Teme s natjecanja: Upisana kružnica i površina

Nika Utrobičić[1]

Uvod

U ovom ćemo tekstu proučiti tipične zadatke s domaćih natjecanja u kojima je potrebno na neki način povezati upisanu kružnicu i površinu trokuta. Kroz tri primjera demonstrirat ćemo nekoliko korisnih ideja:

- Ako se pojavljuje sjecište simetrale kuta i nasuprotne stranice, dobro se sjetiti poučka o simetrali kuta.
- Ako imamo neku informaciju o zbroju stranica, nije loše sjetiti se formule $P = rs$ za površinu trokuta.
- Najčešće ćemo površine četverokuta koji nisu trapezi računati tako da ih podijelimo na dva trokuta.
- **metoda površine** – često možemo saznati korisne informacije tako da napišemo površinu lika na dva različita načina, pa ih izjednačimo.
- Tangencijalni četverokut možemo karakterizirati na dva načina, preko zbroja nasuprotnih stranica te kao četverokut kojem se simetrale kutova sijeku u jednoj točki.

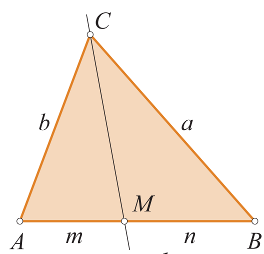
Ovaj članak zasniva se na sadržaju 7. tjedna MetaMath tečaja 2022. Više zadataka, kao i još mnogo korisnih izvora možete pronaći na materijalima s MetaMath tečaja 2022. i 2023. koji se nalaze na Školjci (`www.skoljka.org`).

Korisne činjenice

U mnogim zadatcima promatra se točka u kojoj simetrala kuta siječe njemu nasuprotnu stranicu. Često je ona vrh nekog geometrijskog lika čiju površinu želimo usporediti s površinom trokuta – jedan upravo takav zadatak proučit ćemo u prvom primjeru. Korisno je sjetiti se da ta točka dijeli stranicu upravo u omjeru preostalih dviju, što nam garantira poučak o simetrali kuta.

Poučak o simetrali kuta

Simetrala kuta dijeli njemu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju.



$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$$

Kad nam se upisana kružnica pojavljuje u kombinaciji s četverokutom, zna biti dosta korisno sjetiti se da mu znamo nešto reći o zbroju nasuprotnih stranica. To pogotovo vrijedi ako su nam dane duljine nekih njegovih stranica ili imamo razloga vjerovati da bi neke stranice mogle biti jednake. Nikako ne treba zaboraviti ni da je središte upisane kružnice tangencijalnog četverokuta također sjecište simetrala njegovih kutova.

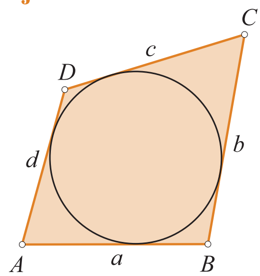
[1] Autorica je studentica na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu;
e-pošta: `nutrobicic.math@pmf.hr`

Tangencijalni četverokut – Pitotov teorem

Četverokut kojem se može upisati kružnica nazivamo **tangencijalan četverokut**.

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako mu je zbroj duljina nasuprotnih stranica jednak. Središte upisane kružnice mu je u sjecištu simetrala kutova.

Mnogi se zadatci mogu riješiti koristeći metodu površine, koja se sastoji od toga da površinu lika napišemo na dva različita načina pa iskoristimo činjenicu da je rezultat u oba slučaja jednak. To posebno vrijedi za zadatke u kojima znamo nešto o radijusu upisane kružnice ili zbroju stranica u trokutu. To je zato što se površina trokuta može prikazati kao umnožak polovine njegovog opsega i duljine radijusa upisane mu kružnice.

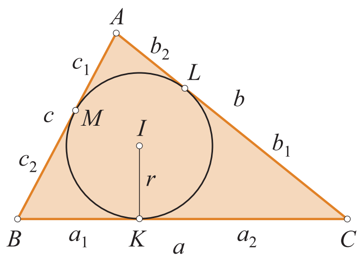


$a + c = b + d$

Površina preko poluopsega i radijusa upisane kružnice

Površinu trokuta možemo izračunati koristeći radijus upisane mu kružnice.

Duljine a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 i c_2 sa slike mogu se izraziti preko stranica trokuta ABC:



$$P = rs, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$a_1 = c_2 = \frac{a+c-b}{2}$$
$$a_2 = b_1 = \frac{a+b-c}{2}$$
$$b_2 = c_1 = \frac{b+c-a}{2}.$$

U zadatcima u kojima znamo sve stranice trokuta, zna biti korisno sjetiti se da mu možamo izračunati površinu koristeći takozvanu Heronovu formulu. Iz nje metodom površine možemo saznati duljine svih visina trokuta, kao i radijus upisane mu kružnice.

Heronova formula – površina preko stranica trokuta

Površinu trokuta možemo izračunati i ako znamo samo duljine stranica trokuta, primjenom Heronove formule:

$$P_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je s poluopseg.

Primjeri

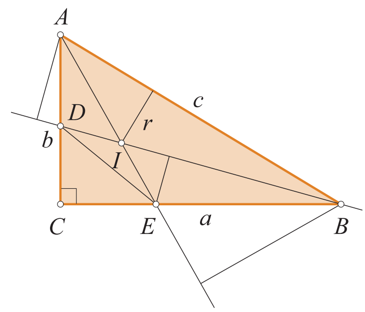
Primjer 1. U pravokutnom trokutu ABC simetrale šiljastih kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ sijeku katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama D i E. Ako se pravci BD i AE sijeku u točki I, dokažite

$$P_{ABED} = 2P_{ABI}.$$

Rješenje.

1. korak. Određujemo duljine $|AD|$, $|CD|$, $|CE|$ *i* $|BE|$ *koristeći poučak o simetrali kuta.*

Čitajući zadatak primjećujemo da se pojavljuju sjecišta simetrala kutova sa stranicama trokuta. Zbog toga znamo da duljine $|AD|$ i $|CD|$ te $|CE|$ i $|BE|$ možemo izraziti preko stranica trokuta koristeći poučak o simetrali kuta. $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ su stranice četverokuta čija nas površina zanima – svakako ih želimo znati.



Sada računamo – ako je BD simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ vrijedi $|AD| : |CD| = c : a$ i $|AD| + |CD| = b$, stoga nije teško riješiti jednadžbu i uvjeriti se da $|AD| = \dfrac{bc}{a+c}$ i $|CD| = \dfrac{ba}{a+c}$. Na isti način zaključujemo i $|CE| = \dfrac{ab}{b+c}$ i $|BE| = \dfrac{ac}{b+c}$.

2. korak. Računamo površinu trokuta ABI.

Kako je I upravo središte upisane kružnice trokuta, visina trokuta ABI iz I je radijus upisane kružnice. Sada nije teško vidjeti da je $P_{ABI} = \frac{1}{2}cr$. To znači da želimo dokazati da je površina četverokuta cr.

3. korak. Prikazujemo površinu četverokuta preko površina trokuta ABC *i* EDC.

Kako je naš četverokut nepravilan, čini nam se da je teško izračunati njegovu površinu. Zbog toga koristimo česti trik – zapisujemo njegovu površinu kao razliku površina trokuta ABC i trokuta EDC. Oba ta trokuta su pravokutna te im znamo stranice, pa neće biti teško dobiti njihove površine.

4. korak. Računamo površine trokuta ABC *i* EDC.

Kako je krajnji cilj dovesti ove površine u vezu s izrazom cr, površinu ABC prikazujemo kao

$$P_{ABC} = \frac{a+b+c}{2}r.$$

Površinu trokuta DCE nije toliko jednostavno dovesti u vezu s radijusom upisane kružnice r, stoga imamo

$$P_{DCE} = \frac{|DC| \cdot |CE|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{ab}{b+c}.$$

5. korak. Dovodimo površinu trokuta DCE *u vezu s* r.

Sada je cilj ipak dovesti površinu trokuta DCE u vezu s r. Da bismo to napravili, prikazujemo r preko stranica trokuta. To neće biti teško jer je ABC pravokutan, stoga mu je površina polovica umnoška kateta, tj.

$$r \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Slijedi $r = \dfrac{ab}{a+b+c}$.

Sada u formulu za površinu trokuta DCE ubacujemo dobiveni r i dobivamo

$$P_{DCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c) \cdot ab}{(a+c)(b+c)} \cdot r.$$

6. korak. Računamo površinu četverokuta:

$$\begin{aligned} P_{ABED} &= P_{ABC} - P_{DCE} \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot \left(1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right) \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot \frac{(a+c)(b+c) - ab}{(a+c)(b+c)} \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot \frac{c \cdot (a+b+c)}{(a+c)(b+c)} \end{aligned}$$

U ovom izrazu sada prepoznajemo cr, odnosno $2P_{ABI}$.

$$P_{ABED} = P_{ABI} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(b+c)}.$$

7. korak. Raspisujemo izraz i pojednostavnjujemo ga koristeći Pitagorin poučak.

Potrebno je dokazati $\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+c)(b+c)} = 2$. Računamo:

$$\begin{aligned} 2(a+c)(b+c) &= 2ab + 2bc + 2ac + 2c^2 \\ &= 2ab + 2bc + 2ac + c^2 + c^2 \\ &= 2ab + 2bc + 2ac + c^2 + a^2 + b^2 \qquad \text{Pitagora} \\ &= (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Stoga je

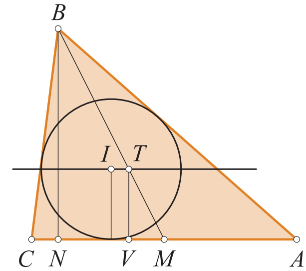
$$P_{ABED} = 2P_{ABI}$$

što je trebalo dokazati.

Primjer 2. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta, paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

Rješenje. Ovo je primjer zadatka kojeg ćemo jednostavno riješiti ako nam "zapne za oko" zgodan poluopseg. Ako zadatak ima veze s upisanom kružnicom i imamo neki uvjet koji čini poluopseg jako jednostavnim, dobro je baciti oko možemo li iz toga izvući nešto korisno.

1. korak. Primjećujemo jednostavan poluopseg i dovodimo ga u vezu s r i v_b.



Na prvi pogled nije najjasnije kako ćemo doći do rješenja, no svakako bi nam bilo korisno znati nešto o radijusu upisane kružnice. Vidimo svoju priliku u uvjetu zadatka – zbog uvjeta $a+c = 2b$ poluopseg je jako jednostavan i jednak $\dfrac{3}{2}b$. Zbog toga ćemo primijeniti metodu površine i dobiti

$$P_{ABC} = \frac{3rb}{2} = \frac{v_b b}{2}.$$

Iz toga jednostavno slijedi $v_b = 3r$, odnosno $r = \frac{1}{3}v_b$.

2. korak. Primjećujemo da trebamo razmatrati visinu iz težišta.

Sada znamo kolika je duljina okomice iz I na pravac AC. Kad bismo dokazali da je i okomica iz T iste duljine, bili bismo gotovi. Naime, tada bi I i T bile točke koje su jednako udaljene od pravca AC i s iste mu strane, stoga bi pravac IT bio paralelan s AC.

3. korak. Primjećujemo sličnost trokuta BNM i TVM.

Povucimo visinu na AC iz T i označimo njeno nožište s V. Primijetimo sada da su trokuti BNM i TVM slični po KK poučku jer im je šiljasti kut u vrhu M zajednički, a oba su pravokutna. Zato $|TV| : |BN| = |TM| : |BM|$.

4. korak. Određujemo koeficijent sličnosti koristeći svojstva težišta.

Sjetimo li se svojstva težišta, shvatit ćemo da znamo da je omjer u kojem ono dijeli težišnicu $2 : 1$ od vrha prema stranici, stoga je koeficijent sličnosti trokuta $|TM| : |BM| = 1 : 3$. Dakle, $|TV| : |BN| = 1 : 3$ iz čega zaključujemo da je $|TV| = \frac{1}{3}v_b$. Stoga smo gotovi.

Primjer 3. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut s pravim kutom u vrhu D čija dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja kut $\sphericalangle ABC$. Ako njegov opseg iznosi 50, a duljina dijagonale $|AC| = 10\sqrt{2}$, izračunajte polumjer upisane mu kružnice.

Rješenje. Za kraj ovog prikaza riješit ćemo zadatak u kojem se pojavljuje tangencijalni četverokut i istaknuti nekoliko bitnih činjenica koje nije loše imati na umu. Za početak, površina tangencijalnog četverokuta se i dalje može prikazati preko poluopsega i radijusa upisane kružnice (dokažite!) te i dalje možemo primijeniti metodu površine. Nadalje, tangencijalni četverokut možemo karakterizirati preko zbroja nasuprotnih stranica (Pitotov teorem), kao i preko činjenice da je to onaj četverokut čije se simetrale kutova sijeku u jednoj točki (središtu njemu upisane kružnice). Obje karakterizacije nam mogu biti itekako korisne u zadatcima.

1. korak. Prikazujemo površinu četverokuta preko radijusa upisane kružnice.

Kako je u zadatku potrebno izračunati radijus upisane kružnice, a znamo koliki je opseg četverokuta, sjetimo se formule za površinu preko radijusa upisane kružnice i poluopsega. Ta formula vrijedi i za četverokute, stoga možemo pisati

$$P_{ABCD} = rs = r \cdot \frac{50}{2} = 25r.$$

Kad bismo znali odrediti površinu četverokuta $ABCD$, bili bismo gotovi. Stoga nam je sada cilj izračunati njegovu površinu.

2. korak. Primjećujemo da je središte upisane kružnice na dijagonali BD.

Kako pravac BD raspolavlja kut $\sphericalangle ABC$, na njemu mora ležati I, središte upisane kružnice ovog tangencijalnog četverokuta. Sada primjećujemo da su DI (pravac na kojem leži simetrala kuta $\sphericalangle ADC$) i BD (pravac na kojem je dijagonala četverokuta) jedan te isti pravac, zbog čega BD raspolavlja i kut $\sphericalangle ADC$.

3. korak. Dokazujemo da su ABD i CBD sukladni trokuti.

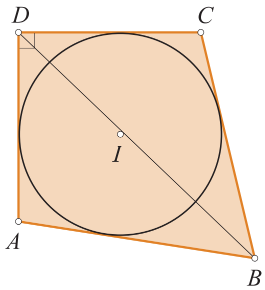
Kako je BD simetrala kutova u B i D, vrijedi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$, te $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$. Kako trokuti ABD i CBD imaju zajedničku stranicu BD, oni su sukladni po poučku KSK.

Iz toga zaključujemo

$$|AB| = |BC| = x$$
$$|AD| = |DC| = y.$$

4. korak. Uočavamo jednakokračan pravokutan trokut te mu računamo stranice.

Promatramo trokut ADC. Iz uvjeta zadatka znamo da je $\sphericalangle ADC = 90°$ te $|AC| = 10\sqrt{2}$, a upravo smo dobili da je $|AD| = |DC| = y$. Sada možemo upotrijebiti Pitagorin poučak i izračunati y:



$$\begin{aligned} y^2 + y^2 &= (10\sqrt{2})^2 \\ 2y^2 &= 200 \\ y^2 &= 100 \\ y &= 10. \end{aligned}$$

5. korak. Računamo preostale stranice četverokuta.

Iz uvjeta da je opseg četverokuta 50 lako možemo izračunati x:

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| + |CD| + |DA| &= 50 \\ x + x + y + y &= 50 \\ x + x + 10 + 10 &= 50 \\ 2x &= 30 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je preostala stranica četverokuta 15.

6. korak. Računamo površinu trokuta ADC.

Sad kad znamo sve stranice i jedan kut ovog četverokuta, spremni smo mu izračunati površinu. Kako četverokut nije trapez, čini nam se najbolje površinu mu prikazati kao zbroj površina dva trokuta.

$$P_{ABCD} = P_{ADC} + P_{ABC}.$$

Kako je trokut ADC jednakokračan pravokutan, lako mu računamo površinu kao polovinu umnoška kateta:

$$P_{ADC} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50.$$

7. korak. Heronovom formulom računamo površinu trokuta ABC.

Trokutu ABC čini se da je teže izračunati površinu, no znamo mu duljine svih stranica, stoga primjenjujemo Heronovu formulu.

Stranice trokuta ABC su 15, 15 i $10\sqrt{2}$, stoga mu je poluopseg $s = \dfrac{15+15+10\sqrt{2}}{2}$ $= 15 + 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ &= \sqrt{(15+5\sqrt{2})\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot(15-5\sqrt{2})} \\ &= 5\sqrt{(15^2-(5\sqrt{2})^2)\cdot 2} = 5\sqrt{7\cdot 25\cdot 2} = 25\sqrt{14}. \end{aligned}$$

8. korak. Računamo r.

Sada računamo površinu četverokuta $P_{ABCD} = 50 + 25\sqrt{14}$, stoga iz

$$25r = 50 + 25\sqrt{14}$$

slijedi $r = 2 + \sqrt{14}$, pa smo gotovi.

Zadatci

1. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu AC u točki D tako da je $|BC| = |BD| + |AD|$. Odredi kutove tog trokuta.
2. Trokutu ABC upisana je kružnica te su na nju položene tangente paralelno stranicama trokuta. Time su od trokuta ABC odsječena tri manja trokuta kojima su polumjeri upisanih kružnica jednaki r_1, r_2, r_3. Ako je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC, dokažite da vrijedi $r_1 + r_2 + r_3 = r$.
3. Kružnica upisana u pravokutni trokut dodiruje hipotenuzu u točki koja ju dijeli na dva dijela duljina m i n. Kolika je površina trokuta?
4. Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose 15 cm i 20 cm, kolika je površina trapeza?
5. Točka S je središte trokutu ABC upisane kružnice, a simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.
6. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC. U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

Izvori

[1] Web arhiva zadataka iz matematike `skoljka.org`

[2] MNM predavanje o upisanim i pripisanim kružnicama
`www.skoljka.org/media/attachment/2/00289_ts61d8p1m44ayjjh0o9a/Zagreb_2021_2022_S12.pdf`

[3] MNM predavanje o površinama
`mnm.hr/wp-content/uploads/2015/10/povrsine_u_geometriji.pdf`