Vol.8 No.2 (2024): Journal Scientific MQRInvestigar ISSN: 2588–0659
https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.642-655

Comparative exploration of Newton-Raphson and bisection numerical methods for solving nonlinear equations

Exploración comparativa de los métodos numéricos de Newton-Raphson y bisección para la resolución de ecuaciones no lineales

Autores:

Luna-Fox, Sting Brayan
UNIVERSIDAD ESTATAL AMAZÓNICA
Puyo-Ecuador

sb.lunaf@uea.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-6058-7024

Uvidia-Armijo, Jhoeel Hernán
UNIVERSIDAD ESTATAL AMAZÓNICA
Puyo-Ecuador

jh.uvidiaa@uea.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-3519-6472

Uvidia-Armijo, Luis Alberto
UNIVERSIDAD ESTATAL AMAZÓNICA
Puyo-Ecuador

la.uvidiaa@uea.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-1967-2494

Romero-Medina, Wendy Yajaira
UNIVERSIDAD ESTATAL AMAZÓNICA
Puyo-Ecuador

wy.romerom@uea.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-9177-7146

Fechas de recepción: 01-MAR-2024 aceptación: 01-ABR-2024 publicación: 15-JUN-2024

https://orcid.org/0000-0002-8695-5005
http://mqrinvestigar.com/

Resumen

La resolución de ecuaciones no lineales es crucial en diversos campos científicos y de ingeniería. Desde determinar las raíces de ecuaciones algebraicas hasta resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, obtener soluciones numéricas precisas y eficientes es esencial para modelar y analizar una amplia variedad de fenómenos naturales. El objetivo de este artículo fue realizar una exploración comparativa de los métodos numéricos de Newton-Raphson y bisección para la resolución de ecuaciones no lineales. Se analizó la solución de tres problemas incluyendo ecuaciones polinómicas, exponenciales y trigonométricas. Los resultados obtenidos por los dos métodos fueron comparados y discutidos según la precisión y velocidad de convergencia. Se concluyó que la combinación de ambos métodos permitió una convergencia óptima, aprovechando la velocidad de convergencia y precisión del método de Newton-Raphson y la robustez del método de bisección. Esta sinergia proporcionó una solución efectiva y eficiente para una amplia gama de problemas en ingeniería, ciencias y matemáticas aplicadas, mejorando la resolución de ecuaciones no lineales en función de las características específicas del problema y los requisitos de precisión y eficiencia.

Palabras clave: Convergencia; iteración; precisión; matemática

Abstract

Solving nonlinear equations is crucial in various scientific and engineering fields. From determining the roots of algebraic equations to solving systems of differential equations, obtaining accurate and efficient numerical solutions is essential for modeling and analyzing a wide variety of natural phenomena. The objective of this article was to perform a comparative exploration of the Newton-Raphson and bisection numerical methods for solving nonlinear equations. The solution of three problems was analyzed including polynomial, exponential and trigonometric equations. The results obtained by the two methods were compared and discussed according to the precision and speed of convergence. It was concluded that the combination of both methods allowed optimal convergence, taking advantage of the speed of convergence and precision of the Newton-Raphson method and the robustness of the bisection method. This synergy provided an effective and efficient solution to a wide range of problems in engineering, science and applied mathematics, improving the resolution of nonlinear equations based on the specific characteristics of the problem and the requirements for precision and efficiency.

Keywords: Convergence; iteration; precision; mathematics

Introducción

La resolución de ecuaciones no lineales es un problema fundamental en diversos campos de la ciencia y la ingeniería (Pineda-Ortiz & Chica-Arrieta, 2020). Desde la determinación de raíces de ecuaciones algebraicas hasta la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, la búsqueda de soluciones numéricas precisas y eficientes es una tarea crucial en la modelización y análisis de fenómenos naturales y artificiales (Sun et al., 2019). En este contexto, los métodos numéricos desempeñan un papel fundamental al proporcionar herramientas algorítmicas para aproximarse a las soluciones de estas ecuaciones no lineales (Cockayne et al., 2019).
Entre los métodos numéricos más utilizados para la resolución de ecuaciones no lineales se encuentran el método de Newton-Raphson (Pho, 2022) y el método de bisección (Rahman et al., 2022). Ambos enfoques poseen fundamentos teóricos sólidos y han demostrado ser eficaces en una amplia gama de situaciones (Liu et al., 2022). Sin embargo, cada uno de ellos tiene sus propias características, ventajas y limitaciones, lo que los hace adecuados para diferentes tipos de problemas y contextos de aplicación.
El método de Newton-Raphson, también conocido como método de Newton, es un enfoque iterativo que utiliza la derivada de la función para aproximar la raíz de la ecuación (Millidere et al., 2020). Basado en el concepto de tangente a la curva en un punto dado, este método converge rápidamente hacia la solución cuando se cumplen ciertas condiciones de convergencia (Torres-Hernandez et al., 2021), como la existencia de una derivada continua y no nula en la vecindad de la raíz buscada. Aunque el método de Newton-Raphson es conocido por su rápida convergencia, puede ser sensible a la elección del punto inicial y puede diverger en casos donde la derivada se anula o es discontinua (Liu et al., 2020).
Por otro lado, el método de bisección es un enfoque más simple y robusto que divide iterativamente un intervalo que contiene la raíz en subintervalos más pequeños (Oliveira & Takahashi, 2020), reduciendo gradualmente la longitud del intervalo hasta que se alcanza una tolerancia deseada (Milani & Grande, 2020). A diferencia del método de Newton-Raphson, el método de bisección no requiere conocimiento de la derivada de la función y garantiza la convergencia hacia la raíz bajo ciertas condiciones, como la continuidad de la función en el intervalo dado (Gulshan et al., 2023). Aunque el método de bisección tiende a converger más lentamente que el método de Newton-Raphson, su simplicidad y robustez lo hacen adecuado para una variedad de problemas en los que otros métodos pueden fallar (Fiorentino et al., 2020). El objetivo de este artículo fue realizar una exploración comparativa de los métodos numéricos de Newton-Raphson y bisección para la resolución de ecuaciones no lineales.

https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.642-655

Material y métodos

Se seleccionaron funciones no lineales representativas, abarcando una variedad de comportamientos como ecuaciones polinómicas, exponenciales y trigonométricas. Este paso permitió evaluar los métodos en escenarios diversos y relevantes.
Para la resolución de ecuaciones no lineales por el método de Newton-Raphson se aplicó el siguiente algoritmo (Torres-Hernandez & Brambila-Paz, 2019):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde x_n representa la aproximación inicial de la raíz, $f(x_n)$ indica el valor de la función evaluado en x_n y $f'(x_n)$ es la derivada de la función en x_n.
El error absoluto de cada iteración se calculó de la siguiente manera (Sereeter et al., 2019):

$$|e_n| = |x_{n+1} - x_n|$$

Para el método de bisección se dividió iterativamente un intervalo que contiene la raíz en subintervalos más pequeños, reduciendo gradualmente la longitud del intervalo hasta que se alcanzó una tolerancia deseada. Matemáticamente, el método de bisección se expresó mediante la siguiente fórmula de iteración (Doabil et al., 2019):

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Donde a_n y b_n representan los extremos del intervalo en la $n-ésima$ iteración, y c_n es el punto medio del intervalo.
El error absoluto del método se calculó mediante la siguiente expresión (Hamadi et al., 2024):

$$|e_n| = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Se seleccionaron tres ejercicios tomados del libro "Métodos numéricos para ingenieros" de los autores Chapra & Canele (2016) y se resolvieron por los dos métodos descritos anteriormente. Los ejercicios seleccionados fueron los siguientes:

1. $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 = 0$
2. $e^{-x} - x = 0$
3. $2sen(\sqrt{x}) - x$=0

Resultados

Los resultados de la resolución del polinomio de grado cuatro (problema 1) desarrollados por los métodos de Newton-Raphson y bisección se muestran en la Tabla 1 y Tabla 2 respectivamente. Ambos métodos lograron encontrar una aproximación cercana de la raíz de la ecuación, pero con diferencias en la precisión y el número de iteraciones requeridas. Para el método de Newton-Raphson se tomó como valor inicial $x_0 = 0$, este método convergió más rápidamente hacia la raíz, logrando una solución exacta después de solo cinco iteraciones. Sin embargo, esto puede no ser siempre el caso, ya que la convergencia del método de Newton-Raphson depende de la elección del valor inicial y de la función misma (Dutto et al., 2019). Además, este método requiere el cálculo de la derivada de la función, lo que puede ser complicado.

Por otro lado, para el método de bisección se tomó un intervalo de [0, 2]. Este método proporcionó una aproximación menos precisa de la raíz después de 10 iteraciones. Aunque es un método más simple y robusto que no requiere el cálculo de la derivada, puede converger más lentamente hacia la raíz (Chu et al., 2022), especialmente si el intervalo inicial es grande o si la función tiene comportamientos oscilantes o no lineales en el intervalo.

Tabla 1. Resolución del problema 1 por el método de Newton-Raphson

n	(x_n)	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Error absoluto
0	0	-15	-8	-
1	1,875	27,540	170,980	1,875
2	1,255	4,618	87,705	0,62
3	1,045	0,376	63,469	0,21
4	1,002	0,012	55,993	0,043
5	1,000	0,000	55,840	0,002
6	**1,000**	0,000	55,840	0,0

Tabla 2. Resolución del problema 1 por el método de bisección

n	a_n	b_n	c_n	Error absoluto
0	0	2	1	2
1	1	2	1,5	1
2	1	1,5	1,25	0,5
3	1,25	1,5	1,375	0,25
4	1,25	1,375	1,3125	0,125
5	1,3125	1,375	1,34375	0,0625
6	1,34375	1,375	1,359375	0,03125
7	1,34375	1,359375	1,3515625	0,015625
8	1,3515625	1,359375	1,35546875	0,0078125
9	1,35546875	1,359375	1,357421875	0,00390625
10	1,357421875	1,359375	**1,3583984375**	0,001953125

En la tabla 3 se observa la resolución de la ecuación exponencial (problema 2) por el método de Newton-Raphson. Después de aplicar el método de Newton-Raphson con una estimación inicial de $x_0 = 1$, converge a una solución aproximada de $x \approx 0{,}5671$ después de 4 iteraciones. Este resultado indicó que la raíz de la ecuación se encuentra cerca de este valor, lo cual es coherente con la observación de que la función exponencial e^{-x} decrece rápidamente (Tostado et al., 2019) y se interseca con la función lineal x en algún punto cercano a $x \approx 0{,}5671$. En cada iteración, se observó una disminución significativa en el error absoluto, lo que indicó una rápida convergencia hacia la solución.

Tabla 3. Resolución del problema 2 por el método de Newton-Raphson

n	(x_n)	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Error absoluto
0	1,0000	0,3679	-2,7183	-
1	0,6127	0,0067	-1,9296	0,3873
2	0,5664	-0,0220	-1,8415	0,0463
3	0,5671	0,0001	-1,8414	0,0007
4	**0,5671**	0,0000	-1,8414	0,0000

La solución encontrada por el método de bisección en un intervalo de [0, 1] se presenta en la Tabla 4. Se observa que este método requiere varias iteraciones (en este caso, 13 iteraciones) para converger a una solución aproximada. Esto puede deberse a que el método divide el intervalo en cada iteración y selecciona el subintervalo que garantiza la presencia de la raíz (Panou, 2019). Aunque la convergencia es gradual, el método de bisección garantiza que la solución se encuentre dentro del intervalo seleccionado en cada iteración. Esta característica distintiva del método de bisección garantiza que la solución se aproxime cada vez más a la raíz real a medida que avanzan las iteraciones (Y. Liu & Lin, 2024). Conforme el método de bisección continúa iterando, la aproximación de la raíz se vuelve más precisa (Elghandour et

https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.642-655

al., 2021). La convergencia del método a una solución única se evidencia por la disminución gradual del error absoluto en cada iteración. Esto indica que se aproxima cada vez más a la raíz real de la ecuación.

Tabla 4. Resolución del problema 2 por el método de bisección

n	a_n	b_n	c_n	Error absoluto
0	0,0000	1.0000	0,5000	-
1	0,5000	1,0000	0,7500	0,2500
2	0,5000	0,7500	0,6250	0,1250
3	0,6250	0,7500	0,6875	0,0625
4	0,6875	0,7500	0,7188	0,0312
5	0,7188	0,7500	0,7344	0,0156
6	0,7344	0,7500	0,7422	0,0078
7	0,7422	0,7500	0,7461	0,0039
8	0,7422	0,7461	0,7441	0,0020
9	0,7441	0,7461	0,7451	0,0010
10	0,7451	0,7461	0,7456	0,0005
11	0,7451	0,7456	0,7454	0,0002
12	0,7451	0,7454	0,7453	0,0001
13	0,7451	0,7453	**0,7452**	0,0001

La ecuación trigonométrica (problema 3) resuelta por el método de Newton-Raphson en $x_0 = 4$, presentó una solución aproximada de $x \approx 2{,}2165$ después de siete iteraciones. Los resultados mostrados en la Tabla 5 indicaron que después de la cuarta iteración el error absoluto se redujo a cero, lo que indica que la aproximación no ha cambiado en las últimas iteraciones. Esto muestra que el valor aproximado que satisface la ecuación es una solución estable y que cualquier iteración adicional no cambiará esta solución. Sin embargo, aunque la convergencia fue rápida en este caso, es importante destacar que el método de Newton-Raphson puede ser sensible a la elección de la estimación inicial (Izadi, 2020). Una estimación inicial diferente podría conducir a una solución diferente o incluso a la divergencia del método (Albalawi et al., 2021).

Tabla 5. Resolución del problema 3 por el método de Newton-Raphson

n	(x_n)	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Error absoluto
0	4,000	1,7639	0,5403	-
1	2,8348	-0,4767	0,5671	1,1652
2	2,2811	0,1433	0,5813	0,5537
3	2,2186	0,0028	0,5826	0,0625
4	2,2165	0,0000	0,5827	0,0021
5	2,2165	0,0000	0,5827	0,0000
6	2,2165	0,0000	0,5827	0,0000
7	**2,2165**	0,0000	0,5827	0,0000

En contraste, luego de 13 iteraciones (Tabla 6) realizadas por el método de bisección en un intervalo de [0, 4] la solución aproximada converge a $x \approx 2{,}9770$. Comparando con el resultado obtenido por el método de Newton-Raphson ($x \approx 2{,}2165$), se observó que hay una diferencia significativa entre las dos aproximaciones. Así mismo, el error absoluto disminuyó gradualmente a medida que aumentaron las iteraciones del método de bisección. No obstante, en comparación con el método de Newton-Raphson, el error absoluto parece converger más lentamente hacia cero.

Aunque el método de bisección converge a una solución, es notable que requiere más iteraciones, además proporciona una aproximación menos precisa en comparación con el método de Newton-Raphson. Esto puede deberse a la naturaleza del método de que divide el intervalo de búsqueda en cada iteración, lo que resulta en una convergencia más lenta (Henry Johnson et al., 2019).

Tabla 6. Resolución del problema 3 por el método de bisección

n	a_n	b_n	c_n	Error absoluto
0	1,0000	4,0000	2,5000	-
1	2,5000	4,0000	3,2500	1,5000
2	2,5000	3,2500	2,8750	0,7500
3	2,8750	3,2500	3,0625	0,3750
4	2,8750	3,0625	2,9688	0,1875
5	2,9688	3,0625	3,0156	0,0938
6	2,9688	3,0156	2,9922	0,0469
7	2,9688	2,9922	2,9805	0,0234
8	2,9688	2,9746	2,9743	0,0117
9	2,9746	2,9775	2,9775	0,0059
10	2,9746	2,9760	2,9760	0,0029
11	2,9760	2,9768	2,9768	0,0015
12	2,9768	2,9772	2,9772	0,0007
13	2,9768	2,9770	**2,9770**	0,0004

Conclusiones

La combinación estratégica de métodos numéricos como Newton-Raphson y bisección permite una convergencia óptima en ecuaciones no lineales. Newton-Raphson ofreciendo velocidad y precisión, pero puede ser sensible a la estimación inicial, mientras que la robustez del método de bisección lo hace una elección segura pero lenta. Al utilizar Newton-Raphson con una estimación inicial de bisección, se optimiza la convergencia al tiempo que se mantiene la estabilidad del proceso. Esta sinergia entre métodos proporciona una solución efectiva y eficiente para una amplia gama de problemas de ingeniería, ciencias y matemáticas aplicadas.

Ambos métodos lograron encontrar aproximaciones cercanas de la raíz de la ecuación, sin embargo, el método de Newton-Raphson mostró una convergencia más rápida hacia la solución exacta, con solo cinco iteraciones en comparación con las diez iteraciones del método de bisección. Esto sugiere que, en general, el método de Newton-Raphson puede ser más eficiente en términos de velocidad de convergencia.
A pesar de la convergencia más rápida del método de Newton-Raphson, su implementación puede ser más compleja ya que requiere el cálculo de la derivada de la función, lo que puede ser complicado en ciertos casos. Por otro lado, el método de bisección es más simple y robusto, ya que no requiere el cálculo de la derivada, pero puede converger más lentamente hacia la raíz, especialmente si el intervalo inicial es grande o si la función presenta comportamientos oscilantes o no lineales.
En el caso del método de Newton-Raphson, la elección del valor inicial puede influir significativamente en la convergencia del método. Se observó que una estimación inicial adecuada resultó en una convergencia rápida hacia la solución, mientras que una elección inadecuada podría conducir a divergencia o a una solución diferente. Esto destaca la importancia de seleccionar cuidadosamente el valor inicial al aplicar este método, ya que su eficacia depende de ello.

Referencias bibliográficas

Albalawi, W., Salas, A. H., El-Tantawy, S. A., & Youssef, A. A. A. R. (2021). Approximate analytical and numerical solutions to the damped pendulum oscillator: Newton–Raphson and moving boundary methods. Journal of Taibah University for Science, 15(1), 479–485. https://doi.org/10.1080/16583655.2021.1989739

Chapra, S., & Canele, R. (2016). Métodos numéricos para ingenieros - 5a edición | Enhanced Reader. moz-extension://14d71c70-8007-4614-91c9-93b5cc3f52fb/enhanced-reader.html?openApp&pdf=http%3A%2F%2Fartemisa.unicauca.edu.co%2F~cardila%2FChapra.pdf

Chu, W., Zhao, Y., & Yuan, H. (2022). A Novel Divisional Bisection Method for the Symmetric Tridiagonal Eigenvalue Problem. Mathematics, 10(15), 2782. https://doi.org/10.3390/MATH10152782

Cockayne, J., Oates, C. J., Sullivan, T. J., & Girolami, M. (2019). Bayesian probabilistic numerical methods. SIAM Review, 61(4), 756–789. https://doi.org/10.1137/17M1139357/SUPPL_FILE/M113935SUPMAT.PDF

Doabil, L., Azure, I., & Aloliga, G. (2019). Comparative Study of Numerical Methods for Solving Non-linear Equations Using Manual Computation. Mathematics Letters, 5(4), 41–46. https://doi.org/10.11648/j.ml.20190504.11

Dutto, S., Masetti, G., Chiaradonna, S., & Di Giandomenico, F. (2019). On Extending and Comparing Newton-Raphson Variants for Solving Power-Flow Equations. IEEE Transactions on Power Systems, 34(4), 2577–2587. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2019.2897640

Elghandour, A. N., Salah, A. M., Elmasry, Y. A., & Karawia, A. A. (2021). An Image Encryption Algorithm Based on Bisection Method and One-Dimensional Piecewise Chaotic Map. IEEE Access, 9, 43411–43421. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3065810

Fiorentino, A., Ginestra, P. S., Attanasio, A., & Ceretti, E. (2020). Numerical Optimization of the Blank Dimensions in Tube Hydroforming Using Line-Search and Bisection Methods. Materials 2020, Vol. 13, Page 945, 13(4), 945. https://doi.org/10.3390/MA13040945

Gulshan, G., Budak, H., Hussain, R., & Sadiq, A. (2023). Generalization of the bisection method and its applications in nonlinear equations. Advances in Continuous and Discrete Models, 2023(1), 1–12. https://doi.org/10.1186/S13662-023-03765-5/TABLES/15

Hamadi, A. H., Rasheed, M., Shihab, S., Rashid, T., & Diab Ounis, T. (2024). Determination of PV Model Parameters Using Bisection and Secant Methods. Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics, 13(1), 43. https://doi.org/10.29304/jqcm.2021.13.1.744

Henry Johnson, E., Ozuomba, S., & Okon Asuquo, I. (2019). Determination of Wireless Communication Links Optimal Transmission Range Using Improved Bisection Algorithm. Universal Journal of Communications and Network, 7(1), 9–20. https://doi.org/10.13189/ujcn.2019.070102

Izadi, M. (2020). Applications of the Newton-Raphson method in a SDFEM for inviscid Burgers equation Computational Methods for Differential Equations Applications of the Newton-Raphson method in a SDFEM for inviscid Burgers equation. CMDE, 8(4), 708–732. https://doi.org/10.22034/cmde.2020.32615.1513

Liu, L., Ren, Y., Lin, Z., & Zhao, Z. (2022). Pseudo Numerical Methods for Diffusion Models on Manifolds. ICLR 2022 - 10th International Conference on Learning Representations. https://arxiv.org/abs/2202.09778v2

Liu, Y., & Lin, R. (2024). A Bisection method for computing the proximal operator of the ℓp-norm for any 0<p<1 with application to Schatten p-norms. Journal of Computational and Applied Mathematics, 447, 115897. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2024.115897

Liu, Z., Zhang, X., Su, M., Sun, Y., Han, H., & Wang, P. (2020). Convergence analysis of newton-raphson method in feasible power-flow for dc network. IEEE Transactions on Power Systems, 35(5), 4100–4103. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2020.2986706

Milani, G., & Grande, E. (2020). Simple bisection procedure in quickly convergent explicit ODE solver to numerically analyze FRCM strengthening systems. Composites Part B: Engineering, 199, 108322. https://doi.org/10.1016/J.COMPOSITESB.2020.108322

Millidere, M., Karaman, U., Uslu, S., Kasnakoğlu, C., & Çimen, T. (2020). Newton-raphson methods in aircraft trim: A comparative study. FORUM, 1 PartF, 1–28. https://doi.org/10.2514/6.2020-3198

Oliveira, I. F. D., & Takahashi, R. H. C. (2020). An Enhancement of the Bisection Method Average Performance Preserving Minmax Optimality. Transactions on Mathematical Software, 47(1). https://doi.org/10.1145/3423597

Panou, G. (2019). Cartesian to geodetic coordinates conversion on an oblate spheroid using the bisection method. Computers & Geosciences, 133, 104308. https://doi.org/10.1016/J.CAGEO.2019.104308

Pho, K. H. (2022). Improvements of the Newton–Raphson method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 408, 114106. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2022.114106

Pineda-Ortiz, J. C., & Chica-Arrieta, E. L. (2020). Métodos numéricos para el desarrollo de una turbina hidrocinética tipo Gorlov. Revista UIS Ingenierías, 19(3), 187–205. https://doi.org/10.18273/REVUIN.V19N3-2020018

Rahman, H., Rahman, H., Roy, K. C., Das, S. K., & Hossain, S. A. (2022). A Study on the Numerical Accuracy and Efficiency of the Bisection Method in Finding Square Roots of

Positive Real Numbers. International Journal of Scientific Research in Research Paper. Computer Science and Engineering, 10(3), 7–12. https://www.researchgate.net/publication/361717916

Sereeter, B., Vuik, C., & Witteveen, C. (2019). On a comparison of Newton–Raphson solvers for power flow problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 360, 157–169. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2019.04.007

Sun, H., Chang, A., Zhang, Y., & Chen, W. (2019). A review on variable-order fractional differential equations: Mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications. Fractional Calculus and Applied Analysis, 22(1), 27–59. https://doi.org/10.1515/FCA-2019-0003/PDF

Torres-Hernandez, A., & Brambila-Paz, F. (2019). Fractional Newton-Raphson Method and Some Variants for the Solution of Non-linear Systems. Applied Mathematics and Sciences An International Journal (MathSJ), 7(1), 13–27. https://doi.org/10.5121/mathsj.2020.7102

Torres-Hernandez, A., Brambila-Paz, F., Iturrarán-Viveros, U., & Caballero-Cruz, R. (2021). Fractional Newton–Raphson Method Accelerated with Aitken's Method. Axioms, 10(2), 47. https://doi.org/10.3390/AXIOMS10020047

Tostado, M., Kamel, S., & Jurado, F. (2019). Developed Newton-Raphson based Predictor-Corrector load flow approach with high convergence rate. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 105, 785–792. https://doi.org/10.1016/J.IJEPES.2018.09.021

https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.642-655

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Agradecimiento:

N/A

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.