

文章编号: 1001-1595(2007)04-0463-05

中图分类号: P208

文献标识码: A

2 维线元不确定性 ε_0 模型误差带几何特征的代数研究

朱长青^{1,2}, 张国芹³, 史文中⁴

(1. 南京师范大学 虚拟把环境教育部重点实验室, 江苏 南京 210046; 2. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052; 3. 信息工程大学 理学院, 河南 郑州 450001; 4. 香港理工大学 土地测量与地理资讯学系, 香港)

Algebraic Research on Geometrical Characteristic of Error Band for 2D Linear Segment Uncertainty ε_0 Model

ZHU Chang-qing^{1,2}, ZHANG Guo-qin³, SHI Wen-zhong⁴

(1. Ministry of Education Key Laboratory of VGE, Nanjing University, Nanjing 210054; 2. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China; 3. Institute of Science, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China; 4. Department of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

Abstract: The geometrical characteristic of error band for 2D linear segment uncertainty ε_0 model has been studied in this paper. The monotony and extremum theory of function are applied to prove the geometrical characteristic of error band for 2D linear segment uncertainty ε_0 model in theory. The result shows that the error band has the geometrical shape of "larger ends and smaller middle" or "one end larger and the other smaller". The minimum width and its exact position of the error band are calculated too. It is proved that the minimum width position of the error band is near the end with the smaller mean square error. Thus, the paper perfects the 2D linear segment uncertainty ε_0 model in theory and makes it more scientific, and also provides a new way to study the space data uncertainty in GIS.

Key words: GIS; uncertainty; ε_0 model; error band; geometrical characteristic

摘 要: 对地理信息系统(GIS)中 2 维线元不确定性 ε_0 模型的误差带的几何特征进行研究。运用函数单调性和极值理论,从理论上证明 ε_0 模型的误差带的几何特征;得到线元误差带不仅具有“两端大、中间小”,而且也可能具有“一端大、一端小”的几何形状;给出了误差带的最小带宽及其位置;论证了误差带的最小误差带宽的位置靠近中误差较小的一端。本研究完善了 2 维线元不确定性 ε_0 模型,使其更具有严密性,同时为 GIS 空间数据不确定性的研究提供了新的方法。

关键词: GIS; 不确定性; ε_0 模型; 误差带; 几何特征

1 引 言

在 GIS 中,空间数据的质量直接影响到数据的适用性和应用的可靠性。因此,GIS 空间数据质量特别是数据不确定性的研究越来越受到重视^[1,2]。在 GIS 不确定性的研究中,线元的误差带模型是重点之一,其原因不仅是因为线元的位置不确定性的度量尚未得到完全解决,而且线元不确定性也是面元不确定性研究的基础。

GIS 线元的误差带模型已有许多研究。Perkal 建立了 ε 带模型^[3],它是对线元以常数 ε 的缓冲区操作形成的条带。Blakemore 将 ε 带用于描述线元的空间不确定性^[4]。史文中提出两个误差模型用于描述线元之不确定性:①线元的置信域模型,②线元的误差分布模型^[5]。史文中等利用随机过程理论建立了一种描述线元位置不确定性的广义误差带“G-带”^[1],该模型描述了在点误差相关的条件下线元误差模型的特点。刘文

收稿日期: 2006-05-08; 修回日期: 2007-01-29

基金项目: 国家 863 计划项目(2006AA12Z223); 国家自然科学基金项目(40501058)

作者简介: 朱长青(1962),男,江苏阜宁人,教授,博士生导师,主要从事 GIS、空间数据不确定性、空间数据安全遥感图像处理等方面的研究。E-mail: zcq88@263.net

宝等针对“G-带”给出了其边界线几何形状的解析表达^[6],并证明了“G-带”边界线是一条连续闭合曲线。在这些研究中,以线元上任意点在线段垂直方向上的中误差 σ 表示误差带宽的模型得到了深入的扩展和探讨^[1,5,7],该模型在文献^[8]中被称为 ε_0 模型。

对于不确定性模型中误差带的几何特征,已有一些理论讨论及可视化表示^[1,4,6,8],这些结果主要是通过理论证明及实验计算线段上点的方差或误差椭圆得到的,而更加完整的理论证明将是对误差带理论体系的进一步完善。本文基于数学上的函数单调性和极值理论,从理论上研究线元不确定性 ε_0 模型的误差带的几何特征,将几何问题转化为代数问题,从数学上严格分析和论证了误差带的几何形状、最小误差带宽等,得到相应的理论结果,并进行实验研究。

2 ε_0 模型误差带的表达式

本节,将给出线元 ε_0 模型的误差带的表达式,该表达式将用于下节证明误差带的几何特征。

设线段 Z_1Z_2 的端点坐标分别为 $Z_1(x_1, y_1), Z_2(x_2, y_2)$ 它们的方差-协方差阵分别为^[6]

$$D_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1y_1} \\ \sigma_{x_1y_1} & \sigma_{y_1}^2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2y_2} \\ \sigma_{x_2y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1y_2} \\ \sigma_{y_1x_2} & \sigma_{y_1y_2} \end{bmatrix}.$$

设 $Z_i(x_i, y_i)$ 是线段 Z_1Z_2 上任意一点,则 Z_i 和 Z_1, Z_2 有如下关系^[8,9]

$$\left. \begin{aligned} x_i &= (1-r_1)x_1 + r_1x_2 \\ y_i &= (1-r_1)y_1 + r_1y_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, $r_1 = s_{1i}/s_{12}$, s_{1i} 为 Z_i 到端点 Z_1 的距离, s_{12} 为 Z_1Z_2 的长度。显然,有 $0 \leq r_1 \leq 1$ 。

将原坐标系进行旋转,得到新的坐标系 $O-x'y'$,使旋转后的坐标系的 Oy' 轴与线段方向一致,如图 1 所示。

由协方差传播定律,可得在新坐标系 $O-x'y'$ 中的线段端点的方差-协方差阵为(R 为旋转矩阵)

$$D_1' = RD_1R^T \quad D_2' = RD_2R^T \quad D_{12}' = RD_{12}R^T$$

由式(1),利用方差-协方差传播率可求得线段上任意一点 Z_i 在新坐标系中的方差和协方差阵,从而得到该点在垂直线段方向上的方差为

$$\sigma_{x_i'}^2 = (1-r_1)^2 \sigma_{x_1'}^2 + r_1^2 \sigma_{x_2'}^2 + 2r_1(1-r_1) \sigma_{x_1x_2'} \quad (2)$$

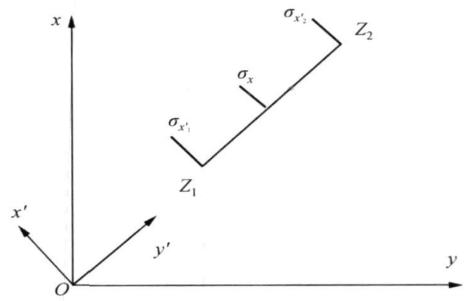


图 1 直线及其坐标系

Fig. 1 The linear segment and coordinate systems

由文献^[8]等可知垂直于线段方向的中误差 $\sigma_{x_i'}$ 即为 2 维线元 ε_0 模型在线段 Z_1Z_2 上的点 Z_i 处的误差带的带宽。由式(2),可以得到 $\sigma_{x_i'}^2$ 的表达式如下

$$\begin{aligned} \sigma_{x_i'}^2 &= (1-r_1)^2 \sigma_{x_1'}^2 + r_1^2 \sigma_{x_2'}^2 + 2r_1(1-r_1) \sigma_{x_1x_2'} \\ &\equiv ar^2 + 2br + c \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_2'}^2 - 2\sigma_{x_1x_2'} & b &= -\sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_1x_2'} \\ c &= \sigma_{x_1'}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

由式(3)可见,在端点误差确定的情况下,线元不确定性的 ε_0 模型在线段任意点处的误差带宽 $\sigma_{x_i'}$ 只与 r_1 有关,因此垂直于线段方向的中误差 $\sigma_{x_i'}$ 是 $r_1(0 \leq r_1 \leq 1)$ 的函数,于是误差带几何特征的研究可以转化为对以 r_1 为变量的函数 $\sigma_{x_i'}$ 的变化趋势的研究,而函数的变化趋势可利用函数的单调性来判断。又因为 $\sigma_{x_i'} > 0$,故 $\sigma_{x_i'}$ 的单调性和 $\sigma_{x_i'}^2$ 的单调性相同。而从式(3)可知, $\sigma_{x_i'}^2$ 的单调性的研究更为方便。因此,下面通过研究 $\sigma_{x_i'}^2$ 的单调性,进而得到 $\sigma_{x_i'}$ 的单调性,最后得到线元 ε_0 模型的误差带的几何特征。

3 基本引理

引理 1: 标准差 σ_x, σ_y 和协方差 σ_{xy} 满足不等式 $\sigma_x \cdot \sigma_y \geq \sigma_{xy}$ 。

证明: 由相关系数的计算公式 $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ 及 $|\rho_{xy}| \leq 1$, 即得 $\sigma_x \cdot \sigma_y \geq \sigma_{xy}$ 。

进一步地, 可以得到

$$\sigma_x^2 \sigma_y^2 \geq \sigma_{xy}^2 \quad (5)$$

引理 2: 对式(3)函数 $\sigma_{x_i}^2$ 的系数 a, b 和 c , 有

$$ac \geq b^2 \quad (6)$$

证明: 从式(4)和式(5), 可以得到

$$ac - b^2 = (\sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_2'}^2 - 2\sigma_{x_1'x_2}') \sigma_{x_1'}^2 - (-\sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_1'x_2}')^2 = \sigma_{x_2'}^2 \sigma_{x_1'}^2 - \sigma_{x_1'x_2}'^2 \geq 0$$

引理 3: 对式(4)中的系数 a , 有 $a \geq 0$ 。

证明: 由柯西-施瓦兹不等式, 得

$$\sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_2'}^2 \geq 2\sigma_{x_1'x_2}'$$

又由引理 1 可得

$$\sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_2'}^2 \geq 2\sigma_{x_1'x_2}' \geq 2\sigma_{x_1'x_2}'$$

于是由式(4)及上式, 就有

$$a = \sigma_{x_1'}^2 + \sigma_{x_2'}^2 - 2\sigma_{x_1'x_2}' \geq 0$$

定理 1: 如果式(3)中的系数 $a = 0$, 则线段 Z_1Z_2 的 ε_0 模型的误差带宽是常数。

由式(6)和式(3)和容易证明这一点。在 $a = 0$ 时线元误差带的形状如图 2 所示。

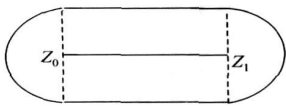


图 2 $a = 0$ 时的误差带

Fig. 2 The error band for $a = 0$

由定理 1 可以看出, $a = 0$ 是一种特殊情况, 因此在下面的研究中总设 $a > 0$ 。

4 ε_0 模型误差带的几何特征

2 维线元 ε_0 模型误差带的几何特征, 可以通过研究式(3)中的关于 r_1 的函数 $\sigma_{x_i}^2$ 的单调性得到。首先将函数 $\sigma_{x_i}^2$ 求导, 得

$$\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dr_1} = 2ar_1 + 2b \quad (7)$$

可以看出式(7)是关于 r_1 的一次函数, 且因为系数 $a > 0$, 故函数 $d\sigma_{x_i}^2/dr_1$ 是单调递增函数。

令 $d\sigma_{x_i}^2/dr_1 = 0$, 可以得到 $d\sigma_{x_i}^2/dr_1$ 的唯一零点

$$r_0 = -b/a \quad (8)$$

函数 $d\sigma_{x_i}^2/dr_1$ 的单调性和零点如图 3 所示。

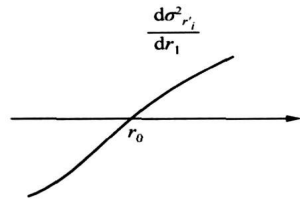


图 3 函数 $\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dr_1}$ 的单调性

Fig. 3 The monotone of $\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dr_1}$

于是, 当 $r_1 \leq r_0$ 时, 有 $\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dr_1} \leq 0$, 于是 $\sigma_{x_i}^2$ 是单调递减的, 从而 σ_{x_i}' 也是单调递减的。同理, 当 $r_1 \geq r_0$ 时, 有 $\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dr_1} \geq 0$, 于是 $\sigma_{x_i}^2$ 是单调递增的, 此时 σ_{x_i}' 也是单调递增的。又由单调性可知, $\sigma_{x_i}^2$ (即 σ_{x_i}') 在 $r_0 = -b/a$ 处得到最小值。于是有如下的定理 2。

定理 2: ① 当 $r_1 \leq r_0$ 时, σ_{x_i}' 单调递减; ② 当 $r_1 \geq r_0$ 时, σ_{x_i}' 单调递增; ③ σ_{x_i}' 在 $r_0 = -b/a$ 处得到最小值。

下面研究 r_0 是否在 $[0, 1]$ 内。

事实上, 若要 $0 \leq r_0 \leq 1$, 即要 $0 \leq \frac{-b}{a} \leq 1$, 即

$$b \leq 0, \quad a + b \geq 0 \quad (9)$$

又由式(4)可得, 需

$$\sigma_{x_1'x_2}' \leq \sigma_{x_1'}^2, \quad \sigma_{x_1'x_2}' \leq \sigma_{x_2'}^2$$

因此, 由上面的推导可得, 若 $\sigma_{x_1'x_2}' < \min\{\sigma_{x_1'}^2, \sigma_{x_2'}^2\}$, 则 $0 < r_0 < 1$ 。

而由式(8), 式(9)和式(4)可知, 当 $\sigma_{x_1'x_2}' \geq \sigma_{x_1'}^2$ 时, 有 $r_0 \leq 0$; 当 $\sigma_{x_1'x_2}' \geq \sigma_{x_2'}^2$ 时, $r_0 \geq 1$ 。

由上面的分析和定理 2 以及线段误差带的几何形状依赖于函数 σ_{x_i}' 的单调性, 就有下面描述线元不确定性 ε_0 模型误差带几何特征的定理 3。

定理 3: ① 线元 ε_0 模型的误差带的宽度在 $r_0 = -b/a$ 处最小, 如图 3 所示。

② 当 $\sigma_{x_1'x_2}' < \min\{\sigma_{x_1'}^2, \sigma_{x_2'}^2\}$, 线元 ε_0 模型的误差带的宽度在 $r_0 = -b/a$ 处获得最小值, 并向两端逐渐增大, 且 $0 < r_0 < 1$ 。此时, 误差带具有“两端大, 中间小”的几何形状, 如图 4 所示。

③当 $\sigma_{x_1'x_2'} \geq \sigma_{x_1}^2$, 线元 ϵ_0 模型的误差带的宽度在线段左端点最小。此时, 误差带具有“左端小, 右端大”的几何形状, 如图 5 所示。

④当 $\sigma_{x_1'x_2'} \geq \sigma_{x_2}^2$, 线元 ϵ_0 模型误差带的宽度在线段右端点最小, 误差带具有“左端大, 右端小”的几何形状, 如图 6 所示。

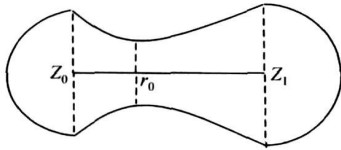


图 4 “两端大, 中间小”的误差带

Fig. 4 The error band with “larger ends and smaller middle”

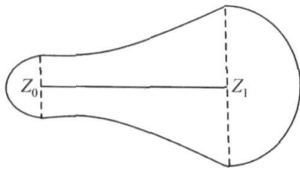


图 5 “左端小, 右端大”的误差带

Fig. 5 The error band with “smaller left end and larger right end”

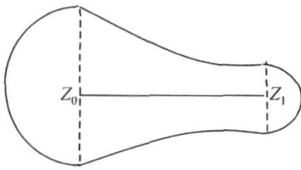


图 6 “左端大, 右端小”的误差带

Fig. 6 The error band with “larger left end and smaller right end”

的 ϵ_0 模型误差带的几何特征进行计算和分析。设线元 1 两端点坐标分别为: $Z_1(250, 280)$, $Z_2(400, 210)$; 线元 2 两端点坐标分别为: $Z_1(500, 400)$, $Z_2(600, 550)$; 线元 3 两端点坐标分别为: $Z_1(500, 100)$, $Z_2(600, 152)$, 单位为米。3 个线元两点间坐标的方差-协方差矩阵分别为

$$\Sigma_{xy1} = \begin{bmatrix} 1.6812 & 0.267 & 0.0267 & 0.0365 \\ 0.267 & 0.6462 & 0.0403 & -0.0654 \\ 0.0267 & 0.0365 & 0.4632 & 0.0825 \\ 0.0365 & -0.0654 & 0.0825 & 0.2323 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{xy2} = \begin{bmatrix} 0.871 & 0.322 & 0.099 & 0.078 \\ 0.322 & 1.090 & -0.034 & -0.067 \\ 0.099 & -0.034 & 1.919 & 0.687 \\ 0.078 & 0.067 & 0.687 & 0.971 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{xy3} = \begin{bmatrix} 1.0245 & -0.181 & 0.0545 & -0.0355 \\ -0.181 & 0.763 & -0.0383 & 0.0677 \\ 0.0545 & -0.0383 & 1.0245 & -0.181 \\ -0.0355 & -0.0654 & -0.181 & 0.763 \end{bmatrix}$$

其中线段 1 右端点精度较高, 线段 2 左端点精度较高, 线段 3 两端点精度相同。表 1 中列出了根据式(1), 式(2), 式(4)和式(9)计算出的 3 条线段的误差带的最小误差带宽及其位置和最小带宽的系数 a, b 的值。

从表 1 可见, 利用式(1), 式(2), 式(4)和式(8), 最小误差带宽 ϵ_0 及其位置 r_0 和 (x_0, y_0) 可以精确得到。这些公式是基于严格的数学证明得到的。而在以前的一些研究中, 最小误差带宽及其位置难以精确得到, 只能用记录线段上一定间隔的点误差的方法计算相应的误差带宽。同时, 由表 1 的计算数据还可看出, 线元误差带的最小误差带宽的位置靠近精度较高的一端, 并逐渐向两端增大。这一结论由下面定理给出。由于证明显然, 故省去。

5 实验与分析

利用上节推导的结论, 本节对 3 个实际线元

表 1 线元误差带最小带宽及其位置

Tab. 1 The minimum width and its position of the linear error band

线元号	a	b	r_0	ϵ_0	x_0	y_0
1	0.9617	-0.6760	0.7029	0.3486	383.5579	329.2052
2	1.4966	-0.5723	0.3824	0.6498	538.2401	457.3601
3	1.7435	-0.8717	0.5	0.7287	550.00	126.00

定理 4: ①如果 $\sigma_{x_1'} < \sigma_{x_2}'$, 则 $r_0 < 1/2$; ②如果 $\sigma_{x_1'} > \sigma_{x_2}'$, 则 $r_0 > 1/2$ 。即线元误差带的最小

误差带宽的位置靠近精度较高的一端。

定理 3 中 ③、④两种情况在实际中比较少见, 在此没有举例。

6 结 论

1. 基于数学上函数单调性、极值和不等式理论, 从理论上严格证明并修正了线元 ϵ_0 模型误差带的几何特征, 在理论上完善了线元不确定性的 ϵ_0 模型, 使其更具有严密性。

2. 精确求出误差带的最小误差带宽及其位置并给出计算公式, 能够定量地表达和计算误差带, 使得 GIS 空间数据的误差分析和可视化图形更为精确可靠, 有利于空间数据误差带的实用化。

3. 证明了最小误差带宽的位置靠近线段端点中误差较小的一端。

4. 将几何问题转化为代数问题, 为 GIS 不确定性的研究特别是误差带的研究提供了新的研究方法和途径。

5. 将线元不确定性 ϵ_0 模型误差带用函数形式表达出来, 有利于进一步研究平面折线元和面元不确定性模型及其可视化模型。

参考文献:

[1] SHI Wen-zhong, LIU Wen-bao. A Stochastic Process-based Model for Positional Error of Line Segments in GIS[J]. Inter-

national Journal of Geographical Information Science, 2000, 14: 51-66.

[2] SHI Wen-zhong, Cheung C K, ZHU Chang-qing. Modeling Error Propagation of Buffer Spatial Analysis in a Vector-based GIS[J]. International Journal of Geographic Information Science, 2003, 17: 251-271.

[3] PERKAL J. On Epsilon Length[J]. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. 1956, 4: 399-403.

[4] BLAKEMORE M. Generalization and Error in Spatial Databases[J]. Cartographica, 1984, 21: 131-139.

[5] SHI Wen-zhong. Modeling Positional and Thematic Uncertainties in Integration of Remote Sensing and Geographic Information System[M]. Enschede: ITC Publication, 1994.

[6] LIU Wen-bao, DAI Hong-lei, et al. The Analytic Expression of Geometric Figure on Planar Lines Error Band[J]. Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 1998, 27: 231-237. (刘元宝, 戴洪磊. 平面线位误差带几何形状的解析表达. 测绘学报, 1998, 27: 231-237.)

[7] CASPARY W, SCHEURING R. Error-band as Measurers of Geographic Accuracy[A]. Processing of EGIS' 92[C]. Munich: Springer Netherlands Press, 1992. 226-233.

[8] LIU Da-jie, SHI Wen-zhong, et al. Accuracy Analysis and Quality Control of Spatial Data in GIS[M]. Shanghai: Shanghai Press of Scientific and Technical Literature, 1999. (刘大杰, 史文中, 童小华, 等. GIS 空间数据的精度分析与质量控制. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999.)

[9] ZHU Chang-qing. Numerical Calculation Method and Its Applications[M]. Beijing: Science Press, 2006. (朱长青. 数值计算方法及其应用. 北京: 科学出版社, 2006.)

(责任编辑: 丛树平)

《2007 年版中国期刊引证报告》发布

中国科学技术信息研究所于 2007 年 11 月 15 日召开了中国科技论文统计结果发布会, 公布了 2006 年中国科技期刊的各项统计数据。以下数据来自《2007 年版中国期刊引证报告(核心版)》。

2006 年测绘学类期刊总被引频次和影响因子排序表

期刊名称	总被引频次			影响因子		
	数值	学科排名	离均差率	数值	学科排名	离均差率
测绘工程	149	9	-0.70	0.234	9	-0.62
测绘科学	468	5	-0.06	0.749	4	0.23
测绘通报	630	3	0.27	0.299	8	-0.51
测绘学报	673	2	0.35	0.789	3	0.29
大地测量与地球动力学	503	4	0.01	0.792	2	0.30
国土资源遥感	425	7	-0.15	0.667	5	0.09
遥感技术与应用	458	6	-0.08	0.436	7	-0.29
遥感信息	285	8	-0.43	0.529	6	-0.13
遥感学报	894	1	0.80	1.005	1	0.64
平均值	498			0.611		