos conocimientos correspondían al KoT, generándose una relación intra-subdominio.

Las relaciones que se daban durante el uso de los ejemplos activos y los ejemplos para la enseñanza y la practica eran muy similares. En todas las relaciones, en las cuales podíamos observar a un subdominio sustentando a otro, siempre aparecía el KoT sustentado a otro subdominio. Pero cuando la relación era de un subdominio evocando a otro, siempre era un subdominio del PCK el que evocaba a otro, el KMT evocaba subdominios del MK, mientras que el KFLM evocaba al KMT. Y al igual que en el caso de los ejemplos pasivos, si la relación se generaba entre dos subdominios que se complementaban, estos siempre correspondían al KoT. En los ejemplos activos y para la enseñanza, encontramos una relación intra-categoría, vemos cómo se complementan distintos conocimientos correspondientes a la categoría procedimientos del KoT.

Las relaciones que se generaron entre los distintos subdominios, en algunos casos, estaba determinada por las categorías que se ponían en juego y por el momento del ejemplo al cual correspondía. El KMLS podía sustentar o evocar al KMT dependiendo de la categoría del KMLS que estuviera operando; mientras que el KoT podía sustentar al KMT, o el KMT evocar al KoT, dependiendo de si la relación se da durante la selección o el uso del ejemplo, situaciones que ponen de manifiesto la naturaleza dinámica y compleja del conocimiento especializado, también evidenciada por Escudero-Ávila et al. (2017) al analizar algunas relaciones entre subdominios de conocimiento. Este dinamismo lo observamos en los ejemplos activos y en los enfocados en la enseñanza y en la práctica.

No encontramos diferencias entre las relaciones que se generaban entre los subdominios de conocimiento movilizados por el profesor al trabajar con ejemplos activos y con ejemplos enfocados en la enseñanza. En ambos casos observamos las mismas relaciones, tanto en la selección, como en el uso de los ejemplos. Esto también se dio con los ejemplos enfocados a la práctica, pero solo durante la selección del ejemplo. Las relaciones que se generan durante la selección de estos tres tipos de ejemplos nos permiten indagar en el sustento, tanto matemático como didáctico, de las estrategias que el profesor utiliza para abordar el aprendizaje de sus estudiantes. Desde nuestra perspectiva, esto es debido a las relaciones que se dan entre el KMT y el resto de los subdominios, donde el KFLM y KMLS sustentan y/o evocan al KMT, mientras que el KoT y el KSM solo lo sustentan.

En el desarrollo de los ejemplos vemos que tanto los ejemplos pasivos como los enfocados en la práctica consideran al menos un conocimiento del MK en todas las relaciones que se generan entre los subdominios. Mientras que en los ejemplos activos y en los enfocados en la enseñanza, encontramos algunas relaciones entre conocimientos del PCK, pero la mayoría solo considera subdominio del MK. El único subdominio del PCK presente en el desarrollo de los cuatro tipos de ejemplos es el KMT, si bien este subdominio no contiene conocimiento matemático, queda de manifiesto que requiere de este para su funcionamiento (Carrillo et al., 2014).

Si bien los autores del MTSK plantean que las creencias permean el conocimiento que el profesor posee en cada uno de los subdominios (Carrillo et al., 2014), en nuestro caso, al analizar el papel que jugaron las creencias y cómo estas se relacionaban con los distintos subdominios de conocimiento, observamos que esta relación variaba según el dominio al cual pertenecía el conocimiento con el cual se relacionaba. Si el conocimiento correspondía al dominio de conocimiento didáctico del contenido, la creencia sustentaba o evocaba a este conocimiento; pero si el conocimiento pertenecía al conocimiento matemático, la creencia evocaba a este conocimiento. Las creencias que Pablo manifestó en este periodo no permearon por igual a todos los subdominios de conocimientos, a unos los sustentaban mientras a los otros solo los evocaba. Esta situación la observamos en la selección y el uso de los ejemplos pasivos y activos, y en los ejemplos enfocados en la enseñanza y en la práctica.

Durante el desarrollo de esta investigación identificamos una dificultad y algunas limitaciones que se generaron principalmente al momento de recoger la información. La dificultad se nos presentó al trabajar con las sucesiones numéricas, porque encontramos pocas investigaciones en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje a nivel educación secundaria y ninguna sobre el conocimiento especializado, lo que dificultaba la búsqueda del MTSK movilizado por Pablo y por lo tanto la búsqueda de las relaciones entre subdominios de conocimientos.

Identificamos dos limitaciones asociadas a la entrevista. La primera, asociada a la situación de emergencia sanitaria que se vivía al momento de realizar las entrevistas, esto nos llevó a realizar preguntas generales para obtener información sobre el porqué de la selección de un grupo de ejemplos, de esta forma pretendíamos aprovechar al máximo las dos entrevistas; pero esto limitó nuestro análisis al momento de indagar en los conocimientos correspondientes a la selección de esos ejemplos, ya que solo encontramos conocimientos comunes a todos los ejemplos, sin poder obtener información de los conocimientos particulares a la elección de cada ejemplo. La segunda corresponde a la elaboración de preguntas que estaban enfocadas solo en los indicios de conocimiento que observamos durante la clase, esto limitó el análisis sobre los conocimientos correspondientes a la selección de los ejemplos, ya que no obtuvimos información de los conocimientos movilizados durante la selección de algunos ejemplos, específicamente de aquellos por los cuales no consultamos en la entrevista, por no obtener indicios de conocimiento durante su análisis.

Finalmente, el contexto en el cual obtuvimos la información, una sala clases de tercer año de educación secundaria, limitó el análisis de los ejemplos pasivos, en relación con los otros tipos de ejemplos, ya que se generan pocos ejemplos pasivos, debido a que el profesor promovía, en la mayoría de los ejemplos, la participación de los estudiantes.

Los resultados de este análisis nos permitieron identificar las relaciones que se generaban entre los distintos conocimientos movilizados por el profesor al seleccionar y utilizar diferentes tipos de ejemplos. Sin embargo, nuestro estudio no nos permite establecer conclusiones generales y, es por ello, que consideramos necesario continuar explorando el conocimiento del profesor en este tipo de investigaciones, considerando otros contenidos y niveles de estudio. Al mismo tiempo, creemos que una nueva línea de investigación podría centrase en el rol de las creencias en las relaciones de conocimientos que se generan al trabajar con ejemplos.

Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., y Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºESO.* SM.

Apostol, T. M. (2013). *Calculus I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Reverté.

Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., y Sánchez-Matamoros, G. (2017). La comprensión del concepto de sucesión numérica en estudiantes de enseñanza secundaria obligatoria. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso iberoamericano de educación matemática* (pp. 143–151). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., y Sanchez-Matamoros, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 149–167. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

Bajo-Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G., y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas, *Investigación en Educación Matemática XIX* (págs. 143–151). SEIEM.

Bajo-Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G., y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). The Use of Logical Implication as an Indicator of Understanding the Concept of Number Sequences. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(12), 1–12. https://doi.org/https://doi.org/10.29333/ejmste/11429

Ball, D., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14–22, 43–46.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

Bartolomé, M. (1992). Investigación cualitativa en educación: ¿Comprender o transformar? *Revista Investigación Educativa, 20*(2), 7–36.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, (pp. 126–154). PME.

Bills, L., y Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 77–79. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9147-z

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caraterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. (2022). *Proyecto Investigador.* Universidad de Granada.

Cañadas, M., Castro, E., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137–151.

Cañadas, M., Castro, E., y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de suseciones. *La Gaceta de la RSME, 15*(3), 561–573.

Carreño, E., Escudero-Avila, D., y Estrella, S. (2021). Desafíos y perspectivas de investigación con/del Mathematics Teachers' Specialized. En J. Moriel-Junior (Ed.), *V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 11–18). Congresseme.

Carrillo, J. (2017). Idiosincracia del MTSK, Investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7–10). CGSE.

Carrillo, J. (2019). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 7–12). Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especilizado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia, *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Editorial Comares.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. A. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Ed.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297–316). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_21

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080 /14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Escudero, D., y Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1*, 16–26.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares del primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Editorial Comares.

Castro, E., Rico, L., y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361–371.

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87–107). Pirámide.

Chi, M. (2011). Theoretical perspectives, methodological approaches, and trends in the study of expertise. En Y. Li y G. Kaiser, *Expertise in mathematics instruction* (pp.. 17–39). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7707-6_2

Chick, H., y Harris, K. (2007). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. *Educativa AARE, 1*, 1–15.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso Tesis doctoral* (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk) [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Huelva.

Climent, N. (2019). El conocimiento del profesor. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 107–110). Ediciones Universidad Salamanca.

Codes, M., y Gonzalez-Martín, A. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(1), 89–110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M. J., y Colera, R. (2020). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3.* Anaya.

De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw-Hill/Interamericana.

Delgado, R., y Espinoza, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En J. Moriel, *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288–295). Congresseme.

Delgado, R., y Zakaryan, D. (2018). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 567–587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Djasuli, M., Sadijah, C., Parta Y. N., y Chandra, T. D. (2017). Students' reflective abstraction in solving number sequence problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 12*(3), 621–632. https://doi.org/10.29333/iejme/638

Dorio, I., Sabariego, M., y Massot, I. (2014). Características generales de la metodología cualitativa. En R. Bisquerra, *Metodología de la investigación educativa* (pp. 275–292). La Muralla.

Durán, M. (2012). El estudio de caso en la invetigación cualitativa. *Revista nacional de administración, 3*(1), 121–134. https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

English, L., y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher, 91*(2), 166–170. https://doi.org/10.5951/MT.91.2.0166

Escudero-Ávila, D., Climent, N., y Vasco, D. (2016). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 42–48). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Contreras, L., y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35–41). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M. C.-M., Flores, P., Rojas, N. ,y Aguilar, Á. (2016). Aportaciones metodológicas de investigación con MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Semeniario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60–68). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Vasco Mora, D., y Aguilar-González, Á. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP) (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 83–91). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).

Escudero-Domínguez, A., y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Univeridad de Huelva* (pp. 49–54). SGSE.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D., y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. A. Miguel (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del* *profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Univerisadad de Huelva* (pp. 69–86). SGSE.

Espinoza, G. (2020). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función. Tesis doctoral. Obtenido de http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0000/UCB0313_01.pdf

Ferro, P., Rafael, S., y Anna, S. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3ESO. Bloque I: Números y algebra. Funciones.* Edebé.

Figueiredo, C., Blanco, L., y Contreras, C. (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria. *Revista Investigación en la Escuela, 61*, 53–67.

Figueiredo, C., y Contreras, L. C. (2013). A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3*, 45–68. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.62

Figueiredo, C., y Contreras, L. (2015). Ejemplos y ejemplificación en el aula de matemáticas. En L. Blanco, J. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 209–224). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extramadura.

Flores-Medrano, E., y Aguilar-González, Á. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 38–47). CGSE.

Fuentes, C. (2020). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: Un estudio de caso a través del modelo MTSK. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 16*(59), 25–43.

García, J. A. (1999). La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números, 38*, 3–20.

Goldenberg, P., y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183–194. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9143-3

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., y Astiz, M. (2010). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 1–19.

Johnson, H., Blume, G., Shimizu, J., Graysay, D., y Konnova, S. (2014). A Teacher's Conception of Definition and Use of Examples When Doing and Teaching Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(4), 285-311. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.953018

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas.* Person Educación.

Karaagac, M. K. (2004). Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. En D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 43–48). The Open University.

Kidd, J., Pasnak, R., Gadzichowski, M., Gallington, D., McKnight, P., Boyer, C., y Carlson, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education & Development, 25*(1), 134–151. https://doi.org/10.1080/ 10409289.2013.794448

Knutha, E., Zaslavsky, O. y Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 256–262. https://doi.org/10.1016/ j.jmathb.2017.06.002

Kvale, S. (2012). *Las entrevistas en Investigación Cualitativa* . Morata.

Leikin, R., y Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 451–466. https://doi.org/10.1080/00207391003605189

Leinhardt, G. (1990). Capturing craft knowledge in teaching. *Educational researcher, 19*(2), 18–25.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales* . Academia Chilena de Ciencias.

- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 259–288. https://doi.org/ 10.1023/A:1016004822476

Manero, V., Muñoz-Escolano, J., y Oller-Marcén, A. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 161–183. https://doi.org/10.35763/aiem20.3998

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2011). Phenomenology of example construction. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 195–204. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0297-y

Mason, J. (2019). Relationships between proof and examples: Comments arising from the papers in this issue. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 339–347. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.005

Michener, R. E. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science, 2*, 361–383.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (26 de Diciembre de 2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Obtenido de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Montes, M. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras y M. A. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocmiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55–59). CGSE.

Montes, M. A., y Climent, N. (2016). Conocimiento de la estructura mátematica (KSM). En J. Carrillo, L. Contreras y M. A. Montes, *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminirio de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 21–29). SGSE.

Montes, M. A., Contreras, L., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Guitiérrez, A. Estepa y N. Climent (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 403–410). SEIEM.

Ng, L., y Dindyal, J. (2015). Examples in the Teaching of Mathematics: Teachers' Perceptions. En M. Marshman, V. Geiger y A. Bennison (Eds.), *Proceedings of the 38th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 461–468). MERGA.

Osses, S., Sánchez, I., y Ibáñez, F. (2006). Investigación cualitativa en educación. Hacia la generación de teoría a través del proceso análitico. *Estudios Pedagógicos (Valdivia), 32*(1), 119–133. https://doi.org/10.4067/S0718-07052006000100007

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.

Pascual, M. I., y Contreras, L. C. (2018). Un Instrumento para el análisis de los ejemplos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 650). SEIEM.

Pedemonte, B., y Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular number. *The International Journal on Mathematics Education, 43*(2), 257–267. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0311-z

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectivas ampliadas del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87–109.

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1* (pp. 195–210). PME.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805–823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Radford, L.. (2010). Layers of generality and types of generallization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37–62.

Rapley, T. (2014). *Los análisis de la conversación, del discurso y de documentos en Investigación Cualitaitva.* Morata.

Reiss, K., y Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM Mathematics Education, 34*(1), 29–35. https://doi.org/10.1007/BF02655690

Rico, L. (1996). Pensamiento numérico. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en educación matemática. XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados* (pp. 27–54). Grupo Editorial Iberoaméricano.

Rodríguez, R., y Guibert, I. (2009). Algunas consideraciones acerca del tratamiento de las sucesiones numéricas en la Enseñanza Primaria. *Edusol, 9*(27), 80–91.

Romero, I. (2001). Representación y comprensión en pesamiento numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 35–46). Universidad de Huelva.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). El conocimiento de la asignatura de matemáticas de los profesores de primaria: El cuarteto de conocimientos y el caso de Noemí. *Revista de formación de profesores de matemáticas, 8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Rowland, T., Turner, F., Thwites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Sage

Sabariego, M. (2014). La investigación educativa: génesis, evolución y características. En R. Bizquerra (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 51–87). La Muralla.

Sabariego, M., y Bisquerra, R. (2014). Fundamentos metodológicos de la investigación educativa. En R. Bisquerra (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 19–49). La Muralla.

Sabariego, M., Massot, I., y Dorio, I. (2014). Métodos de investigación cualitativa. En R. Bizquerra (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 293–328). La Muralla.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* McGraw Hill.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Routledge.

Schoenfeld, A. (2015). How We Think: A Theory of Human Decision-Making, with a Focus on. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International* (pp. 229–243). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_16

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–11. . https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1–31.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica.* Morata.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R., y Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(4), 291–303. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.04.001

Sosa, L., Contreras, L. C., Goméz-Chacón, I., Flores-Medrano, E., y Montes, M. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Ed.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71–79). CGSE.

Soto, E., y Escribano, E. (2019). El método estudio de caso y su significado en la investigación educativa. En D. Arzola Franco (Ed.), *Procesos formativos en la investigación educativa. Diálogos, reflexiones, convegencias y divergencias* (pp. 203–221). Red de investigadores educativos Chihuahua.

Spivak, M. (2014). *Calculus.* Reverté.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata.

Stewart, J., Hernadez, R., y Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo.* Thomson.

Suffian, H., y Abdul, S. (2010). Teachers' Choice and Use of Examples in The Teaching and Learning of Mathematics in Primary School and Their Relations to Teacher's Pedagogical Content Knowledge (PCK). *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 312–316. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.043

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., y Barkai, R. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(3), 305–325. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9395-x

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y Espacios de Trabajo Matemáticos. *Bolema, 30*(54), 222–239. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

Vasco, D., Moriel, J., y Contreras, L. (2017). Subdominios del Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK). KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo y L. C.

Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29–37). CGSE.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 247–256. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. En H. Chick y J. Vincent, *Actas de la 29.ª conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática* Vol. 4 (pp. 305–312). PME.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 377–384). PME.

Watson, A., y Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 283–294. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0301-6

Watson, A., y Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples* (Vol. 38). Routledge.

Yeo, J. (2010). Finding the general term for an arithmetic progression: Alternatives to the formula. *The Australian Mathematics Teacher, 66*(2), 17–21.

Yin, R. (2002). *Case study research. Desing and methods.* SAGE Publications.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 105–123. https://doi.org/ 10.5565/rev/ensciencias.2260

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplifcación de relaciones. *Zetetike, 24*(3), 301–321. http://dx.doi.org/10.20396/ zet.v24i3.8648095

Zaslavsky, O. (2008). What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples? En M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi y F. Arzarello (Eds.), *The first* *century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 1-5).* Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani.

Zaslavsky, O. (2010). The Explanatory Power of Examples in Mathematics: Challenges for Teaching. En M. K. Stein y L. Kucan, *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107–128). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0594-9_8

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 245–255. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001

Zaslavsky, O., Harel, G. y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková, *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 5* (pp. 457–464). PME.

Zazkis, R., y Chernoff, E. (2006). Cognitive conflictand its resolution via pivotal/bridging example. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 5* (pp. 465–472). PME.

Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Zazkis, R., Liljedahl, P., y Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 131–141. http://doi.org/ 10.1007/s11858-007-0065-9

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2007a). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceeding of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2024–2033). University of Cyprus.

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2007b). Is a visual example in geometry always helpful? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 265–272). PME.

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165–182. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6