Confluentes Mathematici, Vol. 2, No. 3 (2010) 333–350

DOI: 10.1142/S179374421000020X

LAPLACIENS DE GRAPHES INFINIS I-GRAPHES MÉTRIQUEMENT COMPLETS

NABILA TORKI-HAMZA

Université du 7 Novembre à Carthage
Faculté des Sciences de Bizerte
Mathématiques et Applications (05/UR/15-02)
7021-Bizerte, Tunisie
and
Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582
BP 74, Université de Grenoble
38402-Saint Martin d'Hères Cedex, France
nabila.torki-hamza@fsb.rnu.tn
torki@fourier.ujf-grenoble.fr

Received 26 June 2010
Revised 15 July 2010

A la mémoire de mon père Pr. Dr. Ing. Bèchir Torki (1931–2009)

We introduce the weighted graph Laplacian $\Delta_{\omega,c}$ and the notion of Schrödinger operator of the form $\Delta_{1,a} + W$ on a locally finite graph G. Concerning essential self-adjointness, we extend Wojciechowski's and Dodziuk's results for graphs with vertex constant weight. The main result in this work states that on any metrically complete weighted graph with bounded degree, the Laplacian $\Delta_{\omega,c}$ is essentially self-adjoint and the same holds for Schrödinger operators provided the associated quadratic form is bounded from below. We construct for the proof a strictly positive and harmonic function which allows us to write any Schrödinger operator $\Delta_{1,a} + W$ as a Laplacian $\Delta_{\omega,c}$ modulo a unitary transform.

On introduit le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ d'un graphe G localement fini pondéré à la fois sur les sommets et sur les arêtes, ainsi que la notion d'opérateur de Schrödinger $\Delta_{1,a}+W$. Pour les graphes à poids constants sur les sommets, on étend un résultat de Wojciechowski pour le Laplacien et un résultat de Dodziuk pour les opérateurs de Schrödinger concernant le caractère essentiellement auto-adjoint. Le résultat principal de ce travail établit que pour les graphes pondérés à valence bornée et métriquement complets, le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ est essentiellement auto-adjoint, et il en va de même pour l'opérateur $\Delta_{1,a} + W$ pourvu que la forme quadratique associée soit minorée. La preuve fait appel à la construction d'une fonction harmonique strictement positive qui permet d'écrire l'opérateur de Schrödinger $\Delta_{1,a} + W$ comme un Laplacien à poids $\Delta_{\omega,c}$ à transformation unitaire près.

Keywords: Graphe infini; Laplacien de graphe pondéré; opérateur de Schrödinger; essentiellement auto-adjoint.

AMS Subject Classification: 05C63, 05C50, 05C12, 35J10, 47B25

1. Introduction

Cet article est le premier d'une série de trois articles (les deux autres sont [5] et [6]) qui sont consacrés à la théorie spectrale des opérateurs de type Laplacien et Schrödinger sur les graphes infinis. Nous étendons au cas des graphes infinis un certain nombre de résultats classiques sur les Laplaciens et opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes non compactes.

Un des résultats principaux de cet article, le Théorème 6.2, est que le Laplacien d'un graphe pondéré à valence bornée métriquement complet est essentiellement auto-adjoint. Le Théorème 1.3.1 de [23] et le Théorème 3.1 de [12] en sont des cas particuliers. La notion de complétude utilisée pour les graphes est relative à une distance fabriquée à l'aide des poids sur les sommets et sur les arêtes.

Dans le deuxième article, nous nous intéresserons au cas des graphes métriquement non complets et donnerons des conditions de croissance du potentiel assurant qu'un opérateur de Schrödinger est essentiellement auto-adjoint. Et le troisième article traite le cas avec champ magnétique.

La recherche de conditions pour qu'un opérateur de Schrödinger soit essentiellement auto-adjoint est un problème classique de la physique mathématique. Beaucoup de travaux sont consacrés à l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$; selon [1], le premier article sur ce sujet est celui de Weyl [21] et les livres [16] contiennent les résultats classiques. Plus tard Gaffney a prouvé dans [9] et [10], voir aussi [3] et [19], que le Laplacien d'une variété Riemannienne complète est essentiellement auto-adjoint. Et dans [15], voir aussi [17] et [18], il est prouvé qu'un opérateur de Schrödinger sur une variété Riemannienne complète est essentiellement auto-adjoint dès que le potentiel vérifie une condition de minoration.

Plusieurs définitions de Laplaciens sur les graphes, analogues à celle du Laplacien de Beltrami des variétés Riemanniennes, ont été proposées telles que les Laplaciens de graphes quantiques (voir [8, 13, 2]) et les Laplaciens combinatoires (voir [4, 23, 11, 12]), ou Laplaciens physiques (voir [22]).

Dans ce travail, un type différent de Laplacien, noté $\Delta_{\omega,c}$, est introduit pour un graphe localement fini pondéré par un poids ω sur les sommets et une conductance c sur les arêtes. Il généralise aussi bien le "Laplacien combinatoire" dans [23] (qui n'est autre que $\Delta_{1,1}$) que le "graph Laplacian" dans [12] (qui est $\Delta_{1,c}$). Cette notion a été déjà introduite dans le cas des graphes finis, voir [4] et [20].

Nous donnons dans la Sec. 2 certaines propriétés immédiates du Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ et nous montrons qu'il est unitairement équivalent, par une transformation diagonale, à un opérateur de Schrödinger de la forme $\Delta_{1,a} + W$.

Dans la Sec. 3, en s'inspirant de la méthode de [23], nous démontrons que, si le poids ω est constant, l'opérateur $\Delta_{\omega,c}$ est essentiellement auto-adjoint. La méthode utilisée permet aussi de prouver que si un potentiel minoré W lui est ajouté il reste essentiellement auto-adjoint.

La Sec. 4 est une partie consacrée à la construction d'une fonction Φ strictement positive et harmonique pour un opérateur de Schrödinger positif. Cette construction fait appel à l'inégalité de Harnak locale, à la résolution d'un problème de Dirichlet et au principe du minimum pour les graphes. Une telle fonction Φ est utilisée dans la Sec. 5 pour montrer le résultat important que *tout opérateur de Schrödinger positif est unitairement équivalent à un Laplacien.* Nous considérons, dans la Sec. 6, le cas des graphes à valence bornée. Pour un opérateur de Schrödinger donné $\Delta_{1,a} + W$, nous introduisons une distance δ_a sur le graphe, et nous montrons que *si le graphe est complet pour cette distance et si la forme quadratique associée à cet opérateur est bornée inférieurement, l'opérateur de Schrödinger* $\Delta_{1,a} + W$ *est essentiellement auto-adjoint.* Ce résultat n'est pas un cas particulier de celui du Théorème 3.2, nous étudions un contre-exemple pour cela. On déduit aussi, dans cette section, un résultat analogue pour le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$, il s'agit du résultat principal de cet article qui est une généralisation du théorème de Gaffney au cas des graphes métriquement complets.

2. Préliminaires

Soit G un graphe connexe, infini et localement fini. Nous désignons par V l'ensemble de ses sommets et par E celui de ses arêtes. Pour deux sommets x et y de V, nous notons $x \sim y$ s'ils sont reliés par une arête qui sera désignée par $\{x, y\} \in E$. Lorsque dans certains calculs, le graphe G est supposé orienté, nous notons $[x, y]$ l'arête d'origine x et d'extrémité y, et nous désignons par $\overline{E}$ l'ensemble des arêtes orientées. Il est à signaler qu'aucun résultat ne dépend de l'orientation.

L'ensemble des fonctions sur V est noté par

$$C(V) = \{f :\ V \to \mathbb{R}\}$$

et celui des fonctions à support fini par $C_0(V)$. Soit $\omega :\ V \to \mathbb{R}_+^\star$ une fonction *poids* sur les sommets, considérons l'ensemble

$$l^2_\omega(V) = \left\{ f :\ V \to \mathbb{R}; \sum_{x \in V} \omega_x^2 |f(x)|^2 < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

L'espace $l^2_\omega(V)$ muni du produit scalaire donné par:

$$\langle f, g \rangle_{l^2_\omega} = \sum_{x \in V} \omega_x^2 f(x) \cdot g(x) \tag{2.2}$$

est un espace de Hilbert isomorphe à

$$l^2(V) = \left\{ f : V \to \mathbb{R}; \sum_{x \in V} |f(x)|^2 < \infty \right\}$$

par la transformation unitaire

$$U_\omega : l^2_\omega(V) \to l^2(V)$$

définie par

$$U_\omega(f) = \omega f. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1. Si le poids ω est constant égal à $\omega_0 > 0$ alors

$$l^2_{\omega_0}(V) = l^2(V).$$

Définition 2.1. Le *Laplacien du graphe G pondéré* par un *poids* $\omega : V \to \mathbb{R}^\star_+$ sur les sommets et une *conductance* $c : E \to \mathbb{R}^\star_+$ sur les arêtes, est l'opérateur sur $l^2_\omega(V)$, qu'on note $\Delta_{\omega,c}$, donné par:

$$(\Delta_{\omega,c} f)(x) = \frac{1}{\omega_x^2} \sum_{x \sim y} c_{\{x,y\}}(f(x) - f(y)) \tag{2.4}$$

pour tout $f \in l^2_\omega(V)$ et pour tout sommet x de V.

Remarque 2.2. Voici quelques propriétés simples de ces Laplaciens dont certaines sont inspirées de [4] et [7]:

(1) L'opérateur $\Delta_{\omega,c}$ est symétrique sur $l^2_\omega(V)$ avec domaine $C_0(V)$; la forme quadratique associée

$$Q_c(f) = \sum_{\{x,y\} \in E} c_{\{x,y\}}(f(x) - f(y))^2$$

est positive.

(2) L'opérateur $\Delta_{\omega,c}$ s'annule pour les fonctions constantes, dès que le poids ω appartient à $l^2(V)$.

(3) Le graphe G étant localement fini, cet opérateur est bien défini sur $C_0(V)$, car les sommes qui interviennent sont finies.

(4) C'est un opérateur local, au sens que $(\Delta_{\omega,c} f)(x)$ ne dépend que des valeurs de f aux sommets voisins de x. On peut ainsi considérer le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ comme un opérateur différentiel sur le graphe G.

(5) Cet opérateur est elliptique, puisque pour chaque arête $\{x, y\}$ de G, le coefficient $c_{\{x,y\}}$ n'est pas nul.

(6) La fonction c ne dépend pas de l'orientation de l'arête, et on a: $c_{\{x,y\}} = c_{\{y,x\}}$, pour tous sommets voisins x et y.

Pour se ramener au même espace de fonctions $l^2(V)$, nous utilisons la transformation unitaire U_ω. Et plus précisément, la Proposition 2.1, affirme que $\Delta_{\omega,c}$ est unitairement équivalent à un opérateur de Schrödinger sur le graphe G dont ci-dessous la définition.

Définition 2.2. Un *opérateur de Schrödinger sur le graphe G* est un opérateur de la forme $\Delta_{1,a} + W$ opérant sur $l^2(V)$, où le potentiel W est une fonction réelle sur V et la conductance a est une fonction strictement positive sur E.

Proposition 2.1. *Si*

$$\widehat{\Delta} = U_\omega \Delta_{\omega,c} U_\omega^{-1},$$

alors $\widehat{\Delta}$ *est un opérateur de Schrödinger de G et on a plus précisément*

$$\widehat{\Delta} = \Delta_{1,a} + W$$

où a est la fonction strictement positive sur E donnée par:

$$a_{\{x,y\}} = \frac{c_{\{x,y\}}}{\omega_x \omega_y} \tag{2.5}$$

et le potentiel $W : V \to \mathbb{R}$ est donné par:

$$W = -\frac{1}{\omega}\Delta_{1,a}\omega. \tag{2.6}$$

Preuve. Pour $g \in C_0(V)$, calculons $(\widehat{\Delta}g)(x)$.

$$\begin{aligned}
(\widehat{\Delta}g)(x) &= \omega_x(\Delta_{\omega,c}U_\omega{}^{-1}g)(x) \\
&= \frac{1}{\omega_x}\sum_{y\sim x} c_{\{x,y\}}\left(\frac{g(x)}{\omega_x} - \frac{g(y)}{\omega_y}\right) \\
&= \sum_{y\sim x}\frac{c_{\{x,y\}}}{\omega_x\omega_y}(g(x)-g(y)) + g(x)\frac{1}{\omega_x}\sum_{y\sim x} c_{\{x,y\}}\left(\frac{1}{\omega_x} - \frac{1}{\omega_y}\right) \\
&= (\Delta_{1,a}g)(x) + W(x)g(x),
\end{aligned}$$

où $\Delta_{1,a}$ désigne le Laplacien sur G pondéré par la fonction constante $\omega \equiv 1$ sur V et par la fonction strictement positive a sur E donnée par:

$$a_{\{x,y\}} = \frac{c_{\{x,y\}}}{\omega_x \omega_y}$$

et où le potentiel $W : V \to \mathbb{R}$ est défini par:

$$W(x) = \frac{1}{\omega_x}\sum_{y\sim x} c_{\{x,y\}}\left(\frac{1}{\omega_x} - \frac{1}{\omega_y}\right) = -\frac{1}{\omega_x}(\Delta_{1,a}\omega)(x). \qquad \square$$

Remarque 2.3. Dans le Lemme 2.1, il est possible d'obtenir la fonction W strictement négative alors que le Laplacien est positif.

Prenons par exemple le graphe G avec $V = \mathbb{N}^\star$ et $n \sim n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et supposons que G soit pondéré par le poids $\omega_n = \frac{1}{n}$ sur les sommets et par la conductance $c_{\{n,n+1\}} = (n+1)^2$ sur les arêtes. Nous obtenons alors $W(n) = -n(2n+1) < 0$.

3. Extension des Résultats de Wojciechowski et Dodziuk

Nos deux premiers théorèmes sont des extensions de résultats de J. Dodziuk et R. K. Wojciechowski concernant la propriété d'être essentiellement auto-adjoint. Rappelons d'abord cette définition.

Définition 3.1. Un opérateur linéaire symétrique non borné dans un espace de Hilbert est dit *essentiellement auto-adjoint* s'il possède une unique extension auto-adjointe.

Pour démontrer cette propriété d'être essentiellement auto-adjoint, nous utiliserons le critère très pratique suivant, extrait du Théorème X.26 dans [16].

Critére 3.1. *L'opérateur symétrique défini positif* $\Delta : C_0(V) \to l^2(V)$ *est essentiellement auto-adjoint si et seulement si* $Ker(\Delta^\star + 1) = \{0\}$.

De la définition de l'adjoint $\Delta^\star$ d'un opérateur $\Delta : C_0(V) \to l^2(V)$, nous pouvons déduire que:

$$Dom(\Delta^\star) = \{f \in l^2(V); \Delta f \in l^2(V)\}. \tag{3.1}$$

Nous allons alors montrer, en utilisant une idée dans la preuve du Théorème 1.3.1 de [23], le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Si le poids* ω *est constant sur* V *alors pour toute conductance* c *sur* E, *le Laplacien* $\Delta_{\omega,c}$, *avec comme domaine* $C_0(V)$, *est essentiellement auto-adjoint.*

Preuve. Soit ω_0 un réel strictement positif, et $\omega \equiv \omega_0$ sur V. Considérons g une fonction sur V vérifiant:

$$\Delta_{\omega_0,c}\, g + g = 0.$$

Supposons qu'il existe x_0 dans V tel que $g(x_0) > 0$. L'égalité

$$\Delta_{\omega_0,c}\ g(x_0) + g(x_0) = 0$$

entraine

$$\frac{1}{\omega_0^2} \sum_{y \sim x_0} c_{\{x_0,y\}}(g(x_0) - g(y)) + g(x_0) = 0.$$

Donc il existe au moins un sommet x_1 pour lequel $g(x_0) < g(x_1)$, puisque $\omega_0 > 0$ et $c_{\{x,y\}} > 0$ pour tout $\{x, y\} \in E$. On réitère ensuite avec $x_1 \ldots$. On construit ainsi une suite strictement croissante de réels strictement positifs $(g(x_n))_n$. Ce qui entraine que la fonction g n'est pas dans $l^2(V)$.

Un même raisonnement est utilisé en supposant $g(x_0) < 0$. □

Remarque 3.1. Le Théorème 1.3.1 dans [23] concerne le cas du Laplacien $\Delta_{1,1}$, donc c'est un cas particulier du Théorème 3.1.

Nous pouvons, avec un raisonnement analogue, démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.2. Si $W : V \to \mathbb{R}$ *est un potentiel minoré et si* ω_0 *est un poids constant sur* V, *alors pour toute conductance* $c : E \to \mathbb{R}_+$, *l'opérateur de Schrödinger* $\Delta_{\omega_0,c} + W$, *avec pour domaine* $C_0(V)$, *est essentiellement auto-adjoint.*

Preuve. Soit κ un réel minorant le potentiel W. On procède comme dans la preuve du Théorème 3.1, en considérant une fonction g sur V vérifiant:

$$\Delta_{\omega_0,c}\ g + Wg + \kappa_1\ g = 0,$$

avec $\kappa + \kappa_1 \geq 1$. □

Remarque 3.2. J. Dodziuk affirme par le Théorème 1.2, dans [7], que l'opérateur $A + W$ est essentiellement auto-adjoint si A est un opérateur symétrique positif borné sur $l^2(V)$ et si le potentiel W est minoré.

Dans le Théorème 3.2, l'opérateur A est noté $\Delta_{1,c}$ et nous pouvons conclure que ce théorème est plus général que celui de Dodziuk, puisque l'opérateur de Schrödinger $\Delta_{1,c} + W$ est essentiellement auto-adjoint si W est minoré, même si l'opérateur $A = \Delta_{1,c}$ n'est pas borné sur $l^2(V)$, en prenant par exemple le graphe G localement fini à valence non bornée et $c \equiv 1$.

4. Construction d'une Fonction Harmonique sur les Sommets

Nous allons construire une fonction Φ strictement positive et harmonique sur les sommets qui sera utile dans la Sec. 5.

Théorème 4.1. *Soit P un opérateur de Schrödinger sur le graphe G tel que pour tout $f \in C_0(V)\backslash\{0\}$,*

$$\langle Pf, f\rangle_{l^2} > 0. \tag{4.1}$$

Alors il existe une fonction Φ strictement positive et P-harmonique sur V.

La preuve du Théorème 4.1 s'appuie sur le Lemme 4.1 qui donne l'inégalité de Harnack locale pour les graphes. Nous présentons d'abord les définitions suivantes:

Définition 4.1. Un *sous-graphe* G' de G est un graphe dont l'ensemble des sommets est inclus dans V et celui des arêtes est un sous-ensemble de E.

Définition 4.2. Pour un sous-graphe G' de G dont l'ensemble des sommets est K, on confond G' et K, et on définit:

– l'*intérieur* de K qu'on note $\overset{\circ}{K}$

$$\overset{\circ}{K} = \{x \in K; y \sim x \Rightarrow y \in K\} \tag{4.2}$$

– le *bord* de K qu'on note ∂K

$$\partial K = K\backslash \overset{\circ}{K} = \{x \in K; \exists y \in V\backslash K, y \sim x\} \tag{4.3}$$

– K est *connexe* si et seulement si pour tous sommets x et y de K il existe

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que

$$x_i \in K, \quad x_1 = x, \quad x_n = y, \quad \{x_i, x_{i+1}\} \in E(G')$$

pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Lemme 4.1. *Soit P un opérateur de Schrödinger sur le graphe G. Alors pour tout sous-graphe G' de G dont l'ensemble K des sommets soit d'intérieur fini connexe, il existe une constante $k > 0$ telle que, pour toute fonction $\varphi : V \to \mathbb{R}$ strictement positive sur K et vérifiant*

$$(P\varphi) \restriction \overset{\circ}{K} \equiv 0,$$

on a:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq k \tag{4.4}$$

pour tous $x, y \in \overset{\circ}{K}$.

La résolution du problème de Dirichlet fournie par le Lemme 4.2 suivant, est aussi utile pour la preuve du Théorème 4.1.

Lemme 4.2. *Soient P un opérateur de Schrödinger sur le graphe G tel que pour tout $f \in C_0(V)\backslash\{0\}$ on ait*

$$\langle Pf, f\rangle_{l^2} > 0.$$

Alors pour tout sous-graphe G' de G dont l'ensemble K des sommets soit d'intérieur connexe fini et pour toute fonction $u : \partial K \to \mathbb{R}$, il existe une fonction unique f sur K vérifiant les deux conditions suivantes:

(i) $(Pf) \upharpoonright \overset{\circ}{K} \equiv 0$.
(ii) $f \upharpoonright \partial K \equiv u$.

De plus, si u est positive et non identiquement nulle, alors f est strictement positive dans $\overset{\circ}{K}$.

Afin de prouver la stricte positivité dans le Lemme 4.2, nous allons utiliser le "principe du minimum" pour les graphes, donné par le Lemme 4.3 dans [7].

Lemme 4.3. *Soit $P = \Delta_{1,a} + W$ un opérateur de Schrödinger sur le graphe G, avec $W > 0$, et soit G' un sous-graphe de G dont l'ensemble K des sommets soit fini et d'intérieur connexe. On suppose qu'il existe une fonction f telle que*

$$\langle Pf, f\rangle_{l^2} \geq 0$$

à l'intérieur de K et qu'il existe un sommet intérieur x_0 tel que $f(x_0)$ soit minimum et négatif.

Alors f est constante sur K.

Preuve du Lemme 4.2. Nous allons procéder par étapes.

– Pour l'unicité, nous supposons l'existence de deux fonctions f et g à supports finis dans K vérifiant les deux conditions du théorème, alors il s'ensuit que $P(f-g) \upharpoonright \overset{\circ}{K} \equiv 0$, et que $(f-g) \upharpoonright \partial K \equiv 0$. Ce qui entraine que

$$\langle P(f-g), f-g\rangle_{l^2} = 0.$$

On en déduit, par l'hypothèse faite sur P que $(f-g)$ est identiquement nulle, d'où l'unicité.
– L'unicité implique l'existence car l'espace des fonctions sur K est de dimension finie.
– Pour la stricte positivité, nous prenons u positive et non identiquement nulle et nous raisonnons par l'absurde pour montrer que f est strictement positive à l'intérieur de K. Supposons qu'il existe un sommet dans $\overset{\circ}{K}$ dont l'image par f est négative. Considérons alors un sommet x_0 réalisant le minimum de f sur $\overset{\circ}{K}$ qui est fini et connexe. Nous avons ainsi $f(x_0) \leq 0$ et Pf nulle sur $\overset{\circ}{K}$. Et

d'après le lemme 4.1, l'application f est constante négative sur K. Ce qui est impossible, vu que $f \restriction \partial K \equiv u$ et que la fonction u a été supposé positive et non identiquement nulle. D'où f est strictement positive sur K. $\square$

La preuve de l'inégalité de Harnak est inspirée des démonstrations du Lemme 1.6 et du Corollaire 2.3 dans [7], en remarquant que la constante k trouvée ne dépend pas de la fonction φ.

Preuve du Lemme 4.1. Considérons un sous-graphe K fini d'intérieur connexe, et une fonction $\varphi : V \to \mathbb{R}$ strictement positive sur l'ensemble des sommets de K et P-harmonique sur l'ensemble des sommets de $\overset{\circ}{K}$. Soient x et y deux sommets de $\overset{\circ}{K}$.

(i) Supposons d'abord que $\{x, y\}$ est une arête.

Comme

$$(P\varphi)(x) = 0,$$

c'est à dire que

$$\sum_{z \sim x} a_{\{x,z\}} \left[\varphi(x) - \varphi(z)\right] + W(x)\varphi(x) = 0, \tag{4.5}$$

alors

$$\left(\sum_{z \sim x} a_{\{x,z\}}\right) \varphi(x) + W(x)\varphi(x) = \sum_{z \sim x} a_{\{x,z\}}\varphi(z).$$

Nous obtenons, par la positivité de la fonction φ et de la conductance a, l'inégalité suivante:

$$\left[W(x) + \sum_{z \sim x} a_{\{x,z\}}\right] \varphi(x) \geq a_{\{x,y\}}\varphi(y).$$

On note: $\alpha = \min\{a_{\{r,s\}}; r, s \in K, r \sim s\}$ et

$$A = \sum_{r,s \in K, r \sim s} a_{\{r,s\}}.$$

Comme K est fini, on a: $\alpha > 0$ et $A < \infty$. D'où en notant:

$$k_0 = \frac{\max(0, \max_K W) + A}{\alpha},$$

on a: $k_0 > 0$, et on obtient:

$$\frac{1}{k_0} \leq \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq k_0.$$

(ii) Maintenant si les sommets x et y ne sont pas reliés par une arête, par la connexité de $\overset{\circ}{K}$, il existe un chemin de sommets consécutifs: $x_1 = x, x_2, x_3, \dots,$ $x_d = y$ reliant x à y dans $\overset{\circ}{K}$. Nous avons alors:

$$\frac{1}{k_0} \leq \frac{\varphi(x_i)}{\varphi(x_{i+1})} \leq k_0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d-1,$$

et par suite, en prenant $k = k_0^d$, Nous obtenons

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq k. \qquad \square$$

Preuve du Théorème 4.1. Supposons que $\langle Pf, f\rangle > 0$ pour toute fonction $f \in C_0(V)\backslash\{0\}$. Soit x_0 un sommet fixé de V, pris comme "origine". Considérons pour $n \geq 1$, le sous-graphe G_n issu de G, dont l'ensemble des sommets est la boule de centre x_0 et de rayon n, que nous noterons $\mathcal{B}_n$,

$$\mathcal{B}_n = \{x \in V; d(x_0, x) \leq n\}$$

où $d(x, y)$ est la distance combinatoire entre deux sommets x et y de V, qui est le nombre d'arêtes du plus court chemin d'arêtes reliant x à y. La boule $\mathcal{B}_n$ est connexe et on applique le Lemme 4.2, en la prenant pour K, et en choisissant pour fonction u la fonction constante égale à 1 sur $\partial\mathcal{B}_n$.
Nous allons procéder en trois étapes:
1ère étape: Il existe une fonction $\psi_n \in C_0(V)$ vérifiant $P\psi_n \equiv 0$, et telle que $\psi_n > 0$ à l'intérieur de $\mathcal{B}_n$ et constante égale à 1 sur $\partial\mathcal{B}_n$. On considère alors la fonction $\Phi_n \in C_0(V)$ définie par:

$$\Phi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(x_0)}.$$

Elle vérifie les quatre conditions suivantes:

(i) $\Phi_n(x_0) = 1$.
(ii) $P\Phi_n \equiv 0$ à l'intérieur de $\mathcal{B}_n$.
(iii) $\Phi_n \restriction \partial\mathcal{B}_n \equiv \frac{1}{\psi_n(x_0)}$ constante strictement positive.
(iv) $\Phi_n > 0$ sur $\mathcal{B}_n$.

2ème étape: Soit x un sommet de V, on fixe n_0 tel que x soit à l'intérieur de $\mathcal{B}_{n_0}$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a: $\mathcal{B}_{n_0} \subseteq \mathcal{B}_n$. De plus Φ_n est strictement positive sur $\mathcal{B}_{n_0}$ et est P-harmonique à l'intérieur de $\mathcal{B}_{n_0}$. Donc d'après le Lemme 4.1, il existe une constante $k_{n_0} > 0$ tel que l'on ait:

$$\frac{1}{k_{n_0}} \leq \frac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(x_0)} \leq k_{n_0}.$$

Et comme $\Phi_n(x_0) = 1$, on obtient:

$$\frac{1}{k_{n_0}} \leq \Phi_n(x) \leq k_{n_0}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble $\{\Phi_n(x)\}_{n\geq n_0}$ est inclus dans le segment $[\frac{1}{k_{n_0}}, k_{n_0}]$.
3ème étape: On considère dans $\mathbb{R}^V$ le sous-ensemble

$$C = \prod_{x\in V}\left[\frac{1}{k_{n_0}}, k_{n_0}\right].$$

Comme la suite $(\Phi_n)_{n\geq n_0}$ est une suite du compact C, elle admet une sous-suite convergente $(\Phi_{h(n)})_{n\geq n_0}$ pour la topologie de $\mathbb{R}^V$ vers une fonction Φ qui vérifie en particulier les deux conditions suivantes:

(i) Φ est strictement positive sur V, puisque $\Phi(x) \in [\frac{1}{k_{n_0}}, k_{n_0}]$, pour tout sommet x de V.
(ii) $P\Phi \equiv 0$ sur V, puisque $\lim_{n\to\infty} P\Phi_{h(n)}(x) = P\Phi(x)$, pour tout x de V. □

La fonction Φ fournie par le Théorème 4.1 servira à la construction de la transformation unitaire dans le Théorème 5.1.

5. Tout Opérateur de Schrödinger Positif est Unitairement Équivalent à un Laplacien

Nous allons montrer qu'un opérateur de Schrödinger, sous une condition de positivité, est unitairement équivalent à un Laplacien $\Delta_{\omega,c}$.

Théorème 5.1. *Soit P un opérateur de Schrödinger sur un graphe G. On suppose que*

$$\langle Pf, f\rangle_{l^2} > 0 \tag{5.1}$$

pour toute fonction $f \in C_0(V)\backslash\{0\}$.

Alors il existe une fonction poids $\omega : V \to \mathbb{R}_+^\star$ sur V et une fonction conductance $c : E \to \mathbb{R}_+^\star$ sur E telles que l'opérateur P soit unitairement équivalent au Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ sur le graphe G.

Nous allons utiliser une fonction Φ qui est à la fois strictement positive et P-harmonique, fournie par le Théorème 4.1.

Preuve. Considérons

$$P = \Delta_{1,a} + W$$

un opérateur de Schrödinger sur le graphe G vérifiant l'hypothèse (5.1). Par le Théorème 4.1, il existe une fonction Φ strictement positive et P-harmonique sur V. Alors nous pouvons déduire de l'équation $P(\Phi) = 0$, l'égalité:

$$W = -\frac{\Delta\Phi}{\Phi}. \tag{5.2}$$

Prenons $\omega = \Phi$ et pour tout $g \in l^2(V)$, posons $f = \frac{g}{\Phi}$.

Nous allons montrer que $\langle Pg, g\rangle_{l^2} = \langle \Delta_{\omega,c} f, f\rangle_{l^2_\omega}$.

Calculons

$$\begin{aligned}
\langle Pg, g\rangle_{l^2} &= \langle \Delta(f\Phi) + Wf\Phi, f\Phi\rangle_{l^2} \\
&= \langle \Delta(f\Phi) - f\Delta\Phi, f\Phi\rangle_{l^2} \\
&= \sum_{x\in V} \left[\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}(f(x)\Phi(x) - f(y)\Phi(y)) \right. \\
&\quad \left. - f(x)\left(\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}[\Phi(x) - \Phi(y)]\right) f(x)\Phi(x) \right] \\
&= \sum_{x\in V} f(x)\Phi(x) \sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}\Phi(y)[f(x) - f(y)] \\
&= \sum_{x\in V} \Phi^2(x) f(x) \frac{1}{\Phi^2(x)} \sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}\Phi(x)\Phi(y)[f(x) - f(y)].
\end{aligned}$$

En posant

$$c_{\{x,y\}} = a_{\{x,y\}}\Phi(x)\Phi(y),$$

il résulte que:

$$\langle Pg, g\rangle_{l^2} = \langle \Delta_{\omega,c} f, f\rangle_{l^2_\omega}. \tag{5.3}$$

D'où

$$P = U^{-1}\Delta_{\omega,c}U, \tag{5.4}$$

avec $U\colon l^2(V) \to l^2_\omega(V)$ définie par

$$U(g) = \frac{g}{\Phi}.$$

Ainsi P est unitairement équivalent au Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ du graphe pondéré par le poids $\omega \equiv \Phi$ et la conductance c donnée par

$$c_{\{x,y\}} = a_{\{x,y\}}\Phi(x)\Phi(y). \tag{5.5}$$

□

6. Cas des Graphes Métriquement Complets

Nous adaptons au cas des graphes la méthode de G. et I. Nenciu [14] utilisant une estimation d'Agmon donnée dans le lemme technique suivant que nous utiliserons dans la preuve du Théorème 6.1.

Lemme 6.1. *Soient $H = \Delta_{1,a} + W$ un opérateur de Schrödinger sur G, λ un nombre réel et $v \in C(V)$. On suppose que v est une solution de l'équation*:

$$(H - \lambda)(v) = 0. \tag{6.1}$$

Alors pour tout $f \in C_0(V)$, on a:

$$\begin{aligned}\langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} &= \sum_{\{x,y\}\in E} a_{\{x,y\}} v(x)v(y)[f(x)-f(y)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x\in V} v(x) \sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v(y)[f(x)-f(y)]^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Preuve. Supposons que: $(H - \lambda)(v) = 0$, c'est à dire que pour tout $x \in V$,

$$\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}(v(x) - v(y)) + W(x)v(x) = \lambda v(x). \tag{6.3}$$

Calculons $S = \langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2}$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x\in V} f(x)v(x)[(H-\lambda)(fv)](x) \\ &= \sum_{x\in V} f(x)v(x)W(x)f(x)v(x) - \lambda f(x)v(x) \\ &\quad + \sum_{x\in V}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}}[f(x)v(x) - f(y)v(y)]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Or par l'hypothèse (6.1) faite sur v, nous avons:

$$\lambda f(x)v(x) - W(x)f(x)v(x) = \sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} f(x)[v(x) - v(y)].$$

Nous obtenons alors, en remplaçant dans l'expression (6.4):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x\in V} f(x)v(x)\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v(y)[f(x) - f(y)] \\ &= \sum_{x\in V}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v(x)v(y)[f^2(x) - f(x)f(y)]. \end{aligned}$$

Comme $a_{\{x,y\}} = a_{\{y,x\}}$, l'expression devient:

$$S = \sum_{\{x,y\}\in E} a_{\{x,y\}} v(x)v(y)[f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y) - f(x)f(y)].$$

D'où finalement:

$$\begin{aligned}\langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} &= \sum_{\{x,y\}\in E} a_{\{x,y\}} v(x)v(y)[f(x)-f(y)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x\in V} v(x) \sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v(y)[f(x)-f(y)]^2. \end{aligned} \qquad \square$$

Définition 6.1. Un graphe G est dit à valence bornée, s'il existe un entier N tel que pour tout $x \in V$ on ait: $\sharp\{y \in V; y \sim x\} \leq N$.

Définition 6.2. Soit a une fonction strictement positive sur les arêtes de G. On définit la distance pondérée par a sur G, qu'on note δ_a, par:

$$\delta_a(x, y) = \min_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} L(\gamma) \tag{6.5}$$

où $\Gamma_{x,y}$ est l'ensemble de tous les chemins d'arêtes $\gamma : x_1 = x, x_2, \ldots, x_n = y$, reliant les sommets x et y; et

$$L(\gamma) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{a_{x_i x_{i+1}}}}$$

la longueur du chemin d'arêtes γ.

Théorème 6.1. *Soit $H = \Delta_{1,a} + W$ un opérateur de Schrödinger sur un graphe infini G à valence bornée et telle que sa métrique définie par la distance δ_a est complète. On suppose qu'il existe un réel k telle que*

$$\langle Hg, g \rangle_{l^2} \geq k \|g\|^2_{l^2} \tag{6.6}$$

pour tout $g \in C_0(V)$. Alors l'opérateur H, avec comme domaine $C_0(V)$, est essentiellement auto-adjoint.

Preuve. Soit $\lambda < k - 1$, nous allons montrer que si $v \in l^2(V)$ et vérifie l'équation

$$Hv = \lambda v,$$

alors v est identiquement nulle.

On fixe $R > 0$ et un sommet x_0 pris comme origine. Notons:

$$B_R = \{x \in V; \delta_a(x_0, x) \leq R\} \tag{6.7}$$

la boule de centre x_0 et de rayon R pour la distance δ_a.

Considérons la fonction f définie sur V par

$$f(x) = \min(1, \delta_a(x, V \backslash B_{R+1})).$$

Nous avons ainsi:

$$f \restriction B_R \equiv 1, \quad f \restriction V \backslash B_{R+1} \equiv 0, \quad f(B_{R+1} \backslash B_R) \subseteq [0, 1].$$

Le support de f est inclus dans B_{R+1} qui est fini du fait que la métrique associée à δ_a est complète.

Par l'hypothèse (6.6) faite sur H et vu que fv est à support fini dans B_{R+1}, nous obtenons les minorations suivantes:

$$\langle fv, (H - \lambda)(fv) \rangle_{l^2} \geq (k - \lambda) \sum_{x \in B_{R+1}} (fv)^2(x) \geq \sum_{x \in B_R} v^2(x).$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 6.1, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} &= \frac{1}{2}\sum_{x\in V}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v(x)v(y)[f(x)-f(y)]^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{x\in V}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v^2(x)[f(x)-f(y)]^2\end{aligned}$$

en remarquant que $a_{\{x,y\}} = a_{\{y,x\}}$ et que:

$$v(x)v(y) \leq \frac{1}{2}(v^2(x)+v^2(y)).$$

Comme chacune des restrictions de f à B_R et à $V\backslash B_{R+1}$ sont des fonctions constantes, alors l'inégalité précédente devient:

$$\begin{aligned}\langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} &\leq \frac{1}{2}\sum_{x\in B_{R+1}\backslash B_R}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v^2(x)[f(x)-f(y)]^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{x\in B_{R+1}\backslash B_R}\sum_{y\sim x} a_{\{x,y\}} v^2(x)(\delta_a(x,y))^2. \qquad (6.8)\end{aligned}$$

La dernière inégalité (6.8) est obtenue du fait que f est 1-Lipschitzienne puisqu'elle est minimum de deux fonctions 1-Lipschitziennes.

Etant donné (6.5), si $\{x,y\}$ est une arête, la distance δ_a satisfait l'inégalité:

$$\delta_a(x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{a_{\{x,y\}}}}.$$

Et comme la valence de G est bornée par N, nous trouvons:

$$\langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} \leq \frac{1}{2}N \sum_{x\in B_{R+1}\backslash B_R} v^2(x).$$

Ainsi, pour tout $R > 0$, nous obtenons:

$$\sum_{x\in B_R} v^2(x) \leq \langle fv, (H-\lambda)(fv)\rangle_{l^2} \leq \frac{1}{2}N \sum_{x\in B_{R+1}\backslash B_R} v^2(x).$$

Et puisque $v \in l^2(V)$, en faisant tendre $R \to \infty$, il résulte que:

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{x\in B_{R+1}\backslash B_R} v^2(x) = 0$$

et par suite $\|v\|_{l^2}^2 = 0$. $\square$

Théorème 6.2. *Soit G un graphe infini à valence bornée et pondéré par un poids ω sur V et une conductance c* sur *E. On suppose que la métrique associée à la distance δ_a est complète, où a est la fonction donnée par*

$$a_{\{x,y\}} = \frac{c_{\{x,y\}}}{\omega_x \omega_y}.$$

Alors le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$, avec domaine $C_0(V)$, est essentiellement auto-adjoint.

Preuve. Par le Lemme 2.1, l'opérateur $\Delta_{\omega,c}$ est unitairement équivalent à l'opérateur de Schrödinger $H = \Delta_{1,a} + W$, où

$$a_{\{x,y\}} = \frac{c_{\{x,y\}}}{\omega_x \omega_y}$$

et

$$W(x) = \frac{1}{\omega_x^2} \sum_{y \sim x} c_{\{x,y\}} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega_y}\right).$$

Et nous appliquons le Théorème 6.1 à l'opérateur H qui vérifie les hypothèses, puisque $\Delta_{\omega,c}$ est positif et que

$$\langle Hg, g\rangle_{l^2} = \left\langle \Delta_{\omega,c} \frac{g}{\omega}, \frac{g}{\omega} \right\rangle_{l^2_\omega}$$

par (5.3) dans la preuve du Théorème 5.1. □

Remarque 6.1. Le Théorème 6.1 n'est pas un cas particulier du Théorème 3.2. En effet dans le Théorème 6.1, le potentiel W n'est pas nécessairement minoré. Prenons par exemple G tel que $V = \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et $n \sim n+1$ pour tout n. Supposons que G soit pondéré par $\omega_n = \frac{1}{n \log n}$ sur V et connecté par $c_n = 1$ sur E. La distance δ_a est donnée par:

$$\delta_a(n_0, n) = \sum_{n_0 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{a_{k,k+1}}}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k,k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1) \log k \log(k+1)}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{k \log k},$$

donc

$$\delta_a(n_0, n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

et la métrique associée est complète.

De plus, en posant

$$H = \Delta_{1,a} + W,$$

nous avons:

$$\langle Hg, g\rangle_{l^2} = \left\langle \Delta_{\omega,c} \frac{g}{\omega}, \frac{g}{\omega} \right\rangle_{l^2_\omega} \geq 0,$$

pour $g \in C_0(V)$.

Alors que le potentiel W n'est pas minoré, puisqu'après calculs, nous obtenons:

$$W(n) = 2n^2 \log^2 n - n \log n[(n+1)\log(n+1) + (n-1)\log(n-1)] \underset{\infty}{\sim} -\log n$$

qui tend vers $-\infty$.

Remarque 6.2. Dans l'exemple de la Remarque 6.1, le choix du poids en fonction de log est déterminant. En effet, en prenant des fonctions puissances, on ne peut pas avoir à la fois la métrique δ_a complète et le potentiel W non minoré.

Prenons par exemple G tel que $V = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et $n \sim n + 1$ pour tout n, et supposons que G soit pondéré par le poids $\omega_n = \frac{1}{n^\alpha}$ sur V et la conductance $c_n = \frac{1}{n^\beta}$ sur E. La distance δ_a est donnée par:

$$\delta_a(n_0, n) = \sum_{n_0 \leq k \leq n} \frac{k^\beta}{(k^\alpha(k+1)^\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Et un simple calcul montre que

$$\delta_a \text{ est complète si et seulement si } \alpha - \frac{1}{2}\beta \leq 1.$$

Pour ce qui est du potentiel, le calcul donne:

$$W_n \sim -\alpha(\alpha - \beta - 1)n^{2\alpha-\beta-2}.$$

Ainsi pour $\alpha - \frac{1}{2}\beta \leq 1$, le potentiel W est minoré.

Remarque 6.3. La condition que la métrique δ_a soit complète n'est pas une condition nécessaire pour que le Laplacien $\Delta_{\omega,c}$ ou que l'opérateur de Schrödinger $\Delta_{1,a} + W$ soit essentiellement auto-adjoint.

En effet, soit G tel que $V = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et $n \sim n + 1$ pour tout $n > 1$. Pour toute conductance a sur E le Laplacien $\Delta_{1,a}$ est essentiellement auto-adjoint par le Théorème 3.1. Alors que la métrique δ_a n'est pas nécessairement complète: par exemple lorsque $a_n = n^{-2-\varepsilon}$, pour $\varepsilon > 0$.

Dans l'article [5] on donnera des conditions de croissance du potentiel assurant qu'un opérateur de Schrödinger est essentiellement auto-adjoint dans le cas des graphes métriquement non complets.

Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce à l'appui financier de l'unité de recherches (05/UR/15-02) "Mathématiques et Applications" du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Bizerte (Tunisie) pour mes multiples courts séjours de recherches au Laboratoire de l'Institut Fourier (Grenoble-France).

Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur Yves Colin de Verdière pour sa collaboration et pour avoir formulé l'idée de ce travail. Je remercie le Professeur Françoise Truc pour l'intérêret qu'elle a porté à ce travail et pour les multiples échanges fructueux.

References

1. M. Braverman, O. Milatovic et M. Shubin, Essential self-adjointness of Schrödinger-type operators on manifolds, *Russ. Math. Surv.* **57** (2002) 641–692.

2. R. Carlson, Adjoint and self-adjoint differential operators on graphs, *J. Diff. Eqns.* **6** (1998) 1–10.
3. P. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, *J. Funct. Anal.* **12** (1973) 401–414.
4. Y. Colin de Verdière, *Spectre de Graphes*, Cours Spécialisés, Vol. 4 (Société Mathématique de France, 1998).
5. Y. Colin de Verdière, N. Torki-Hamza et F. Truc, Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators II: Metrically non complete graphs, arXiv:1006.5778v1.
6. Y. Colin de Verdière, N. Torki-Hamza et F. Truc, Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators III: Magnetic fields, En préparation (2010).
7. J. Dodziuk, *Elliptic Operators on Infinite Graphs*, in *Analysis, Geometry and Topology of Elliptic Operators* (World Scientific, 2006), pp. 353–368.
8. P. Exner, J. Keating, P. Kuchment, T. Sunada et A. Teplyaev, *Analysis on Graphs and its Applications*, Proc. Symp. Pure Math. (Amer. Math. Soc., 2008).
9. M. Gaffney, A special Stokes's theorem for a complete Riemannian manifolds, *Ann. Math.* **60** (1954) 140–145.
10. M. Gaffney, Hilbert space methods in the theory of harmonic integrals, *Ann. Math.* **78** (1955) 426–444.
11. S. Golénia et C. Schumacher, The problem of deficiency indices for discrete Schrödinger operators on locally finite graphs, arXiv:1005.0165v1.
12. P. E. T. Jorgensen, Essential self-adjointness of the graph-Laplacian, *J. Math. Phys.* **49**(7) (2008) 073510.
13. P. Kuchment, *Quantum Graphs: An Introduction and a Brief Survey*, *Proc. Symp. Pure Math.*, *AMS*, (2008) 291–314.
14. G. Nenciu and I. Nenciu, On confining potentials and essential self-adjointness for Schrödinger operators on bounded domains in $\mathbb{R}^n$, *Ann. Henri Poincaré* **10** (2009) 377–394.
15. I. M. Oleinik, On the essential self-adjointness of the operator on complete Riemannian manifolds, *Mathematical Notes* **54** (1993) 934–939.
16. M. Reed et B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis* (1980), *II, Fourier Analysis, Self-adjointness* (1975), New York Academic Press.
17. M. Shubin, Classical and quantum completness for the Schrödinger operators on non-compact manifolds, in *Geometric Aspects of Partial Differential Equations*, in *Proc. Sympos.* Roskilde, Denmark (1998) (Amer. Math. Soc., 1999), pp. 257–269.
18. M. Shubin, The essential self-adjointness for semi-bounded magnetic Schrödinger operators on non-compact manifolds, *J. Funct. Anal.* **186** (2001) 92–116.
19. R. Strichartz, Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifolds, *J. Funct. Anal.* **52** (1983) 48–79.
20. N. Torki-Hamza, Stabilité des valeurs propres avec champ magnétique sur une variété Riemannienne et sur un graphe, Thèse de doctorat de l'Université de Grenoble I, France (1989).
21. H. Weyl, Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1909) 37–63.
22. A. Weber, *Analysis of the Physical Laplacian and the Heat Flow on a Locally Finite Graph*, arXiv:0801.0812v4[math.SP] (2010).
23. R. K. Wojciechowski, *Stochastic Completness of Graphs*, Ph.D. Thesis, The graduate Center of the City University of New York (2008).