

# 用边长变化结果计算地应变及块体划分<sup>\*</sup>

伍吉仓<sup>1,2)</sup> 邓康伟<sup>1)</sup> 陈永奇<sup>1)</sup>

(1) 香港理工大学土地测量与地理资讯学系, 香港  
(2) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海 200092)

**摘要** 在均匀应变的假设下, 给出了由边长变化求解地应变的新方法, 通过统计检验相邻三角形的最大主应变, 可判别相邻测点是否位于同一个均匀应变块体上。采用弹性位错理论设计的模拟算例表明, 该方法能成功地将位于断层两侧的测量点分辨开。

**关键词** 边长变化 应变 位错模型 块体划分

中图分类号: P227 文献标识码: A

## STRAIN CALCULATION BASED ON BASELINE LENGTH CHANGES AND DIVISION OF TECTONIC BLOCKS

Wu Jicang<sup>1,2)</sup>, Conrad Tang<sup>1)</sup> and Chen Yongqi<sup>1)</sup>

(1) *Dept. of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong*  
(2) *Dept. of Surveying, Tongji University, Shanghai 200092*

**Abstract** In this paper a method is proposed for calculating strains based on baseline length changes. A statistical test of strains of adjacent triangles is formulated to determine whether the adjacent measure points are located on the same tectonic blocks. By using the dislocation model, a simulated example is designed and shows that the proposed method can divide the measure points into different tectonic blocks successfully.

**Key words:** distance changes, strains, dislocation model, division of tectonic blocks

### 1 概述

GPS 监测网已经广泛应用于地壳形变监测。运用 GPS 测量数据来研究地壳形变, 乃至发现地震危险区, 越来越受到人们关注<sup>[1,2]</sup>。通常利用区域大地测量网包括 GPS 网的数据, 可以根据两期测量得到的坐标变化即位移来计算地壳应变<sup>[3]</sup>。一般

来说, 在计算应变前都需要假设涉及计算的测量点属于同一个均匀应变的块体。因此, 划分出哪些测量点属于同一个均匀应变块体就特别有意义。通过正确的块体划分, 可以判别现今活动的断层, 或者发现隐伏断层, 更好地解释地壳运动的动力学机制。本文在分块均匀应变的假设下, 设计了一种直接由基线长度变化求解应变分量和划分不同的均匀应变

\* 收稿日期: 2002-09-05

基金项目: 中国香港特别行政区研究基金委员会资助项目(代码: PolyU 5073/00E)

作者简介: 伍吉仓, 男, 1963年生, 同济大学副教授, 博士, 主要从事大地测量与地球动力学研究, email: lsjcwu@polyu.edu.hk

块体的方法。

下面首先介绍由边长变化求解均匀应变的计算方法和块体划分的统计准则,接着运用断层弹性位错模型模拟地表观测值,并采用本文介绍的方法划分断层两侧的块体。结果表明,该方法成功地将断层(位错)两侧的计算点分别归属于不同的块体。

## 2 基本原理与求解方法

如图 1 所示,在直角坐标系中,  $S$  为变形前的边长,对应的基线向量为  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$ ,其中  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  为基线的坐标增量;  $S'$  为变形后的边长;  $dS, dS'$  分别为沿边长  $S$  和  $S'$  的微元,由弹性力学理论得到<sup>[4]</sup>:

$$dS'^2 - dS^2 = 2E_{KL}(X, t)dX_K dX_L \quad (1)$$

式中  $E_{KL}$  是拉格朗日应变张量。公式两边沿边长  $S$  积分,并且顾及  $E_{KL}$  为常量,得到:

$$S'^2 - S^2 = 2E_{KL} \Delta X_K \Delta X_L \quad (2)$$

顾及

$$\Delta X_1 = \Delta X, \Delta X_2 = \Delta Y, \Delta X_3 = \Delta Z \quad (3)$$

且  $E_{KL}$  为对称张量,(2)式可以展开成:

$$S'^2 - S^2 = 2\Delta X^2 E_{11} + 2\Delta Y^2 E_{22} + 2\Delta Z^2 E_{33} + 4\Delta X \Delta Y E_{12} + 4\Delta X \Delta Z E_{13} + 4\Delta Y \Delta Z E_{23} \quad (4)$$

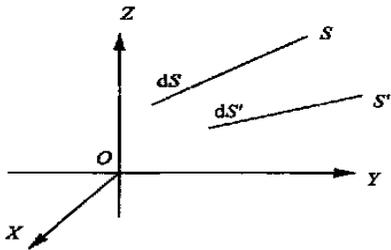


图 1 边长变化示意图

Fig. 1 Change of a distance

进一步假设边长的变化量远小于边长,即:

$$S' - S = \Delta S \ll S, S' + S \approx 2S \quad (5)$$

并且引入边长应变  $\epsilon = \Delta S/S$ , (4)式可改写为:

$$\epsilon = \cos^2 \alpha E_{11} + \cos^2 \beta E_{22} + \cos^2 \gamma E_{33} + 2\cos \alpha \cos \beta E_{12} + 2\cos \alpha \cos \gamma E_{13} + 2\cos \beta \cos \gamma E_{23} \quad (6)$$

这里,  $\alpha, \beta, \gamma$  是边长  $S$  变形前的方向余弦,即:

$$\cos \alpha = \frac{\Delta X}{S}, \cos \beta = \frac{\Delta Y}{S}, \cos \gamma = \frac{\Delta Z}{S} \quad (7)$$

如果仅考虑二维平面应变,(6)式可写成:

$$\epsilon = \cos^2 \alpha E_{11} + \cos^2 \beta E_{22} + 2\cos \alpha \cos \beta E_{12} \quad (8)$$

如果我们引入边长的方位角  $\varphi$  来代替  $\alpha, \beta$ , 则

(8)式可以写成:

$$\epsilon = \sin^2 \varphi E_{11} + \cos^2 \varphi E_{22} + 2\sin \varphi \cos \varphi E_{12} \quad (9)$$

这样对于平面问题,只要通过测量得到了三角形 3 边的边长变化率或称边长应变,就可以通过(9)式唯一地求解地应变分量。通常我们需要计算区域的最大、最小主应变  $E_1, E_2$  和主应变轴方位角  $\varphi_0$ 。为此,将(9)式对  $\varphi$  求导,并且令其等于零,得到最大主应变方向的计算公式:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}} \quad (10)$$

将  $\varphi = \varphi_0$  和  $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$  代入(9)式,即可计算出最大和最小主应变。令:

$$E = (E_{11} \quad E_{22} \quad E_{12})^T \quad (11)$$

$$L = (\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3)^T \quad (12)$$

$$N = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_1 & \cos^2 \varphi_1 & 2\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ \sin^2 \varphi_2 & \cos^2 \varphi_2 & 2\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \\ \sin^2 \varphi_3 & \cos^2 \varphi_3 & 2\sin \varphi_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

这里,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  分别是 3 条边的边长应变,其值通过测量已知;  $N$  中的  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  代表对应三角形 3 条边长的方位角,也已知。3 条边的观测方程式(9)可以写成矩阵形式:

$$L = NE \quad (14)$$

只要三角形的 3 个点不在一条直线上,式(14)一定有唯一解:

$$E = N^{-1}L \quad (15)$$

设边长应变的方差阵为  $\Sigma_L$ , 根据误差传播定律,解得的应变向量  $E$  的方差阵为:

$$\Sigma_E = N^{-1} \Sigma_L (N^{-1})^T \quad (16)$$

如图 2 所示,记相邻的三角形  $i$  和  $j$  解算得到的应变向量记为  $E_i, E_j$ , 对应的方差阵为  $\Sigma_{E_i}, \Sigma_{E_j}$ , 为了检验是否满足均匀应变假设,我们要判断  $E_i, E_j$  是否统计意义上相等。为了简便起见,我们通过计算最大主应变来构造统计量。

将(10)式代入(9)式,即可以计算相邻三角形的最大主应变值,记为  $E_{1i}$  和  $E_{1j}$ 。很显然:

$$E_{1i} = \sin^2 \varphi_{0i} E_{i11} + \cos^2 \varphi_{0i} E_{i22} + 2\sin \varphi_{0i} \cos \varphi_{0i} E_{i12} \quad (17)$$

式中下标  $i$  表示属于第  $i$  个三角形的相关量。根据误差传播定律,忽略  $\varphi_{0i}$  的随机误差特性,参考(6)式,可以计算  $E_{1i}$  和  $E_{1j}$  的方差,记为  $D_{E_{1i}}$  和  $D_{E_{1j}}$ 。令:

$$N_i = [\sin^2 \varphi_{0i} \quad \cos^2 \varphi_{0i} \quad 2\sin \varphi_{0i} \cos \varphi_{0i}]_{1 \times 3} \quad (18)$$

则

$$D_{E_{1i}} = N_i \Sigma_{E_i} N_i^T \quad (19)$$

式中,  $\Sigma_{E_i}$  表示第  $i$  个三角形应变向量的方差阵,参见(16)式。

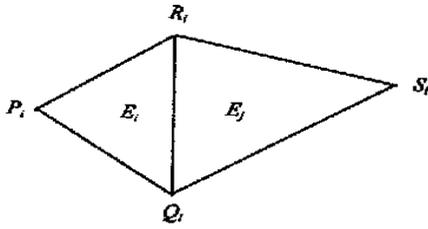


图 2 测边网中相邻的两个三角形

Fig. 2 Two adjacent triangles in trilateration

最小主应变和主应变方位角, 最大主应力均方差以及相邻三角形的统计量  $T$ , 列于表 3 中。

表 1 断层位错模型参数

Tab. 1 Parameters of the fault dislocation model

$a$ (km)	$b$ (km)	$\varphi$ ( $^{\circ}$ )	$L$ (km)	$W$ (km)	$d$ (km)	$\delta$ ( $^{\circ}$ )	$U_1$ (m)
0	0	90	50	10	5	90	1.0

$a, b, \varphi$  表示断层在测量坐标系中的位置,  $L, W, d, \delta$  表示断层的长度、宽度、深度和倾角,  $U_1$  表示位错量。

下面, 通过对相邻的三角形的最大主应力进行统计检验, 判别测点所在的块体。在计算统计量的公式(21)中,  $E_1$  和  $\sigma_E^2$  实际上是不知道的, 我们近似用  $E_{1i}$  和  $D_{Ei}$  来代替, 计算相邻三角形的统计量  $T$ , 列于表 3 的最后一列。假定置信度取  $\alpha=0.05$ , 则对应的  $T_{\alpha/2}=1.96$ 。

表 2 模拟测边网的边长及其应变

Tab. 2 Distances and its change rates of the simulated trilateration

起 点	终 点	原边长 $S$ (km)	边长方位角 $\varphi$ ( $^{\circ}$ )	应变 $\epsilon$ ( $10^{-6}$ )	均方差 $\sigma_{\epsilon}$ ( $10^{-6}$ )
1	2	10.000	90.00	-0.04	0.1
1	4	10.000	0.00	-0.17	0.1
2	3	10.000	0.00	0.01	0.1
2	4	14.142	315.00	-14.82	0.1
3	4	10.000	270.00	-0.11	0.1
3	5	14.142	315.00	48.92	0.1
3	6	10.000	0.00	0.12	0.1
4	5	10.000	0.00	0.00	0.1
5	6	10.000	90.00	0.03	0.1
5	8	10.000	0.00	0.02	0.1
6	7	10.000	0.00	-0.02	0.1
6	8	14.142	315.00	-14.78	0.1
7	8	10.000	270.00	-0.06	0.1

表 3 各个三角形的应变分量

Tab. 3 Strain components of triangles

三角形	最大主 应力 ( $10^{-6}$ )	最小主 应力 ( $10^{-6}$ )	最大主 应力轴 方位角 ( $^{\circ}$ )	最大主 应力均 方差 ( $10^{-6}$ )	统计量 $T$
1, 2, 4	14.61	-14.82	45-06	0.55	
2, 3, 4	14.72	-14.82	44-54	0.55	0.20
3, 4, 5	48.92	-49.03	135-02	0.32	106.88
3, 5, 6	48.92	-48.77	135-01	0.32	0.00
5, 6, 8	14.83	-14.78	45-01	0.55	-61.98
6, 7, 8	14.70	-14.78	44-58	0.56	-0.23

首先我们来检验三角形 1, 2, 4 和 2, 3, 4, 计算得到的统计量  $|T|=0.2 < 1.96$  (表 3)。满足判别式(23), 所以 1, 2, 3, 4 在同一块体上。然后检验三

设原假设为:

$$\begin{cases} H_0: E(E_{1i}) = E(E_{1j}) = E_1 \\ E_{1i}, E_{1j} \sim N(E_1, \sigma_E^2) \end{cases} \quad (20)$$

构造统计量:

$$T = \frac{E_{1j} - E_{1i}}{\sigma_E} \quad (21)$$

如果原假释成立, 则

$$T \sim N(0, 1) \quad (22)$$

采用双尾检验, 取置信度为  $\alpha\%$ , 如果

$$|T| < T_{\alpha/2} \quad (23)$$

则接受原假设(20), 即  $S_j$  和  $P_i, Q_i, R_i$  属于同一个均匀应变块体。否则, 拒绝原假设,  $S_j$  和  $P_i, Q_i, R_i$  不属于相同的均匀应变块体。由此通过计算判别相邻两个三角形的最大主应变, 来达到计算地应变和划分块体之目的。

### 3 算例

弹性位错模型是目前较常用的描述断层物理机制的力学模型, Okada<sup>[5]</sup> 给出了利用位错模型参数计算地表形变的解析公式, 笔者据此编写了相应的 FORTRAN 语言计算程序<sup>[6]</sup>。

如图 3, 假定测边网(点 1~8)横跨断层  $FF'$ , 断层的活动用弹性位错模型来表示, 模型参数列于表 1。首先我们根据表 1 给定的参数计算该网每一条边的边长应变, 并且加入均方差为  $1 \times 10^{-7}$  的正态分布随机误差, 列于表 2 中, 作为后续模拟计算的观测值。然后按前述方法计算每一个三角形的最大、

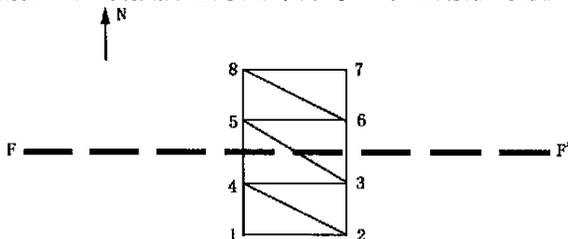


图 3 模拟 GPS 监测网及断层分布

Fig. 3 The distribution of simulated trilateration and fault

角形 2, 3, 4, 和 3, 4, 5, 计算得到的统计量  $|T| = 106.88 > 1.96$ , 不满足判别式 (23), 所以, 点 5 与点 1, 2, 3, 4 不在同一块体上。然后应当检验三角形 5, 6, 8 和 6, 7, 8, 计算得到的统计量  $|T| = 0.23 < 1.96$ , 满足判别式 (23), 所以 5, 6, 7, 8 在同一块体上。综上所述, 点 1, 2, 3, 4 属于一个块体, 点 5, 6, 7, 8 属于另一个块体。这同我们事先假定的断层和测量点的位置情况是一致的, 表明该模拟算例划分块体的计算是成功的。

## 4 结论

本文从均匀应变假设出发, 推导了由三角形 3 条边边长变化求解应变分量的公式, 并且在此基础上推导了检验网中测点是否在同一块体上的统计检验方法。通过对一个简单的跨左旋断层测边网的模拟计算, 表明用本文提出的方法能有效地将断层两侧的测点分辨出来。把本文提出的方法应用于实际 GPS 监测网, 划分现今地壳运动块体, 确定活动断层的运动特征, 尚有待于进一步研究。

## References

- 1 Wu Jicang, Xu Caijun, Chao Dingbo, et al. Research on an intraplate movement model by inversion of GPS data in North China[J]. *J. Geodyn.*, 2001, 31(5): 507–518.
- 2 Wu Yun, Shuai Ping, Zhou Shuoyu, et al. The initial discussion of the crust deformation of China and its adjacent area based on GPS measurements[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 1999, 21(5): 545–553. (in Chinese)
- 3 Huang Liren and Wang Min. The relative movements and strains of tectonic blocks[J]. *Crustal Deformation and Earthquake*, 1999, 19(2): 17–28. (in Chinese)
- 4 Eringen A C. *Mechanics of continua*[M]. John Wiley & Sons Inc., 1980, 15–19.
- 5 Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space[J]. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1985, 75: 1135–1154.
- 6 Wu Jicang and Chen Yongqi. Inversion of model parameters based on a priori information-determination of parameters of Lancang-Genma earthquakes[J]. *Crustal Deformation and Earthquakes*, 1997, 17(2): 27–32. (in Chinese)