Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2023.188

ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS CHO HÀM CÓ GIÁ TRỊ KHOẢNG

Nguyễn Chí Tâm, Trần Văn Duy, Huỳnh Thanh Du, Nguyễn Trung Phát và Đinh Ngọc Quý*
Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): dnquy@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 13/04/2023
Sửa bài (Revised): 05/05/2023
Duyệt đăng (Accepted): 12/05/2023

Title: *Weierstrass theorem for interval-valued functions*

Author(s): *Nguyen Chi Tam, Tran Van Duy, Huynh Thanh Du, Nguyen Trung Phat and Dinh Ngoc Quy**

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, các phiên bản mở rộng của định lý Weierstrass cổ điển cho hàm có giá trị khoảng được đưa ra. Các kết quả được đề xuất là mới và tổng quát cho định lý Weierstrass cổ điển. Nhiều ví dụ cụ thể được trình bày để so sánh và minh họa cho các kết quả thu được.

Từ khoá: *Định lý Weierstrass, tính nửa liên tục, hàm có giá trị khoảng*

ABSTRACT

In this paper, some extended versions of the classical Weierstrass extreme-value theorem for interval-valued functions was shown. The results are new and general to the classical Weierstrass theorem. Many examples are presented to compare and illustrate the obtained results.

Keywords: *Weierstrass theorem, semicontinuity, interval-valued functions*

1. GIỚI THIỆU

Định lý giá trị cực trị Weierstrass là kết quả quan trọng, có vai trò nền tảng trong giải tích toán học. Định lý này được phát biểu một cách hết sức đơn giản là mọi hàm thực liên tục trên tập compact thì đạt đồng thời giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập đó. Dựa vào định lý Weierstrass, ta dễ dàng đưa ra các định lý cơ bản quan trọng của giải tích thực như định lý về tính bị chặn, định lý Rolle, định lý giá trị trung bình, định lý Taylor, ... Trong tối ưu hóa, vai trò của định lý Weierstrass thực sự được nhấn mạnh vì đây là kết quả cơ bản được sử dụng nhiều nhất để chỉ ra sự tồn tại nghiệm của các bài toán tối ưu. Các kết quả mở rộng của định lý Weierstrass cũng được nghiên cứu và công bố bởi Gajek & Zagrodny (1994), Tian & Zhou (1995), Martínez-Legaz (2014), Khanh & Quan (2019). Các tác giả đã quan tâm mở rộng của định lý Weierstrass trên không gian mêtric, không gian tôpô dựa trên việc giảm nhẹ tính nửa liên tục của hàm mục tiêu, giảm nhẹ tính compact, tính bị chặn của tập ràng buộc, đồng thời mở rộng định lý Weierstrass cho hàm hai biến, hàm vector.

Giải tích hàm khoảng đóng vai trò rất quan trọng trong toán học ứng dụng, đặc biệt trong lĩnh vực mờ hóa và thống kê . Việc phát triển lý thuyết tối ưu hàm khoảng đang rất được quan tâm trong những năm gần đây (Chalco-Cano et al., 2013 ; Singh et al., 2016; Osuna-Gómez et al., 2017 ; Gong et al., 2016; Zhang et al., 2018 ; Ahmad et al., 2019; Ghosh, 2017; Ghosh et al., 2018, 2019, 2020a, 2020b; Zhang & Huang,2022; Kumar & Ghosh, 2023). Tuy nhiên, hiện tại những kết quả về mở rộng định lý Weierstrass cho hàm có giá trị khoảng chưa được đề xuất. Trong bài báo này, dựa trên các định nghĩa mở rộng về tính nửa liên tục cho hàm có giá trị khoảng, các phiên bản mở rộng của định lý Weierstrass trên không gian mêtric được đưa ra. Các kết quả là mới và tổng quát cho định lý Weierstrass cổ điển. Nhiều ví dụ cụ thể được trình bày để so sánh và minh họa cho các kết quả thu được.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, những quy ước sau được sử dụng:

- $\mathbb{R}$ là tập số thực và $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên;
- $\mathfrak{I}$ là tập hợp các khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{I} = \{[a, b]: a \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Trong trường hợp *khoảng suy biến* chỉ có duy nhất một phần tử thì ký hiệu $a = [a, a]$.

Cho hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{I}$, $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{I}$ và $\in \mathbb{R}$. Khi đó, phép cộng và phép nhân vô hướng trong $\mathfrak{I}$ được định nghĩa bởi:

- $A + B := [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}]$;
- $\lambda A := \begin{cases} [\lambda\underline{a}; \lambda\overline{a}] & \text{nếu } \lambda \geq 0, \\ [\lambda\overline{a}; \lambda\underline{a}] & \text{nếu } \lambda < 0. \end{cases}$

Trước tiên, chúng ta nhắc lại các định nghĩa về tính nửa liên tục của hàm thực.

Định nghĩa 2.1. (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho (X, d) là không gian mêtric và hàm thực $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó

(i) f được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0);$$

(ii) f được gọi là *nửa liên tục trên* (usc) tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0);$$

(iii) f được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi f vừa nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên tại x_0.

Ta nói rằng f thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ nếu f thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A. Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên X" trong cách phát biểu.

Dưới đây là định lý Weierstrass cổ điển.

Định lí 2.1. (Định lí Weierstrass) Cho (X, d) *là không gian mêtric compact và* $f: X \to \mathbb{R}$ *là hàm thực. Khi đó:*

(i) *Nếu* f *là hàm nửa liên tục dưới trên* X *thì* f *đạt giá trị nhỏ nhất trên* X, *tức là* $\exists \overline{x} \in X$ *sao cho*

$$f(\overline{x}) \leq f(x), \forall x \in X.$$

(ii) *Nếu* f *là hàm nửa liên tục trên trên* X *thì* f *đạt giá trị lớn nhất trên* X, *tức là* $\exists \overline{x} \in X$ *sao cho*

$$f(\overline{x}) \geq f(x), \forall x \in X.$$

(iii) *Nếu* f *là hàm liên tục trên* X *thì* f *đạt đồng thời giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên* X.

Định nghĩa 2.2. (Zhang & Huang, 2022) Cho khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{I}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{I}$. Ta xét quan hệ giữa hai khoảng trong I dưới đây:

$$A \preccurlyeq B \text{ nếu và chỉ nếu } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ và } \overline{a} \leq \overline{b}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra quan hệ $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự từng phần trong $\mathfrak{I}$. Khi A nhỏ hơn B theo thứ tự $\preccurlyeq$ thì ta có thể nói B lớn hơn A và ký hiệu là $B \succcurlyeq A$.

Dưới đây là các định nghĩa về tính nửa liên tục của hàm có giá trị khoảng.

Định nghĩa 2.3. Cho (X, d) là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó:

(i) (Zhang & Huang, 2022) Hàm F được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) trên X nếu với mọi khoảng đóng $A \in \mathfrak{I}$ thì tập mức dưới theo thứ tự khoảng $\{x \in X : f(x) \preccurlyeq A\}$ là tập đóng.

(ii) Hàm F được gọi là nửa liên tục trên (usc) trên X nếu với mọi khoảng đóng $A \in \mathfrak{I}$ thì tập mức trên theo thứ tự khoảng $\{x \in X : f(x) \succcurlyeq A\}$ là tập đóng.

(iii) **(**Rockafellar & Wets, 2009) Hàm F được gọi là *nửa liên tục outer* (osc) tại x_0 nếu với mọi lân cận U của $F(x_0)$, tồn tại lân cận V của x_0 sao cho

$$F(V) \subset U.$$

(iv) **(**Rockafellar & Wets, 2009) Hàm F được gọi là *nửa liên tục inner* (isc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in V$.

Mệnh đề 2.2. *Cho* X *là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng* $F: X \to \mathfrak{I}$ *được định nghĩa bởi*

$$F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)], \forall x \in X.$$

Khi đó, ta có:

(i) *(Zhang & Huang, 2022) Nếu* F *là nửa liên tục dưới trên* X *khi và chỉ khi cả hai hàm* $\underline{f}$ *và* $\overline{f}$ *đều là hàm nửa liên tục dưới trên* X.

(ii) *Nếu F là nửa liên tục trên trên X khi và chỉ khi cả hai hàm $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều là hàm nửa liên tục trên trên X.*

(iii) *Nếu F là nửa liên tục outer trên X thì $\overline{f}$ là usc trên X và $\underline{f}$ là lsc trên X.*

(iv) *Nếu F là nửa liên tục inner trên X thì $\overline{f}$ là lsc trên X và $\underline{f}$ là usc trên X.*

Chứng minh

(ii) Được suy ra trực tiếp từ (i).

(iii) Cố định $x_0 \in X$ và $\varepsilon > 0$. Xét lân cận của $F(x_0)$ có dạng $U = \left(\underline{f}(x_0) - \varepsilon, \overline{f}(x_0) + \varepsilon\right)$. Do F là hàm nửa liên tục outer tại x_0 nên tồn tại lân cận V của x_0 sao cho, $\forall x \in V$,

$$F(x) \subset U.$$

Suy ra, $\forall x \in V$,

$$\underline{f}(x_0) - \varepsilon < \underline{f}(x),$$

$$\overline{f}(x) < \overline{f}(x_0) + \varepsilon.$$

Từ đó, kéo theo

$$\underline{f}(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \inf \underline{f}(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \sup \overline{f}(x) \leq \overline{f}(x_0).$$

Vậy, với mọi $x_0 \in X$ ta có $\overline{f}$ là usc tại x_0 và $\underline{f}$ là lsc trên tại x_0. Suy ra $\overline{f}$ là usc và $\underline{f}$ là lsc trên X.

(iv) Cố định $x_0 \in X$. Trước hết ta chứng minh $\overline{f}$ là nửa liên tục dưới tại x_0. Thật vậy, lấy $y = \overline{f}(x_0) \in F(x_0)$. Do F là nửa liên tục inner tại $\overline{x}$ nên tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$. Vì $F(x_n) = \left[\underline{f}(x_n), \overline{f}(x_n)\right]$ và $y_n \in F(x_n)$ nên

$$y_n \leq \overline{f}(x_n).$$

Lấy qua giới hạn dưới ta được

$$\liminf y_n \leq \liminf \overline{f}(x_n).$$

Do $\liminf y_n = \lim y_n = y$, nên suy ra

$$\overline{f}(x_0) \leq \liminf \overline{f}(x_n),$$

tức là $\overline{f}$ là nửa liên tục dưới tại $\overline{x}$.

Ta tiếp tục chứng minh $\underline{f}$ là nửa liên tục trên tại x_0. Lấy $y = \underline{f}(x_0) \in F(x_0)$. Do F là nửa liên tục inner tại x_0 nên tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$. Vì $F(x_n) = \left[\underline{f}(x_n), \overline{f}(x_n)\right]$ và $y_n \in F(x_n)$ nên

$$\underline{f}(x_n) \leq y_n.$$

Lấy qua giới hạn dưới ta được

$$\limsup \underline{f}(x_n) \leq \limsup y_n.$$

Do $\limsup y_n = \lim y_n = y$, nên suy ra

$$\limsup \underline{f}(x_n) \leq \underline{f}(x_0),$$

tức là $\underline{f}$ là nửa liên tục trên tại $\overline{x}$. ■

Nhận xét 2.1. Dựa vào Định nghĩa 2.3 và Mệnh đề 2.2, chúng ta thấy rằng trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực (hàm khoảng có ảnh là khoảng suy biến đơn phần tử) thì định nghĩa lsc của hàm có giá trị khoảng trùng với định nghĩa lsc của hàm thực, định nghĩa usc của hàm có giá trị khoảng trùng với định nghĩa usc của hàm thực và các định nghĩa isc và osc của hàm có giá trị trùng với định nghĩa liên tục của hàm thực.

Trong trường hợp tổng quát thì tính isc, tính osc, tính lsc và tính usc của hàm có giá trị khoảng là các khái niệm khác biệt và không so sánh được với nhau. Điều đó được chỉ ra bởi ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.1. Cho $X = \mathbb{R}$ và các hàm có giá trị khoảng được định nghĩa bởi:

$$F_1(x) = \begin{cases} [0,3] & \text{nếu } x \neq 0, \\ [-1,4] & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

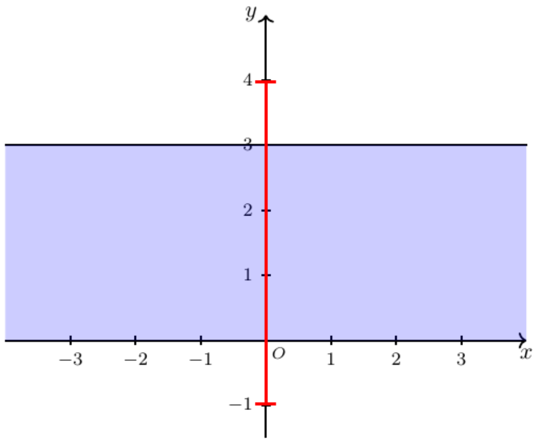
$$F_2(x) = \begin{cases} [0,3] & \text{nếu } x \neq 0, \\ [1,2] & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} [0,3] & \text{nếu } x \neq 0, \\ [-1,1] & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

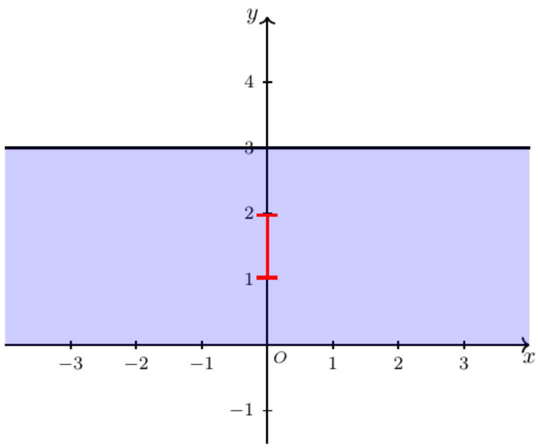
$$F_4(x) = \begin{cases} [0,3] & \text{nếu } x \neq 0, \\ [1,4] & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó, tại $x = 0$, ta có:

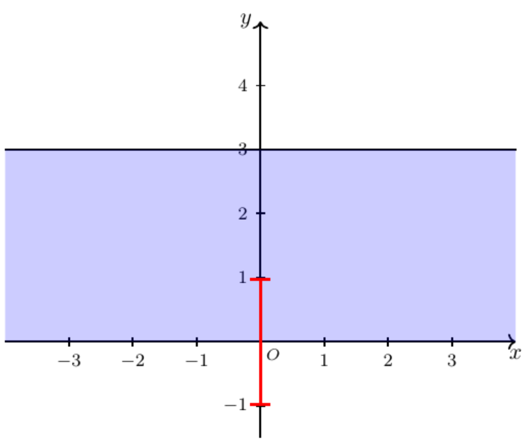
- F_1 là hàm osc nhưng không isc, lsc và usc.
- F_2 là hàm isc nhưng không osc, lsc và usc.
- F_3 là hàm lsc nhưng không isc, osc và usc.
- F_4 là hàm usc nhưng không isc, osc và lsc.



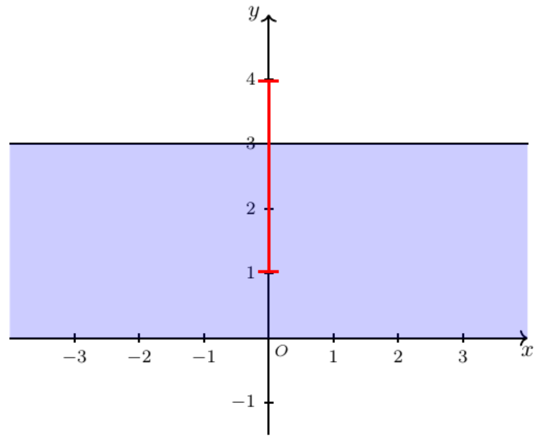
Hình 1. Đồ thị hàm số $F_1(x)$



Hình 2. Đồ thị hàm số $F_2(x)$



Hình 3. Đồ thị hàm số $F_3(x)$



Hình 4. Đồ thị hàm số $F_4(x)$

3. MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS CHO HÀM CÓ GIÁ TRỊ KHOẢNG

Cho X là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Trong mục này, bốn dạng nghiệm của bài toán tối ưu được khảo sát với hàm mục tiêu có giá trị khoảng dưới đây:

(Min-IOP): Tìm $\tilde{x} \in X$ sao cho tồn tại $\tilde{y} \in F(\tilde{x})$ thỏa $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\tilde{y} \leq y.$$

(WMin-IOP): Tìm $\tilde{x} \in X$ sao cho tồn tại $\tilde{y} \in F(\tilde{x})$ thỏa $\forall x \in X, \exists y \in F(x)$,

$$\tilde{y} \leq y.$$

(Max-IOP): Tìm $\tilde{x} \in X$ sao cho tồn tại $\tilde{y} \in F(\tilde{x})$ thỏa $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\tilde{y} \geq y.$$

(WMax-IOP): Tìm $\tilde{x} \in X$ sao cho tồn tại $\tilde{y} \in F(\tilde{x})$ thỏa $\forall x \in X, \exists y \in F(x)$,

$$\tilde{y} \geq y.$$

Lần lượt ký hiệu các tập nghiệm của bốn bài toán trên là $S_{\text{Min}}(F,X)$, $S_{\text{WMin}}(F,X)$, $S_{\text{Max}}(F,X)$, $S_{\text{WMax}}(F,X)$. Từ định nghĩa, ta dễ dàng có mối quan hệ cho các tập nghiệm như sau:

- $S_{\text{Min}}(F,X) \subset S_{\text{WMin}}(F,X)$;
- $S_{\text{Max}}(F,X) \subset S_{\text{WMax}}(F,X)$;
- $S_{\text{Min}}(F,X) = S_{\text{Max}}(-F,X)$;
- $S_{\text{wMin}}(F,X) = S_{\text{wMax}}(-F,X)$;

Trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực thì $S_{\text{Min}}(F,X) = S_{\text{SMin}}(F,X)$ và $S_{\text{Max}}(F,X) = S_{\text{WMax}}(F,X)$.

Tiếp theo, các kết quả tồn tại của bốn dạng nghiệm trên được trình bày. Đây chính là các phiên bản mở rộng của định lý Weierstrasscho hàm có giá trị khoảng.

Định lý 3.1. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, nếu F là osc thì cả bốn bài toán Min-IOP, SMin-IOP, Max-IOP và WMax-IOP đều có nghiệm.*

Chứng minh

Do F là osc nên theo Mệnh đề 2.2(iii) ta có $\underline{f}$ là lsc và $\overline{f}$ là usc. Áp dụng Định lý 2.1(i) cho hàm $\underline{f}$, tồn tại $\tilde{x} \in X$ sao cho

$$\underline{f}(\tilde{x}) \leq \underline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\underline{f}(\tilde{x}) \leq y.$$

Suy ra $\tilde{x}$ là một nghiệm của bài toán Min-IOP, kéo theo bài toán WMin-IOP cũng có nghiệm.

Áp dụng Định lý 2.1(ii) cho hai hàm $\overline{f}$, tồn tại $\widetilde{x'} \in X$ sao cho

$$\overline{f}(\widetilde{x'}) \geq \overline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\overline{f}(\widetilde{x'}) \geq y.$$

Suy ra $\widetilde{x'}$ là một nghiệm của bài toán Max-IOP, kéo theo bài toán WMax-IOP cũng có nghiệm. ■

Định lý 3.2. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, nếu F là isc thì cả hai bài toán WMin-IOP và WMax-IOP đều có nghiệm.*

Chứng minh

Do F là isc nên theo Mệnh đề 2.2(iv) ta có $\underline{f}$ là usc và $\overline{f}$ là lsc. Áp dụng Định lý 2.1(ii) cho hai hàm $\underline{f}$ ta có tồn tại $\tilde{x} \in X$ sao cho

$$\underline{f}(\tilde{x}) \geq \underline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \exists y = \underline{f}(x) \in F(x)$,

$$\underline{f}(\tilde{x}) \geq y.$$

Suy ra $\tilde{x}$ là một nghiệm của bài toán WMax-IOP.

Áp dụng Định lý 2.1(i) cho hai hàm $\overline{f}$, tồn tại $\widetilde{x'} \in X$ sao cho

$$\overline{f}(\widetilde{x'}) \leq \overline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \exists y = \overline{f}(x) \in F(x)$,

$$\overline{f}(\widetilde{x'}) \leq y.$$

Vậy $\tilde{x}$ là một nghiệm của bài toán WMin-IOP. ■

Từ Định lý 3.1 hoặc Định lý 3.2 ta suy ra trực tiếp kết quả của định lý Weierstrass cho trường hợp hàm thực liên tục trên tập compact dưới đây.

Hệ quả 3.3. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thực. Khi đó, nếu f là hàm liên tục trên X thì f đạt đồng thời giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên X.*

Định lý 3.4. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, nếu F là lsc thì bài toán Min-IOP có nghiệm, kéo theo bài toán WMin-IOP cũng có nghiệm.*

Chứng minh

Do F là lsc nên theo Mệnh đề 2.2(i) ta có $\underline{f}$ là lsc. Mặt khác, từ tính bị chặn dưới của hàm F ta suy ra tính bị chặn dưới của hàm $\underline{f}$ Áp dụng Định lý 2.1(i) cho hai hàm $\underline{f}$ ta có tồn tại $\tilde{x} \in X$ sao cho

$$\underline{f}(\tilde{x}) \leq \underline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\underline{f}(\tilde{x}) \leq y.$$

Suy ra $\tilde{x}$ là một nghiệm của bài toán Min-IOP. ■

Từ Định lý 3.4 ta suy ra trực tiếp kết quả định lý Weierstrass cho trường hợp hàm thực nửa liên tục dưới trên tập compact dưới đây.

Hệ quả 3.5. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thực. Khi đó nếu f là hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X thì f có giá trị nhỏ nhất trên X.*

Định lý 3.6. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, nếu F là usc thì bài toán Max-IOP có nghiệm, kéo theo bài toán SMax-IOP cũng có nghiệm.*

Chứng minh

Do F là usc nên theo Mệnh đề 2.2(ii) ta có $\overline{f}$ là usc. Mặt khác, từ tính bị chặn trên của hàm F ta suy ra tính bị chặn trên của hàm $\overline{f}$. Áp dụng Định lý 2.1(ii) cho hai hàm $\overline{f}$ ta có tồn tại $\tilde{x} \in X$ sao cho

$$\overline{f}(\tilde{x}) \geq \overline{f}(x), \forall x \in X.$$

Điều này kéo theo, $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$,

$$\overline{f}(\tilde{x}) \geq y.$$

Suy ra $\tilde{x}$ là một nghiệm của bài toán Max-IOP. ■

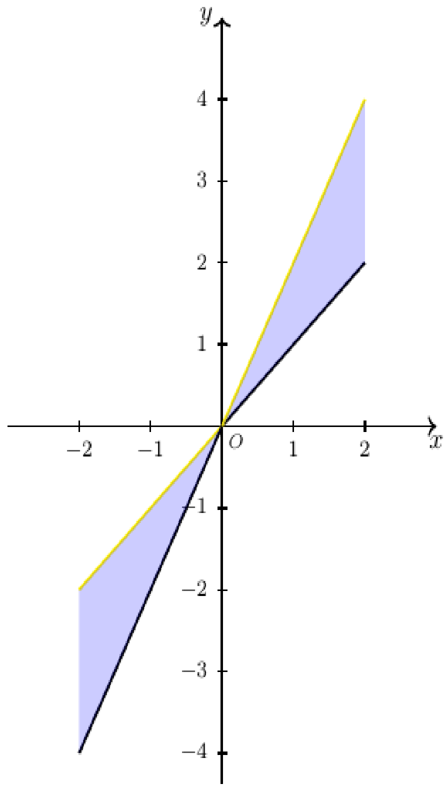
Từ Định lý 3.6 ta suy ra trực tiếp kết quả định lý Weierstrass cho trường hợp hàm thực nửa liên tục trên tập compact dưới đây.

Hệ quả 3.7. *Cho (X, d) là không gian mêtric compact và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực. Khi đó nếu f là hàm nửa liên tục trên và bị chặn trên trên X thì f có giá trị lớn nhất trên X.*

Điều kiện compact là giả thiết cốt yếu trong các Định lý 3.1, Định lý 3.2, Định lý 3.4 và Định lý 3.6. Điều đó được chỉ ra bởi ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.1. Cho hàm có giá trị khoảng $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = x.[1,2], \forall x \in \mathbb{R}.$$



Hình 5. Đồ thị hàm số của ví dụ 3.1

Trong trường hợp này, ta có dễ dàng kiểm tra được F đồng thời là isc, osc, lsc và usc trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên ta có cả bốn tập nghiệm $S_{\text{Min}}(F, \mathbb{R})$, $S_{\text{WMin}}(F, \mathbb{R})$, $S_{\text{Max}}(F, \mathbb{R})$, $S_{\text{WMax}}(F, \mathbb{R})$ đều bằng rỗng, nguyên nhân là $X = \mathbb{R}$ không là tập compact.

Nếu xét $X = [-1,1]$, ta có X là tập compact nên tất cả các giả thiết của Định lý 3.1, Định lý 3.2, Định lý 3.4 và Định lý 3.6 đều thỏa mãn. Do đó, bốn tập nghiệm $S_{\text{Min}}(F, [-1,1])$, $S_{\text{WMin}}(F, [-1,1])$, $S_{\text{Max}}(F, [-1,1])$, $S_{\text{WMax}}(F, [-1,1])$ đều khác rỗng. Tính toán trực tiếp, ta có được:

$$S_{\text{Min}}(F, [-1,1]) = \{-1\},$$

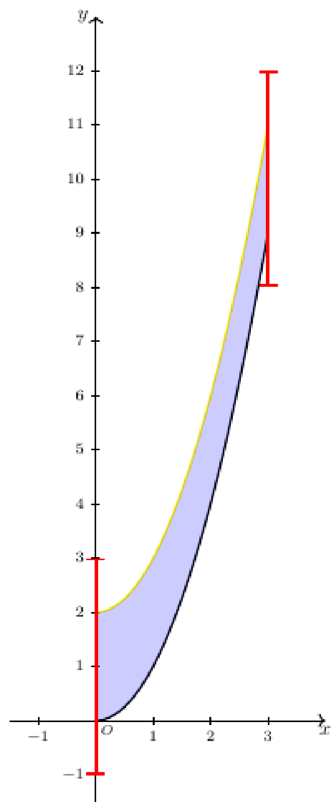
$$S_{\text{WMin}}(F, [-1,1]) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right],$$

$$S_{\text{Max}}(F, [-1,1]) = \{1\},$$

$$S_{\text{WMax}}(F, [-1,1]) = [\tfrac{1}{2}, 1].$$

Ví dụ 3.2. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [0,3] \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-1,3] & \text{nếu } x = 0, \\ x^2 + [0,2] & \text{nếu } x \in (0,3), \\ [8,12] & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$



Hình 6. Đồ thị hàm số của ví dụ 3.2

Trong trường hợp này, F đều không isc, lsc và usc tại $x = 0$ và tại $x = 3$ nên các Định lý 3.2, Định lý 3.4 và Định lý 3.6 đều không áp dụng được. Tuy nhiên F là osc và $X = [0,3]$ là tập compact nên tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa. Do đó, ta suy ra cả bốn tập nghiệm $S_{\text{Min}}(F,X)$, $S_{\text{WMin}}(F,X)$, $S_{\text{Max}}(F,X)$, $S_{\text{WMax}}(F,X)$ đều khác rỗng. Tính toán ta có:

$$S_{\text{Min}}(F,X) = \{0\},$$

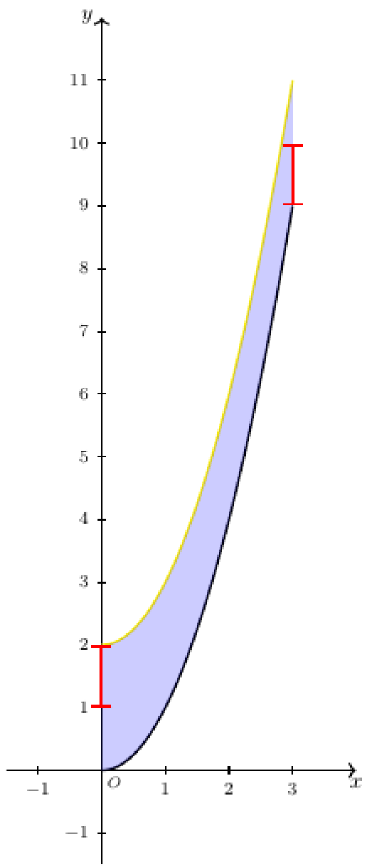
$$S_{\text{WMin}}(F,X) = [0,\sqrt{2}],$$

$$S_{\text{Max}}(F,X) = \{3\},$$

$$S_{\text{WMax}}(F,X) = [\sqrt{7},3].$$

Ví dụ 3.3. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [0,3] \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [1,2] & \text{nếu } x = 0, \\ x^2 + [0,2] & \text{nếu } x \in (0,3), \\ [9,10] & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$



Hình 7. Đồ thị hàm số của ví dụ 3.3

Trong trường hợp này, dễ dàng kiểm tra được F là isc và $X = [0,3]$ là tập compact nên tất cả các giả thiết của Định lý 3.2 thỏa. Do đó, $S_{\text{WMin}}(F,X)$ và $S_{\text{WMax}}(F,X)$ đều khác rỗng. Tính toán ta có:

$$S_{\text{WMin}}(F,X) = [0,\sqrt{2}],$$

$$S_{\text{WMax}}(F,X) = [\sqrt{7},3].$$

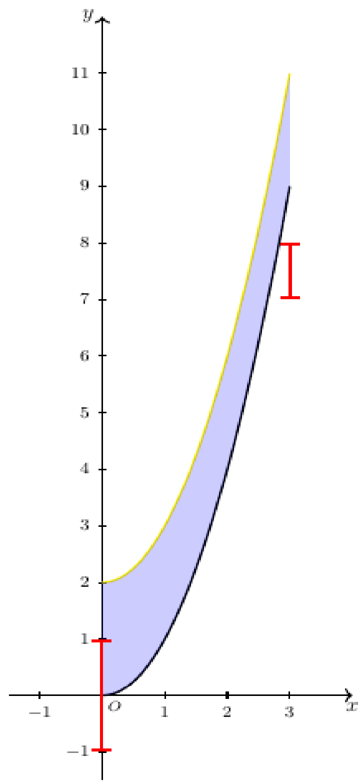
Trong trường hợp này, Định lý 3.1 không áp dụng được do F không osc tại $x = 0$ và tại $x = 3$, Định lý 3.4 không áp dụng được vì F không lsc tại $x = 0$. Định lý 3.6 không áp dụng được vì F không usc tại $x = 3$. Ta có

$$S_{\text{Min}}(F,X) = \emptyset,$$

$$S_{\text{Max}}(F,X) = \emptyset.$$

Ví dụ 3.4. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [0,3] \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{nếu } x = 0, \\ x^2 + [0,2] & \text{nếu } x \in (0,3), \\ [7,8] & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$



Hình 8. Đồ thị hàm số của ví dụ 3.4

Dễ dàng kiểm tra được F là lsc và $X = [0,2]$ là tập compact nên tất cả các giả thiết của Định lý 3.4 thỏa. Do đó, $S_{\text{Min}}(F,X)$ và $S_{\text{WMin}}(F,X)$ đều khác rỗng. Ta có

$$S_{\mathrm{WMin}}(F,X) = \{0\},$$
$$S_{\mathrm{WMin}}(F,X) = [0,1].$$

Trong trường hợp này, F đều không osc, isc và usc tại $x = 0$ và tại $x = 3$, nên Định lý 3.1, Định lý 3.2 và Định lý 3.6 không áp dụng được. Ta có

$$S_{\mathrm{Max}}(F,X) = \emptyset,$$
$$S_{\mathrm{WMax}}(F,X) = \emptyset.$$

Ví dụ 3.5. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [0,3] \to \mathfrak{I}$ được định nghĩa bởi:

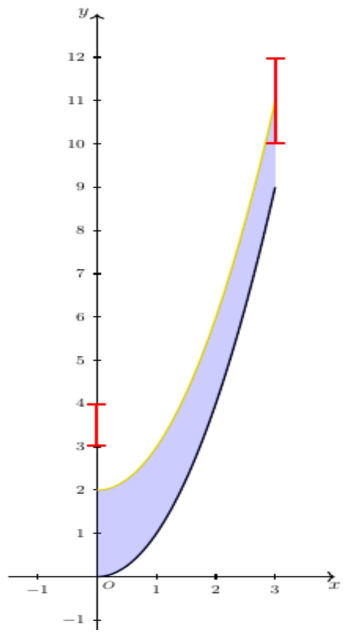
$$F(x) = \begin{cases} [3,4] & \text{nếu } x = 0, \\ x^2 + [0,2] & \text{nếu } x \in (0,3), \\ [10,12] & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được F là usc và $X = [0,3]$ là tập compact nên tất cả các giả thiết của Định lý 3.6 thỏa. Do đó, $S_{\mathrm{Max}}(F,X)$ và $S_{\mathrm{WMax}}(F,X)$ đều khác rỗng. Ta có

$$S_{\mathrm{Max}}(F,X) = \{3\},$$
$$S_{\mathrm{WMax}}(F,X) = \left[2\sqrt{2}, 3\right].$$

Trong trường hợp này, do F đều không osc, isc và lsc tại $x = 0$ và $x = 3$ nên các Định lý 3.1, Định lý 3.2 và Định lýs 3.4 không áp dụng được. Tính toán ta có:

$$S_{\mathrm{Min}}(F,X) = \emptyset,$$
$$S_{\mathrm{WMin}}(F,X) = \emptyset.$$



Hình 9. Đồ thị hàm số của ví dụ 3.5

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các phiên bản mở rộng của định lý Weierstrass cho hàm có giá trị khoảng trên không gian mêtric được trình bày. Các kết quả nhận được là mới và tổng quát cho định lý Weierstrass cổ điển. Nghiên cứu cũng đưa ra nhiều ví dụ cụ thể để so sánh và minh họa cho các kết quả thu được.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2023-21.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmad, I., Jayswal, A., Al-Homidan, S., & Banerjee, J. (2019). Sufficiency and duality in intervalvalued variational programming. *Neural Computing and Applications,* 31, 4423–4433. https://doi.org/10.1007/s00521-017-3307-y

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley, NewYork.

Chalco-Cano, Y., Rufían-Lizana, A., Román-Flores, H., & Jiménez-Gamero, M.D. (2013). Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49–6. https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.004

Gajek, L., & Zagrodny, D. (1994). Weierstrass theorem for monotonically semicontinuous functions. *Optimization*, 29, 199-203. https://doi.org/10.1080/02331939408843949

Ghosh, D. (2017). Newton method to obtain efficient solutions of the optimization problems with interval-valued objective functions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53, 709–731. DOI:10.1007/s12190-016-0990-2

Ghosh, D., Bhuiya, S. K., & Patra, L. K. (2018). A saddle point characterization of efficient solutions for interval optimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 58, 193–217. DOI:10.1007/s12190-017-1140-1

Ghosh, D., Chauhan, R. S., Mesiar, R., & Debnath, A. K., (2020a). Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*, 510, 317–340. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.09.023

Ghosh, D., Debnath, A. K., & Pedrycz, W. (2020b). A variable and a fixed ordering of intervals and their application in optimization with interval-valued functions. *International Journal of*

Approximate Reasoning, 121, 187–205. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.03.004

Ghosh, D., Singh, A., Shukla, K.K., & Manchanda, K. (2019). Extended Karush-Kuhn-Tucker condition for constrained interval optimization problems and its application in support vector machines. *Information Sciences*, 504, 276–292. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.07.017

Gong, D., Sun, J., & Miao, Z. (2016). A set-based genetic algorithm for interval many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22, 47–60. DOI: 10.1109/TEVC.2016.2634625

Khanh, P. Q., & Quan, N. H. (2019). Versions of the Weierstrass theorem for bifunctions and the solution existence in optimization. SIAM *Journal on Optimization*, 29, 1502-1523. https://doi.org/10.1137/18M1163774

Kumar, G., & Ghosh, D. (2023) Ekeland's variational principle for interval-valued functions. *Computational and Applied Mathematics, 42, Article number: 28*, https://doi.org/10.1007/s40314-022-02173-x

Martínez-Legaz, J. E. (2014). On Weierstrass extreme value theorem. *Optimization Letters*, 8, 391-393. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0587-0

Osuna-Gómez, R., Hernández-Jiménez, B., Chalco-Cano, Y., & Ruiz-Garzón, G. (2017). New efficiency conditions for multiobjective interval-valued programming problems. *Information Sciences*, 420, 235–248. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.022

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Singh, D., Dar, B. A., & Kim, D. (2016). KKT optimality conditions in interval valued multiobjective programming with generalized differentiable functions. *European Journal of Operational Research*, 254, 29–39. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.042

Tian, G., & Zhou, J. (1995). Transfer continuities, generalizations of the Weierstrass and maximum theorems: A full characterization. *Journal of Mathematical Economics*, 24, 81-303. https://doi.org/10.1016/0304-4068(94)00687-6

Zhang, Z., Wang, X., & Lu, J. (2018). Multi-objective immune genetic algorithm solving nonlinear interval-valued programming. *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* 67, 235–245. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.004

Zhang, C., & Huang, N. (2022). On Ekeland's variational principle for interval-valued functions with applications. *Fuzzy Sets and Systems,* 436,152–174. DOI:10.1016/j.fss.2021.10.003