

方形管阵流固耦合方程中独立参数 D 的数值解

何伟, 张若京

(同济大学固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

侯瑞鸿, 陈昌麒

(香港理工大学应用数学系, 香港)

摘要: 求解管阵流固耦合方程, 必须先求出独立参数 D 。本文介绍了一种求解方形截面管情况下参数 D 的差分方法。首先根据边界条件, 得到了求解局部问题的差分模型, 在此基础上求出了局部函数 $\chi(y_1, y_2)$ 在流体域内各离散网格点上的值, 绘出了局部压力场的等值线图, 并由此计算出参数 D 的值。然后改变 λ 值, 重复相同的运算, 最后绘出 D 随 λ 变化曲线, 并和一种渐近解作了比较。结果表明, 该数值解法简明、准确。

关键词: 流固耦合; 方形截面管; 差分; 数值解
中图分类号: O242.21

Numerical Solution to Independent Parameter D in Fluid – solid Coupling Equations of Tube Bundle with Square Section

HE Wei, ZHANG Ruo – jing

(Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University, Shanghai 200092)

HOU S. H., Chan C. K.

(Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong)

Abstract: In order to solve the fluid – solid coupling equations of tube bundle, the independent parameter D has to be determined in advance. A sort of difference method to solve the parameter in the equations of tube bundle with square section is presented in the paper. At first, the difference model to solve the local function is gained from the boundary condition. On the basis of this model, the values of local function $\chi(y_1, y_2)$ on the dispersed gridding points of fluid region are gained. Then, the contour map of local press field is plotted and D is calculated, accordingly. From different λ , the curve of $D - \lambda$ is presented. Finally, the result is compared with an asymptotic solution, indicating that the method is concise and accurate.

Key words: fluid – solid coupling; tube bundle with square section; difference method; numerical solution

管阵是由管束和浸泡该管束的流体构成的。由于管阵内的流固耦合现象复杂, 所以很难建立数学模型以描述其整体动力特性。从 80 年代开始, 日、德、法等国相继提出了几种模型。日本模型太简单, 逐渐被人遗忘。1981 年, 德国人 Schumann 和 Benner 给出了一套描述方程。1989 年, 法国人 Brochard 给出了另一套方程。它们都是二维的, 即不能考虑流体沿管杆轴向流动的效应。张若京在文[1、2、3、4、5]中, 根据

收稿日期: 1998 – 08 – 12

基金项目: 上海市重点学科资助项目、同济大学固体力学教育部重点实验室开放基金项目、香港理工大学研究项目“Seismiz analysis of nuclear reactor cores (351/631)”

作者简介: 何伟(1975-), 男, 河南信阳人, 博士生。

管阵内的管杆具有数量大且排列规则的特点,采用渐近均匀化方法,给出了一组三维均匀化方程。该方程组可以考虑流体的三维流动,还可以蜕化为上述德国与法国两种二维方程,所以称为统一的三维均匀化方程。

最近,张若京在文[6]中又证明了,当管截面具有两个相互正交的对称轴时,该管阵具有横观各向同性的特性。此时,方程组可简化为:

$$\left(\frac{\lambda}{c_f^2} + \frac{1-\lambda}{kc_s^2}\right)\ddot{p} - A \nabla_a \nabla_a p - \lambda \nabla_3 \nabla_3 P + \bar{\rho}_f B \nabla_a \ddot{w}_a = 0 \quad (1)$$

$$M \ddot{w}_a + B \nabla_a p + \nabla_3 \nabla_3 \left(\frac{EI}{|X|} \nabla_3 \nabla_3 w_a \right) = 0 \quad (2)$$

该方程组含有一个独立的标量参数 D 。其它参数 A, B 和 M 都可以用 D 表出:

$$A = \lambda - D \quad (3)$$

$$B = 1 - \lambda + D \quad (4)$$

和

$$M = \bar{\rho}_s(1 - \lambda) + \bar{\rho}_f D \quad (5)$$

在以上 5 式中,待求的未知函数是管梁挠度 $w_a(x_1, x_2, x_3, t)$ 和流体压力 $p(x_1, x_2, x_3, t)$ 。坐标轴 x_3 沿管轴线布置, x_1 和 x_2 在垂直于轴线的平面内。 c_f 和 c_s 分别是流体中和管梁中的声速。 $k = \bar{\rho}_s/\bar{\rho}_f$ 是质量比。 $\bar{\rho}_f$ 和 $\bar{\rho}_s$ 分别是流体和管梁的平衡态密度。 $\lambda = |X_f|/|X|$ 是流体体积比或沿轴向的流体面积比, $|X|$ 和 $|X_f|$ 分别是单胞面积和单胞内流体面积。这里讲的“单胞”,是指由一个管截面和四周流体组成的基本平面单元。可以认为,整个管阵截面是由单胞复制排列而形成的。 EI 是管梁的抗弯刚度。 $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ 。变量上的点表示对时间求导。本文中用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma \dots$ 表示的下标,取值为 1 和 2。重复下标,约定求和。独立标量参数 D 由下式定义:

$$D = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{\partial \chi}{\partial y_1} dy_1 dy_2 \quad (6)$$

式中,局部平面坐标 $y = (y_1, y_2)$ 与整体三维坐标 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的关系是

$$y_a = x_a/\epsilon (\alpha = 1, 2) \quad (7)$$

这里, ϵ 是单胞尺寸与整个管阵尺寸之比,是无量纲小参数。 $|Y|$ 是放大的单胞面积。 Y_f 是放大的单胞内的流体域。局部函数 $\chi(y_1, y_2)$ 由下式定义:

$$\begin{cases} x_{,aa} = 0 \\ \chi_{,an_a} = n_1 \\ \int_{Y_f} \chi dy = 0 \\ \chi(y_1, y_2) \text{ 是 } y_1 \text{ 和 } y_2 \text{ 的双周期函数} \end{cases} \quad (8)$$

式中, n_a 是单胞内的流体域的外法线方向矢量。逗号表示对局部坐标求导。

由(5)式可见, D 的意义是附加在管梁上的流体面积比。 D 是标量,说明附加流体在管截面的平面内,沿任何方向的厚度都相同。该平面是各向同性平面。

要求解基本方程组(1)和(2),应先确定参数 D 。为此必须先求解局部问题(8),再根据(6)求 D 。核反应堆堆心的燃料棒往往采用方形管,本文介绍了一种求解方形管情况下参数 D 的数值方法。

1 求解过程

首先,依照(8)确定 $\chi(y_1, y_2)$ 在单胞流体域内应满足的边界条件。由第一式知 χ 应满足 Laplace 方程,由第二式易得在内边界上 $\frac{\partial \chi}{\partial n} = n_1$,所以 χ 关于 y_1 轴对称,关于 y_2 轴反对称,且第三式自然满足。结合第四式的周期条件,可推出外边界上的边界条件分别如图 1 所示。由于对称,求解过程只需在 1/4 单胞

域内进行。

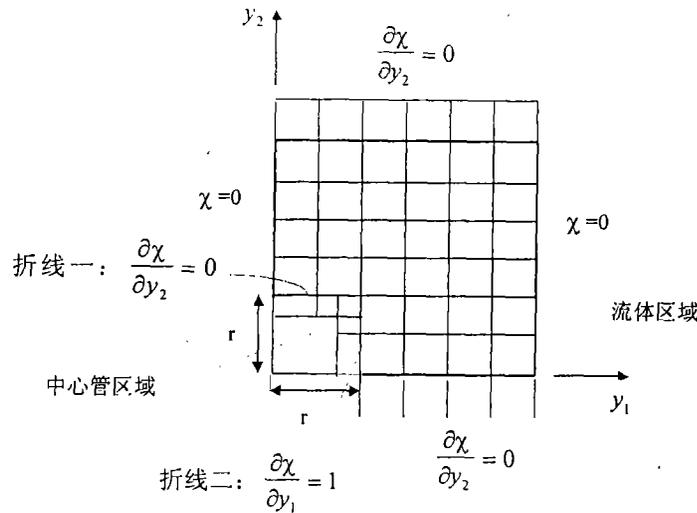


图 1 一个简单的差分模型

Fig.1 A simple difference model

采用差分法求解,一个 1/4 单胞域内典型的网格划分模型示意如下:

这是第一、二类边界条件混合的问题。每个角点处的节点需要同时满足两条边界上的边界条件,这导致本问题出现了独立约束方程数多于未知数个数的情况。为了解决此问题,在具有第二类边界条件的边界外围补充了一组节点,距离为一个网格间距,并且在内边界的外围,令补充节点的距离为半个网格间距,以避免因节点重合而损失未知数。最后在原边界上补充内点方程。经此处理后,独立方程数与未知数个数一,解此线性方程组后即可得出 $\chi(y_1, y_2)$ 在各个离散网格点上的值。

为了使后面的积分能在更小的方格内进行以具有更高的精确度,先利用已有的 $\chi(y_1, y_2)$ 的值进行二维插值。由于已知的数据不是在一个完整的矩形区域里,故分别取中心管以上部分和以右部分矩形内的数值进行插值。可以看出:两次插值后,右上部分公共区域内的点上的值几乎相等,说明这种分区插值是可行的,没有因为忽略了部分点上的值而对结果带来较大的影响。而且可以发现:插值后各点值在绝大部分区域内都很好地满足当地的条件,只是在两条 χ 值变化很剧烈的固—液体边界附近与边界条件有所出入。针对这种情况,作者在边界附近依照边界条件对 χ 值进行了修正,篇幅所限,这里不再赘述。

在对每行数据求 $\frac{\partial \chi}{\partial y_1}$ 时,采用了中心差分,即每行上内点的微分是相邻两点间斜率的平均。对第一个和最后一个点而言,采用的方法是用二次多项式拟合邻近的三个点,再计算这个多项式在第一个(或最后一个)点处的微分。完毕即可由式(6)求出 D 。

我们分别算出了 $r = 0.1, 0.2, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45$ 六种情况下的 D 值,拟合出 D 随 $\lambda (\lambda = 1 - 4r^2, 0 \leq r \leq 0.5)$ 变化的曲线。由图 3 中的实线所示。

2 计算结果及讨论

图 2 所示的为 1/4 单胞域内 χ 的等值线图。从图中可以看出, χ 在下边界与内边界第二条折线所夹的角落里值最小,而在左右两条边界上值为最大($\chi = 0$)。并且在内边界第二条折线与第一条折线接头的尖角附近处,等值线趋于密集。这里的 χ 值相对较大,这是由附近的边界条件造成的。

图 3 中实线是本文得到的数值解。可以看出,在 $\lambda = 1$ 及 $\lambda = 0$ 的地方, D 约为零,这两种情况分别是单胞内全部为液体以及没有液体的情形。在大约 $\lambda = 0.64 (r = 0.3)$ 处, D 取最大值。这说明在管束的表面积与周围液体都比较多的情况下,附加的流体最多。

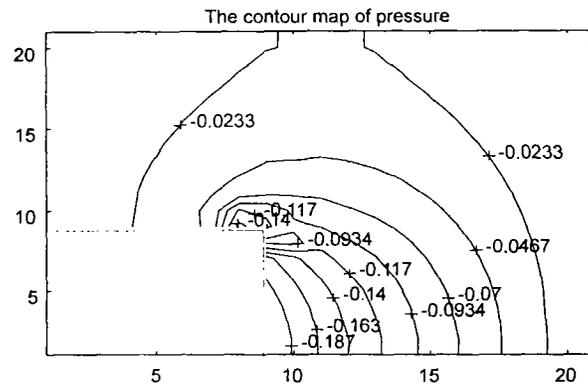
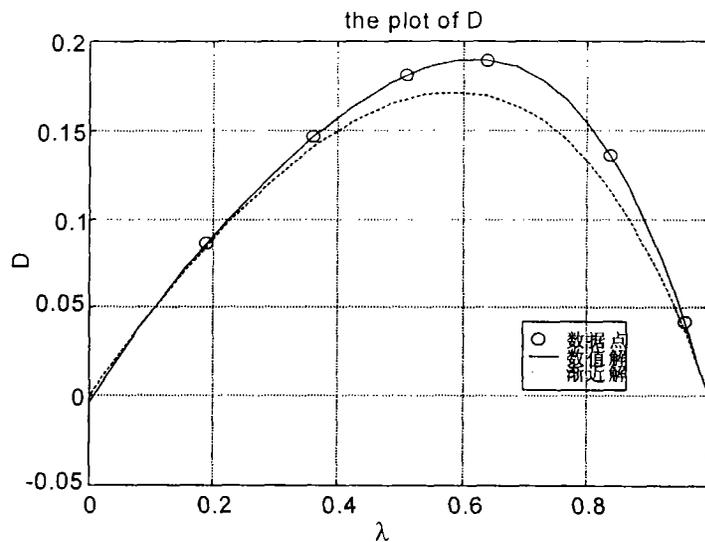


图 2 1/4 单胞内压力场的等值线图

Fig.2 The contour map of press field in one fourth of unit cell

图 3 参数 D 的曲线图Fig.3 The curve of parameter D

张若京对于稀疏排列的情况,曾经给出了一个渐近解^[5]:

$$D = \frac{\lambda(1-\lambda)}{2-\lambda} \quad (1-\lambda \ll 1) \quad (9)$$

图 3 中虚线表示的即是渐近解(9)。由于渐近解是把管截面简化成圆形得到的,相对于方形管来说,管束的表面积及周围液体的面积减少了,所以用渐近方法求出的附加流体略少。当 λ 较小(r 较大)时,由于管束周围的液体本来就很少,所以两个解相差无几,当 λ 很大(r 很小)时,由于管束的表面积减小很少,边界离管束又很远,对其形状的简化无甚影响,所以两个解也在一定范围内可以吻合。但在中间处,两个解相差较大(最大相差约 9%)。

参考文献:

- [1] 张若京. 反应堆堆心的三维动力学模型. 第 9 届全国反应堆结构力学会议论文集, 北京, 1996
- [2] 张若京. 统一的管阵流固耦合均质化模型. 力学学报, 1997, 29(2): 220-223
- [3] 张若京. 管束——流体耦合振动的附加流体质量和等效声速. 现代力学与科技进步——庆祝中国力学学会成立 40 周年, 中国力学学会编, 北京: 清华大学出版社, 1997: 559-562
- [4] Zhang R J. A unified 3D homogenization model of beam bundle in fluid. Journal of Pressure Vessel Technology, ASME, 1998, 120: 56-61
- [5] Zhang R J. Structural homogenized analysis for nuclear reactor core. Journal of Nuclear Engineering and Design, 1998, 183: 151-156