JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 6, No. 1, 2024, pp. 42 – 54

p-ISSN: 2685-9653 e-ISSN: 2722-2705
DOI: 10.31605/jomta.v6i1.3353

Perbandingan Metode Muller dan Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi dalam Menyelesaikan Persamaan Polinomial

Try Azisah Nurman [1], Andi Mariani [2], Rahmat Nurhidayat[3*]

[1,2,3] *Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, Gowa 92111, Indonesia*

Corresponding Email: 60600119082@uin-alauddin.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini mengkaji mengenai penyelesaian masalah persamaan polinomial dengan membandingkan Metode Muller dan Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi menggunakan bantuan program Python berdasarkan nilai akar, nilai galat, dan jumlah iterasi. Persamaan polinomial dalam satu variabel ditetapkan sama dengan nol. Persamaan yang digunakan dalam penelitian ini ialah persamaan polinomial berderajat 5 yaitu $f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$, $f(x) = -x^5 + 2{,}2x^4 + 18{,}49x^3 - 29{,}87x^2 - 76{,}5x + 100{,}8$, dan persamaan polinomial berderajat 6 $f(x) = x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 57x^2 + 130x - 150$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Metode Muller memperoleh nilai akar berbentuk real, iterasi yang lebih banyak dan nilai galat yang masih besar. Sedangkan pada Metode *Newton-Rapshon* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi memperoleh nilai akar berbentuk real, iterasi yang lebih sedikit dan nilai galatnya kecil. Dengan demikian, metode terbaik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah persamaan polinomial ialah metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi.

Kata Kunci: *Persamaan Polinomial. Metode Muller, Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi, Program Python.*

Abstract

This research discusses about solving polynomial equations problems by comparing Muller Method and Newton-Raphson Method with the Modified Decomposition Adomian using the help of the Python Program based on root values, error values, and number of iterations. Polynomial equations in one variable are set equal to zero. The equation used in this study is a degree 5 polynomial equation that is $f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$, $f(x) = -x^5 + 2{,}2x^4 + 18{,}49x^3 - 29{,}87x^2 - 76{,}5x + 100{,}8$, *and degree 6 polynomial equation* $f(x) = x^6 + 4x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 57x^2 + 130x - 150$. *The result of this study show that Muller Method obtained real root value, more number of iterations, and the error is still large. Whereas, the Newton-Raphson Method with the Modified Decomposition Adomian obtained real root value, less number of iterations, and the error value is small. Therefore, the best method that can be used in solving polynomial equations is Newton-Raphson Method with the Modified Decomposition Adomian.*

Keywords: *Polynomial Equations, Muller Method, Newton-Raphson Method with Modified Decomposition Adomian, python program.*

Received :16-11-2023, Revised :29-01-2024, Accepted :13-02-2024

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan saat ini membawa banyak pengaruh terhadap perkembangan peradaban. Tidak hanya dalam bidang ekonomi, tetapi juga pada bidang lain salah satunya pada bidang matematika. Saat ini terdapat beberapa permasalahan mengenai cara menyelesaikan berbagai kajian teori. Salah satunya adalah dalam menyelesaikan persamaan polinomial.

Dalam menyelesaikan persamaan polinomial dapat digunakan metode pemfaktoran, grafik, atau melengkapi kuadrat sempurna. Metode-metode tersebut dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan polinomial berderajat rendah. Untuk menyelesaikan persamaan dengan derajat yang lebih tinggi maka metode yang dapat digunakan adalah Metode Numerik. Metode numerik merupakan cara yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persoalan yang secara analitik tidak dapat diselesaikan. Salah satu kajian metode numerik yang dapat digunakan adalah Metode Muller. Metode Muller adalah terusan dari Metode *Secant* [1] yang digunakan untuk mengetahui akar dari persamaan polinomial dengan menggunakan interpolasi kuadrat antara tiga titik dan menggunakan polinomial untuk mendapatkan nilai hampiran dari akar-akar yang akan dicari [2]. Selain Metode Muller, metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial adalah Metode Newton-Raphson.

Metode *Newton-Raphson* (MNR) memiliki kelebihan yakni dapat konvergen lebih cepat dalam menentukan akar persamaan. MNR menggunakan turunan fungsi dalam mencari akar persamaan dan menggunakan satu initial value (perkiraan awal), serta menggunakan iterasi untuk mendapat solusi dari persamaan polinomial. MNR dalam penerapannya dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial tetapi MNR belum terlalu efisien karena nilai galat dan jumlah iterasi yang dihasilkan masih tergolong besar sehingga perlu dilakukan pengembangan metode. Pengembangan yang dilakukan ialah dengan menggunakan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi untuk menghasilkan rumus iterasi baru, sehingga menghasilkan nilai akar persamaan yang mendekati nilai eksak [3].

Metode Muller dapat digunakan untuk mendapatkan hasil iterasi yang lebih sedikit dan mendapatkan jumlah akurasi yang mendekati nilai eksak. Sama seperti Metode Muller, Metode *Newton-Raphson* merupakan metode yang dapat konvergen dengan cepat dan mendapatkan jumlah iterasi yang lebih sedikit, sehingga Metode Muller yang merupakan luasan dari Metode *Secant* dan Metode *Newton-Raphson* dengan modifikasi Dekomposisi Adomian dengan rumus iterasi baru akan dilihat bagaimana tingkat akurasi berdasarkan jumlah iterasi, nilai galat, dan waktu komputasi yang dihasilkan dalam menyelesaikan persamaan polinomial. Persamaan polinomial yang akan digunakan ialah polinomial berderajat 5 dan 6 dengan nilai toleransi 0,000001.

2. Landasan Teori

2.1 Metode Numerik

Metode numerik merupakan teknik yang biasa digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga bisa diselesaikan menggunakanoperasi perhitungan aritmatika biasa [4].

Menganalisis suatu masalah dengan penerapan numerik melalui beberapaiterasi yang cukup panjang. Beberapa masalah matematis sulit untuk dikerjakan secara analitik, sehingga membutuhkan suatu metode secara numerik sebagaibentuk penyelesaian atau solusi dari masalah untuk mengefisienkan waktu, tenaga,maupun biaya.

Kesalahan numerik terjadi karena perkiraan digunakan untuk menentukanoperasi dan kuantitas matematika yang tepat. Termasuk kesalahan pemotongan yang terjadi ketika perkiraan digunakan untuk menyatakan prosedur matematika yang tepat dan kesalahan pembulatan yang terjadi ketika perkiraan digunakan untukmenunjukkan angka yang tepat [5].

2.2 Persamaan Polinomial

Persamaan polinomial diperoleh saat polinomial dalam satu variabel samadengan nol. Bentuk dasar persamaan polinomial ditunjukkan di bawah ini:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

Di mana *a* adalah bilangan riil dan *n* adalah derajat polinomial bilangan positif. Suku-suku dari x diurutkan berdasarkan derajatnya. Jika tidak memiliki suku, maka nilai koefisien suku tersebut adalah nol. Koefisien yang tidak mempunyai faktor umum kecuali a_0 dan ± 1 disebut koefisien utama.

Berikut adalah beberapa contoh polinomial berdasarkan derajat polinomial:

a. polinomial *monoid* yaitu variabel *x* berderajat 1.

$$x_n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad (2)$$

b. Polinomial kuadrat

Polinomial kuadrat adalah polinomial berderajat pangkat dua di mana variabel x berderajat dua contoh:

$$f(x) = x^2 + bx + c = 0 \qquad (3)$$

c. Polinomial Kubik

Polinomial kubik adalah polinomial berderajat tiga di mana variabel *x* berderajat tiga contoh:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (4)$$

d. Polinomial Kuartik

Polinomial kuartik adalah polinomial berderajat empat di mana variabel x berderajat empat contoh :

$$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (5)$$

e. Polinomial berderajat n

Polinomial berderajat n adalah polinomial dengan nilai pangkat tertinggi dari x adalah n. Bentuk polinomial berderajat *n* adalah seperti berikut:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_n = 0 \qquad (6)$$

Persamaan polinomial $f(x) = 0$ mempunyai akar persamaan $r \leftrightarrow f(r) = 0$. Akar persamaan polinomial tersebut berbentuk akar kompleks, irasional dan rasional [6].

2.3 Metode Muller

Metode Muller adalah lanjutan dari metode *secant*, tetapi menggunakan interpolasi kuadrat antara tiga titik, bukan interpolasi linier antara dua titik [7]. Metode Muller menggunakan polinomial dalam mencari perkiraan nilai akar yang akan ditemukan. Polinomial derajat dua digunakan untuk menemukan tiga titik di dekat akar, $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$.

Metode Muller memiliki langkah-langkah yang dimulai dari kuadrat yangmelewati tiga titik dalam bentuk $av^2 + bv + c$. Prosedur ini dapat ditingkatkan dengan mentransformasi sumbu melewati titik tengah (dengan mengganti $v = x - x_0$) [8]. Maka persamaan parabola dapat ditulis seperti berikut:

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \qquad (7)$$

Algoritma Penyelesaian Metode Muller

1. Menetapkan nilai awal x_0, x_1, x_2
2. Menghitung nilai $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$
3. Mencari nilai

   $h_0 = x_1 - x_0$ dan $h_1 = x_2 - x_1$

   $$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

   $$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

4. Menghitung

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{(h_1 + h_0)}$$

$$b = ah_1 + \delta_1$$

$$c = f(x_2)$$

5. $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$

apabila nilai $|b + D| > |b - D|$, digunakan rumus:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + D}$$

dan apabila nilai $|b + D| < |b - D|$, digunakan rumus:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b - D}$$

6. Menghitung nilai galat dengan rumus:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| 100\%$$

Jika $\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1}}{x_{i+1}}\right|$ 100% > nilai toleransi, maka iterasinya diulang. Tetapi, jika $x3$ dan galat (error) telah diperoleh dengan $\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1}}{x_{i+1}}\right|$100% < nilai toleransi, maka iterasi berhenti.

7. Iterasi diulang dengan mengubah nilai x_0 jadi x_1, x_1 jadi x_2, dan x_2 jadi x_3. [9]

2.4 Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi

Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi dapat digunakan untuk mencari akar pesamaan dari persamaan polinomial.

Metode Newton-Raphson kemudian dapat ditulis dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{8}$$

Ini memungkinkan untuk dilanjutkan ke iterasi selanjutanya dan menggunakan ekspansi *taylor* dari $f(x)$ untuk orde yang lebih tinggi.

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + O(h^3)$$

sehingga dapat dilihat h seperti berikut

$$f(x - h) = 0 \approx f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x)$$

diberikan

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{h^2}{2}\frac{f"(x)}{f(x)}$$

atau bisa juga ditulis

$$h = c + N(h) \tag{9}$$

Teknik Dekomposisi Adomian dapat digunakan dengan solusi

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \tag{10}$$

dan fungsi *nonlinear* didekomposisi seperti berikut:

$$N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{11}$$

A_n merupakan polinomial Adomian dari $h_0, h_1, \dots, h_n$ di mana

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^i h_i)]_{\lambda=0},\ n = 0,1,2 \dots \tag{12}$$

Setelah itu persamaan (10) dan (11) di substitusi ke persamaan (9) dihasilkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n = c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{13}$$

Sehingga dihasilkan nilai konvergen

$$h_0 = c,$$

$$h_{n+1} = A_n,\ \ n = 0,1,2, \dots$$

Polinomial A_n dihasilkan untuk semua jenis persamaan polinomial oleh Wazwaz. Beberapa polinomial bisa dilihat dari:

$$A_0 = N(h_0)$$

$$A_1 = h_1 N'(h_0)$$

$$A_2 = h_2 N'(h_0) + \frac{1}{2} h_1^2 N"(h_0)$$

Cara serupa dapat digunakan untuk mendapatkan polynomial

Misalkan :

$$H_i = h_0 + h_1 + \dots + h_i = h_0 + A_1 + \dots + A_{m-1},$$

Karena deret tersebut konvergen dengan cepat, jumlah $h_m = \sum_{a=0}^{m} h_a$ kemudian dapat menjadi solusi praktis pada setiap iterasi.

Untuk $i\ =\ 0$

$$h\ \approx\ H0\ =\ h_0\ =\ c\ = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x =\ x - h \approx\ x - H_0\ =\ x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x_n)}{f'(x)}$$

Untuk $i = 1$

$$h \approx H_1 = h_0 + h_1 = h_0 + A_0$$

$$h_0 = c = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$A_0 = N(h_0) = \frac{h_0^2}{2}\frac{f"(x)}{f'(x)} = \frac{f^2(x)f"(x)}{2f'^3(x)}$$

$$\alpha = x - h \approx x - H_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f"(x)}{2f'^3(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)} - \frac{f^2(x_n)f"(x_n)}{2f'^3(x_n)}$$

Untuk $i = 2$

$h \approx H_1 = h_0 + h_1 + h_2 + A_0 + A_1,$ $\qquad N'(h) = \frac{d}{dh}N(h) = h\frac{f''(x)}{f'(x)}$

$$h_0 = c = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$A_0 = h_1 = \frac{h_0^2}{2}\frac{f"(x)}{f'(x)} = \frac{f^2(x)f"(x)}{2f'^3(x)}$$

$$A_1 = h_1 N'(h_0) = \frac{f^3(x)f"(x)}{2f'^5(x)}$$

$$\alpha = x - h \approx x - H_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f"(x)}{2f'^3(x)} - \frac{f^3(x)f"(x)}{2f'^5(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f"(x_n)}{2f'^3(x_n)} - - \frac{f^3(x_n)f"(x_n)}{2f'^5(x_n)}$$

Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi [10]

Algoritma Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi

a. Menentukan nilai perkiraan awal x_0
b. Mencari nilai $f(x_0)$, $f'(x_0)$ dan $f''(x_0)$
c. Melakukan iterasi untuk menentukan taksiran akar selanjutnya dengan rumus:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f"(x_n)}{2f'^3(x_n)} - - \frac{f^3(x_n)f"(x_n)}{2f'^5(x_n)}$$

d. Iterasi berakhir apabila
   1. Diperoleh nilai $f(x_n) = 0$ atau,
   2. Nilai taksirannya sudah tetap ($x_{n+1} = x_n$) atau,
   3. Jika nilai *error* $>$ nilai toleransi maka iterasi dilanjutkan, jika nilai *error* $<$ nilai toleransi maka iterasi dihentikan. Nilai *error* $x_n \leq$ nilai toleransi yang diminta dengan nilai *error* $\varepsilon_a = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right|$.

3. Metode

3.1 Jenis Penelitian

yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kajian pustaka. Kajian teori membahas mengenai serangkaian konsep, definisi, dan perspektif terhadap suatu hal yang tesusun secara sistematis.

3.2 Sumber Data

Pada penelitian ini, peneliti menggunakan data sekunder. Data penelitian yang digunakan merupakan data yang berasal dari jurnal dan buku.

3.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah:

1. Menyelesaikan persamaan polinomial menggunakan Metode Muller dengan langkah-langkah seperti berikut:
   a. Menentukan nilai perkiraan awal $x0$, $x1$, dan $x2$
   b. Hitung nilai $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$
   c. Hitung nilai h_0, δ_0, δ_1
   d. Menghitung nilai $a, b,$ dan c
   e. Menghitung nilai deskriminan $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$

f. Menghitung galat (error) dengan rumus:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| 100\%$$

Jika nilai galat $<$ toleransi, maka iterasi berhenti. Namun jika galat $<$ toleransi, maka iterasinya dilanjutkan.

g. Iterasi dilanjutkan dengan mengganti nilai x_0 jadi x_1, kemudian x_1 menjadi x_2, dan x_2 menjadi x_3.

2. Menyelesaikan persamaan polinomial menggunakan Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi dengan langkah-langkah seperti berikut:
   a. Menentukan nilai perkiraan awal $x0$
   b. Mencari nilai $f(x0)$, $f'(x0\ )$ dan $f''(x0)$
   c. Melakukan iterasi untuk menentukan taksiran akar selanjutnya dengan rumus:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2f'^3(x_n)} - -\frac{f^3(x_n)f''(x_n)}{2f'^5(x_n)}$$

   d. Iterasi berakhir apabila
      1. Diperoleh nilai $f(xn\ ) = 0$
      2. Nilai taksirannya sudah tetap ($x_n + 1 = x_n$)
      3. Jika nilai *error* $>$ nilai toleransi maka iterasi dilanjutkan, jika nilai *error* $<$ nilai toleransi maka iterasi dihentikan. Nilai *error* $x_n \leq$ nilai toleransi yang diminta dengan nilai *error* $\varepsilon_a = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right|$.
3. Membandingkan Metode Muller dan Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi dalam menyelesaikan persamaan polinomial berdasarkan jumlah iterasi dan nilai galat.

4. Hasil dan Pembahasan

Persamaan polinomial yang digunakan pada penelitian ini merupakan persamaan polinomial berderajat 5 dan 6 menggunakan Metode Muller dan Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi. Adapun studi kasus yang digunakan oleh peneliti ialah:

1. $f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$
2. $f(x) = -x^5 + 2{,}2x^4 + 18{,}49x^3 - 29{,}87x^2 - 76{,}5x + 100{,}8$
3. $f(x) = x^6 + 4x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 57x^2 + 130x - 150$

4.1 Metode Muller

Studi Kasus 1 (Soal diambil dari buku *Numerical Methods in Engineering with Python* 3 pada problem 10-15 no.11 pada halaman 181): hitunglah akar dari persamaan polinomial berderajat 5 dari $f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$ dengan nilai awal $x_0 = -1, x_1 = 0{,}5, x_2 = 1{,}5$ dan nilai toleransi 0,000001.

Penyelesaian

Iterasi 1

a. Menentukan nilai awal $x_0 = -1, x_1 = 0{,}5$, dan $x_2 = 1{,}5$
b. Menghitung nilai $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$. Diperoleh :
   $f(-1) = 0$
   $f(0.5) = -437.34375$
   $f(1.5) = 337.96875$
c. Menghitung nilai h_0, h_1, δ_0, dan δ_1
   $h_0 = x_1 - x_0 = 0.5 - (-1) = 1.5$

$h_1 = x_2 - x_1 = 1.5 - 0.5 = 1$

$\delta_0 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{437{,}34375 - 0}{1.5} = -291{,}5625$

$\delta_1 = \dfrac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \dfrac{337{,}96875 - (-437{,}34375)}{1} = 775{,}3125$

d. Hitung nilai a, b, dan c

$a = \dfrac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \dfrac{775{,}3125 - (-291{,}5625)}{2{,}5} = 426{,}75$

$b = ah_1 + \delta_1 = 426{,}75(1) + 775{,}3125 = 1202{,}0625$

$c = f(x2) = 337{,}96875$

e. Menghitung nilai deskriminan

$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$

$= \sqrt{1202{,}0625^2 - 4(426{,}75)(337{,}96875)}$

$= 931{,}6875$

Kemudian, karena nilai $|1202{,}0625 + 931.6875| > |1202{,}0625 - 931.6875|$ maka rumus yang digunakan ialah:

$x_3 = x_2 + \dfrac{-2c}{b + D}$

$x_3 = 1.5 + \dfrac{-2(337{,}96875)}{1202{,}0625 + 931{,}6875} = 1{,}18322$

f. Menghitung nilai galat

$\varepsilon_a = \left|\dfrac{x_3 - x_2}{x_3}\right| 100\%$

$\varepsilon_a = \left|\dfrac{1{,}18322 - 1{,}5}{1{,}18322}\right| 100\% = 0{,}267727$

Karena, nilai galat 0.267727 > 0,000001 , maka iterasi dilanjutkan dengan mengganti ketiga nilai awal menjadi $x_0 = 0{,}5$, $x_1 = 1{,}5$, dan $x_2 = 1{,}18322$.

.

.

.

Iterasi 5

a. Menentukan nilai awal $x_0 = 0{,}962417, x_1 = 0{,}997487$, dan $x_2 = 1$

b. Menghitung nilai $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$. Diperoleh :

$f(0{,}962417) = -35{,}14704$

$f(0{,}997487) = -2{,}3381$

$f(1) = 0$

c. Menghitung nilai h_0, h_1, δ_0, dan δ_1

$h_0 = x_1 - x_0 = 0{,}997487 - 0{,}962417 = 0{,}03507$

$h_1 = x_2 - x_1 = 1 - 0{,}997487 = 0{,}002513$

$\delta_0 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{-2{,}3381 - (-35{,}14704)}{0{,}03507} = 935{,}52723$

$\delta_1 = \dfrac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \dfrac{0 - (-2{,}3381)}{0{,}002513} = 930{,}40191$

d. Hitung nilai a, b, dan c

$a = \dfrac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \dfrac{930{,}40191 - 935{,}52723}{0{,}037583} = -136{,}37336$

$b = -136{,}37336(0{,}002513) + 930{,}40191 = 930{,}059203$

$c = 0$

e. Menghitung nilai deskriminan

$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$

$= \sqrt{930{,}059203^2 - 4(-136{,}37336)(0)}$

$= 930{,}059203$

Kemudian, karena nilai $|930{,}059203 + 930{,}059203| > |930{,}059203 - 930{,}059203|$ maka rumus yang digunakan ialah:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + D}$$

$$x_3 = 1 + \frac{-2(0)}{930{,}059203 + 930{,}059203} = 1$$

f. Menghitung nilai galat

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| 100\%$$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{1 - 1}{1}\right| 100\% = 0$$

Karena, nilai galat 0 < 0,000001 , maka iterasi dihentikan.

4.2 Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi

Studi Kasus 1 (Soal diambil dari buku *Numerical Methods in Engineering with Python* 3 pada problem 10-15 no.11 pada halaman 181): hitunglah akar dari persamaan polinomial berderajat 5 dari $f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$ dengan nilai awal $x_0 = 0{,}5$ dan nilai toleransi 0,000001.

Iterasi 1

a. Menentukan nilai awal $x_0 = 0{,}5$

b. Menentukan dan Mencari nilai $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$

Menentukan $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$

$$f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$$

$$f'(x) = 5x^4 - 624x^3 - 15x^2 + 1560x + 4$$

$$f''(x) = 20x^3 - 1872x^2 - 30x + 1560$$

Mencari nilai $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$

$$f(0{,}5) = 0{,}5^5 - 156(0{,}5)^4 - 5(0{,}5)^3 + 780(0{,}5)^2 + 4(0{,}5) - 624 = -437{,}34375$$

$$f'(0{,}5) = 5(0{,}5)^4 - 624(0{,}5)^3 - 15(0{,}5)^2 + 1560(0{,}5) + 4 = 702{,}5635$$

$$f''(0{,}5) = 20(0{,}5)^3 - 1872(0{,}5)^2 - 30(0{,}5) + 1560 = 1079{,}5$$

c. Mencari nilai x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2f'^3(x_0)} - \frac{f^3(x_0)f''(x_0)}{2f'^5(x_0)}$$

$$x_1 = 0{,}5 - \frac{-437{,}34375}{702{,}5625} - \frac{(-437{,}34375)^2(1079{,}5)}{2(702{,}5625)^3} - \frac{(-437{,}34375)^3(1079{,}5)^2}{2(702{,}5625)^5}$$

$$x_1 = 1{,}10954$$

d. Menghitung Galat

$n = 1$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right|$$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{1,10954 - 0,5}{1,10954}\right| = 0,549362$$

Karena nilai $f(x_0) \neq 0, x_1 \neq x_0$ dan nilai *error* $0,549362 > 0,000001$ maka iterasi dilanjutkan.

Iterasi 4

a. Menentukan nilai awal $x_3 = 1$
b. Menentukan dan Mencari nilai $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$
Menentukan $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$

$$f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$$

$$f'(x) = 5x^4 - 624x^3 - 15x^2 + 1560x + 4$$

$$f''(x) = 20x^3 - 1872x^2 - 30x + 1560$$

Mencari nilai $f(x), f'(x), dan\ f''(x)$

$$f(1) = (1)^5 - 156(1)^4 - 5(1)^3 + 780(1)^2 + 4(1) - 624 = 0$$

$$f'(1) = 5(1)^4 - 624(1)^3 - 15(1)^2 + 1560(1) + 4 = 930$$

$$f''(1) = 20(1)^3 - 1872(1)^2 - 30(1) + 1560 = -322$$

c. Mencari nilai x_4

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} - \frac{f^2(x_3)f''(x_3)}{2f'^3(x_3)} - \frac{f^3(x_3)f''(x_3)}{2f'^5(x_3)}$$

$$x_4 = 1 - \frac{0}{930} - \frac{(0)^2\,(-322)}{2(930)^3} - \frac{(0)^3(-322)^2}{2(930)^5}$$

$$x_4 = 1$$

d. Menghitung Galat
$n = 1$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right|$$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{1 - 1}{1}\right| = 0$$

Karena nilai nilai *error* $0 < 0,000001$ maka iterasi dihentikan.

4.3 Simulasi Menggunakan Program Python

Tabel 1 Hasil Nilai akar, Jumlah iterasi, dan Nilai Galat Menggunakan Program *Python* pada studi kasus 1

Metode	Studi Kasus 1		
	Jumlah Iterasi	**Nilai Akar**	**Nilai Galat**
Metode Muller	1	1,183216	0,2677311
	2	0,962392	0,2294540
	3	0,997481	0,0351775
	4	1,000012	0,0025314
	5	1	1,20E-05

	6	1	7,50E-10
Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi	1	1,109542	0,549362
	2	1,000863	0,108586
	3	1	0,000862
	4	1	4,28E-10

Tabel 2 Hasil Nilai akar, Jumlah iterasi, dan Nilai Galat Menggunakan Program *Python* pada studi kasus 2.

Metode	**Studi Kasus 2**		
	Jumlah Iterasi	**Nilai Akar**	**Nilai Galat**
Metode Muller	1	1,310226	0,1448408
	2	1,194214	0,0971452
	3	1,200141	0,0049392
	4	1,200182	3,34E-05
	5	1,200182	4,92E-09
Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi	1	1,126578	0.556178
	2	1,200066	0.061236
	3	1,200182	0.000095
	4	1,200182	2,94E-13

Tabel 3 Hasil Nilai akar, Jumlah iterasi, dan Nilai Galat Menggunakan Program *Python* pada studi kasus 3.

Metode	**Studi Kasus 3**		
	Jumlah Iterasi	**Nilai Akar**	**Nilai Galat**
Metode Muller	1	1,094,822	0,3700853
	2	0,999855	0,0949808
	3	1,000,001	0,0001454
	4	1.000000	6,73E-07
Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang dimodifikasi	1	0,974233	0.486775
	2	0,999999	0,025766
	3	1	0.000001
	4	1	0

4.4 Pembahasan

Dari hasil perhitungan diperoleh untuk Metode Muller dengan nilai awal -1, 0.5, dan $0{,}5$ dengan batas nilai toleransi $0{,}000001$. Pada persamaan polinomal berderajat 5 studi kasus 1 diperoleh hasil akar persamaan yakni 1 dengan jumlah iterasi 6 dan nilai galat $7{,}5e - 10$. Untuk studi kasus 2 diperoleh akar persamaan $1{,}200182$ dengan jumlah iterasi 5 dan nilai galat $4{,}915e - 09$. Dari persamaan berderajat 6 didapatkan akar persamaan yaitu 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $6{,}7e - 10$.

Setelah Metode Muller dilakukan perhitungan menggunakan Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi dengan menggunakan nilai awal 0,5 dengan batas toleransi

$0{,}000001$. Pada persamaan polinomial berderajat 5 studi kasus 1 diperoleh hasil akar persamaan yakni 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $4e - 10$. Untuk studi kasus 2 dengan menggunakan nilai awal 0,5 dengan batas nilai toleransi $0{,}000001$ diperoleh hasil akar persamaan yaitu 1.20018152 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $2{,}94e - 15$. Pada studi kasus 3 persamaan berderajat 6 diperoleh akar persamaan 1 dengan jumlah iterasi 5 dan nilai galat 0.

Adapun hasil penelitian menunjukkan bahwa metode yang paling baik digunakan antara Metode Muller dan Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi dalam menyelesaikan persamaan polinomial dalam hal ini polinomial berderajat 5 dan berderajat 6 jika ditinjau dari nilai akar kedua metode tersebut cenderung mendapatkan nilai akar yang sama. Apabila dillihat dari hasil iterasi pada kedua metode di setiap studi kasus, Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi mendapatkan hasil iterasi yang lebih sedikit pada studi kasus pertama, kedua, dan ketiga. Apabila ditinjau dari nilai galat pada studi kasus pertama diperoleh nilai galat yang tidak jauh berbeda diantara kedua metode, tetapi pada studi kasus kedua dan studi kasus ketiga, Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi mendapatkan nilai galat yang lebih kecil daripada Metode Muller. Dengan demikian, pada penelitian ini metode terbaik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan polinomial dalam hal ini persamaan polinomial berderajat 5 dan 6 ialah Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi. Hal tersebut didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Abbasbandy (2003) yaitu *Improving Newton-Raphson Method for Nonlinear Equations by Modified Adomian Decomposition Method*. Penelitian tersebut mendapatkan nilai akar yang lebih mendekati nilai analitik, konvergen dengan cepat dan mendapatkan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan menggunakan Metode *Newton-Raphson* tanpa modifikasi.

5. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan sebelumnya dapat diambil kesimpulan yaitu

1. Pada Metode Muller dengan nilai awal $x_0 = -1, x_1 = 0{,}5$ dan $x_2 = 1{,}5$ dengan nilai toleransi $0{,}000001$. Studi kasus pertama diperoleh nilai akar 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $7{,}5e - 10$. Pada studi kasus 2, diperoleh akar 1,200182 dengan jumlah iterasi 5 dan nilai galat $4{,}9e - 10$. Untuk studi kasus 3, diperoleh nilai akar 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $6{,}7e - 10$.

   Pada Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi dengan nilai awal $x_0 = 0{,}5$ dengan nilai toleransi $0{,}000001$. Studi kasus pertama, diperoleh nilai akar 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat $4e - 10$. Pada studi kasus kedua, diperoleh nilai akar 1,200182 dan nilai galat $2{,}94e - 15$. Studi kasus ketiga, diperoleh nilai akar 1 dengan jumlah iterasi 4 dan nilai galat 0.

2. Jika ditinjau dari hasil iterasi maka Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi mendapatkan hasil iterasi yang lebih sedikit pada studi kasus pertama, studi kasus kedua, dan studi kasus ketiga. Sedangkan apabila dilihat dari nilai galat pada studi kasus pertama diperoleh nilai galat yang sama antar kedua metode, namun pada studi kasus kedua dan ketiga Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi memperoleh nilai galat yang lebih kecil daripada Metode Muller. Sehingga metode terbaik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan polinomial dalam hal ini persamaan polinomial berderajat 5 dan 6 ialah Metode *Newton-Raphson* dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi. Hal tersebut didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Abbasbandy (2003) yaitu *Improving Newton-Raphson Method for Nonlinear Equations by Modified Adomian Decomposition Method*. Penelitian tersebut mendapatkan nilai akar yang lebih mendekati nilai analitik, konvergen dengan cepat dan mendapatkan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan menggunakan Metode *Newton-Raphson* tanpa modifikasi.

Referensi

[1] Ab Rahman, N., Abdullah, L., & Ab Ghani, A. (2016). *Numerical Solution of IT2FPs by Muller's Method*. *Far East Journal of Mathematical Sciences, 100(11)*, 1765.

[2] Tri, Ratna Vulandari. (2017). *Metode Numerik (Teori, Kasus, dan Aplikasinya)*. Surabaya. Mavendra Pers.

[3] Abbasbandy, S. (2003). *Improving Newton-Raphson Method for NonlinearEquations by Modified Adomian Decomposition Method*. *Applied Mathematics and Computation, Vol. 145*, 887-893.

[4] Munir, R. (2013). *Metode Numerik* . Bandung: Informatika.

[5] Chapra, S., & Canale, R. (1991). *Metode Numerik Untuk Teknik dengan Penerapan Pada komputer Pribadi.* Jakarta: UI-Press.

[6] Rahmah, Y., Palgunadi, S., & Suryani, E. (2016). *Development of Calculator for Finding Complex Roots of n-th Degree Polynomials*. *Jurnal Teknologi danInformasi, 5(2)*, 57-66.

[7] Ab Rahman, N., Abdullah, L., & Ab Ghani, A. (2016). *Numerical Solution of IT2FPs by Muller's Method*. *Far East Journal of Mathematical Sciences, 100(11)*, 1765.

[8] Nurman, Try Azisah. (2021). Analisis Perbandingan Metode Muller dan Metode Bierga Vieta dalam Menyelesaikan Persamaan Polinomial. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya, Vol 9 no.1*.

[9] Chapra, S., & Canale, R. (2015). *Numerical Methods for Engineers.* New York: McGraw_HillEducation. hal.183-185

[10] Abbasbandy, S. (2003). *Improving Newton-Raphson Method for NonlinearEquations by Modified Adomian Decomposition Method*. *Applied Mathematics and Computation, Vol. 145*, 887-893.