Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2023.179

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO HÀM CÓ GIÁ TRỊ KHOẢNG DỰA TRÊN TÍNH NỬA LIÊN TỤC OUTER

Trần Văn Duy[1], Hà Nguyễn Huỳnh Anh[1], Đỗ Hồng Diễm[2] và Đinh Ngọc Quý[1*]
[1]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
[2]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Đại học Y Dược Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): dnquy@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 01/03/2023
Sửa bài (Revised): 03/04/2023
Duyệt đăng (Accepted): 07/04/2023

Title: *Ekeland's variational principle for interval-valued functions based on the outer semicontinuity*

Author(s): *Tran Van Duy[1], Ha Nguyen Huynh Anh[1], Do Hong Diem[2] and Dinh Ngoc Quy[1*]*

Affiliation(s): *[1]Can Tho University, [2]Can Tho University of Medicine and Pharmacy*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland được đưa ra cho hàm có giá trị khoảng trên không gian mêtric đủ dựa trên tính nửa liên tục outer. Các kết quả này là mới và khác biệt so với các kết quả nghiên cứu gần đây về chủ đề này. Các ví dụ được đưa ra để so sánh và minh họa cho kết quả chính.

Từ khoá: *Hàm có giá trị khoảng, nguyên lý biến phân Ekeland, tính nửa liên tục outer*

ABSTRACT

In this paper, some extended versions of Ekeland's variational principle were given for interval-valued functions on the complete metric spaces based on the outer semicontinuity. These results are novel and different from recent results on this topic. Examples are given to compare and illustrate the main results.

Keywords: *Ekeland's variational principle, interval-valued functions, outer semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Giải tích hàm khoảng được giới thiệu đầu tiên trong quyển chuyên khảo nổi tiếng của Moore (1966). Lý thuyết này đóng vai trò quan trọng trong toán học ứng dụng, đặc biệt trong lĩnh vực mờ hóa và thống kê. Wu (2007) đã đề xuất các khái niệm về giới hạn, tính liên tục, tính khả vi cho hàm khoảng. Ở đây, hàm khả vi theo nghĩa Hukuhara, dựa trên phép toán hiệu Hukuhara được đề xuất để tìm sự chênh lệch giữa hai khoảng đóng trong tập số thực. Phép toán hiệu Hukuhara vẫn có điểm hạn chế là không tồn tại trong nhiều trường hợp tính toán. Để khắc phục nhược điểm này, Stefanini & Bede (2009) dựa trên phép toán hiệu Hukuhara mở rộng để giới thiệu tính khả vi Hukuhara mở rộng cho hàm khoảng, được gọi là gH-khả vi. Trên cơ sở đó, Chalco-Cano et al. (2013) đã sử dụng khái niệm gH-đạo hàm để xây dựng các phép tính vi phân và các định lý nền tảng của giải tích hàm khoảng. Các khái niệm về đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng của hàm khoảng cũng được thảo luận bởi Ghosh (2017). Gần đây, trong bài báo của Ghosh et al. (2020) đã giới thiệu các khái niệm đạo hàm Gâteaux và đạo hàm Fréchet cho hàm khoảng dựa trên hàm tuyến tính khoảng.

Trong việc phát triển lý thuyết toán học để giải các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng, Ishibuchi & Tanka (1990) đã thảo luận cấu trúc sắp xếp thứ tự từng phần cho các khoảng. Bằng cách sử dụng các thứ tự từng phần này và phép toán hiệu Hukuhara, Wu (2007) đã đề xuất các điều kiện tối ưu dạng Karush–Kuhn–Tucker (KKT) cho bài toán tối ưu hàm khoảng (Interval Optimization Problem-IOP). Trong hai bài báo Wu (2008a, 2008b), tác giả đã giải quyết bốn dạng bài toán tối ưu hàm khoảng và trình bày các định lý đối ngẫu mạnh và yếu cho bài toán IOP dựa trên đạo hàm

Hukuhara. Chalco-Cano et al. (2013) đã sử dụng đạo hàm Hukuhara mở rộng để đưa ra điều kiện tối ưu dạng KKT cho bài toán IOP. Singh et al. (2016) đã nghiên cứu lớp các bài toán tối ưu đa mục tiêu cho hàm khoảng và đề xuất khái niệm nghiệm tối ưu Pareto cho lớp bài toán này. Không giống như các cách tiếp cận trước đó, Osuna-Gómez et al. (2017) đã đưa ra các điều kiện tối ưu hiệu quả hơn cho IOP mà không cần chuyển đổi nó thành bài toán tối ưu hóa có giá trị thực. Trong hai bài báo của Gong et al. (2016) và Zhang et al. (2018), các tác giả đã đề xuất các thuật toán để tìm nghiệm tối ưu của bài toán IOP. Ghosh et al. (2019) đã nghiên cứu các điều kiện tối ưu KKT tổng quát để giải các bài toán IOP có ràng buộc. Bên cạnh đó, nhiều tác giả khác cũng đã đề xuất các điều kiện tối ưu và các khái niệm nghiệm tối ưu cho các bài toán tối ưu hàm khoảng liên quan (Wolf, 2000; Ghosh, 2017; Ghosh et al., 2018; Ahmad et al., 2019).

Cho đến nay, trong hầu hết các công bố, các khái niệm nghiệm cực tiểu của bài toán tối ưu hàm khoảng đều được nghiên cứu trong điều kiện hàm mục tiêu là hàm khoảng liên tục, khả vi. Tuy nhiên, trong các bài toán thực tế, chúng ta có thể nhận được một hàm mục tiêu không liên tục hoặc không khả vi. Bên cạnh đó, đối với một bài toán tối ưu không trơn, không phải lúc nào ta cũng dễ dàng tìm được một nghiệm tối ưu chính xác. Trong những tình huống như vậy, các nghiên cứu cố gắng tìm nghiệm tối ưu xấp xỉ. Một trong các công cụ quan trọng và nền tảng của giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu để đưa ra sự tồn tại của điểm xấp xỉ cực trị là nguyên lý biến phân Ekeland (Ekeland, 1974). Trong bài báo gần đây của Zhang and Huang (2022), một phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm giá trị khoảng lần đầu tiên được đề xuất. Trong bài báo này, các định nghĩa mở rộng tự nhiên về tính nửa liên tục dưới, tính bị chặn dưới dựa trên quan hệ thứ tự tập cho hàm có giá trị khoảng được sử dụng để đưa ra phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland; đồng thời áp dụng phiên bản mới này để nghiên cứu kết quả tồn nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng và các bài toán tối ưu liên quan.

Trong bài báo này, các phiên bản mở rộng khác cho nguyên lý biến phân Ekeland hàm nhận giá trị khoảng dựa trên tính nửa liên tục outer được đưa ra. Kết quả nghiên cứu là mới và có điểm khác biệt so với các kết quả nghiên cứu gần đây về chủ đề này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, ta quy ước:

- (X, d) là không gian mêtric đủ.
- $\mathbb{R}$ là không gian thực và $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên.
- $\mathfrak{T}$ là tập hợp các khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{T} = \{[a, b]: a \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Trong trường hợp khoảng này chỉ có duy nhất một phần tử, để đơn giản ta có thể ký hiệu $a = [a, a]$. Phần tử $0 = [0,0]$.

Dưới đây, các định nghĩa về tính nửa liên tục của hàm thực được nhắc lại.

Định nghĩa 2.1. (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho hàm thực $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó,

(i) f được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại điểm $x_0 \in \operatorname{dom} f$ khi và chỉ khi

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0);$$

(ii) f được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại điểm $x_0 \in \operatorname{dom} f$ khi và chỉ khi

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0);$$

(iii) f được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in \operatorname{dom} f$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Từ định nghĩa trên, ta dễ dàng thấy rằng f liên tục tại điểm $x_0 \in \operatorname{dom} f$ khi và chỉ khi f đồng thời nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0.

Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới (tương ứng nửa liên tục trên, liên tục) trên tập $A \subset X$ nếu và chỉ nếu f là nửa liên tục dưới (tương ứng nửa liên tục trên, liên tục) tại mọi điểm $x \in A$. Trong trường hợp $A = X$, để đơn giản ta chỉ gọi f là nửa liên tục dưới (tương ứng nửa liên tục trên, liên tục).

Các đặc trưng cơ bản của một hàm thực nửa liên tục dưới được tổng hợp trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1 (Aubin & Ekeland, 1984**)** *Cho X là không gian mêtric và hàm thực $f : X \to \mathbb{R}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.*

(i) *Hàm f là hàm nửa liên tục dưới trên X;*

(ii)*Tập trên đồ thị $\operatorname{epi} f := \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$;*

(iii) *Tập mức dưới $lev_{\leq a} f := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$.*

Dưới đây, chúng ta giới thiệu khái niệm mở rộng cho tính nửa liên tục của hàm có giá trị khoảng. Định nghĩa này dựa trên định nghĩa nửa liên tục outer của hàm đa trị. Thuật ngữ nửa liên tục outer được đề xuất đầu tiên bởi Rockafellar and Wets (2009).

Định nghĩa 2.2. (Rockafellar & Wets, 2009) Cho $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, hàm F được gọi là *nửa liên tục outer* tại x_0 nếu với mọi lân cận U của $F(x_0)$, tồn tại lân cận V của x_0 sao cho

$$F(V) \subset U.$$

Nhận xét. Trong giải tích đa trị, bên cạnh định nghĩa nửa liên tục outer, chúng ta còn có định nghĩa giảm nhẹ hơn là hàm đa trị nửa liên tục outer Hausdorff . Trong bối cảnh hàm đa trị tổng quát thì hai khái niệm này là khác biệt, tuy nhiên trong trường hợp hàm có giá trị khoảng, vì ảnh $F(x)$ là tập đóng compact nên hai định nghĩa này hoàn toàn trùng nhau.

Định nghĩa 2.3. (Moore, 1966) Cho hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{I}$, $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{I}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, phép cộng, phép trừ và phép nhân vô hướng trong $\mathfrak{I}$ được định nghĩa như sau:

(i) $A + B := [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}]$.

(ii) $\lambda A := \begin{cases} [\lambda\underline{a}; \lambda\overline{a}] & \text{nếu } \lambda \geq 0, \\ [\lambda\overline{a}; \lambda\underline{a}] & \text{nếu } \lambda < 0. \end{cases}$

(iii) $A - B := A + (-B)$.

Định nghĩa 2.4. (Zhang & Huang, 2022) Cho khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{I}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{I}$. Ta xét quan hệ giữa hai khoảng trong I dưới đây:

$$A \preccurlyeq B \text{ nếu và chỉ nếu } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ và } \overline{a} \leq \overline{b}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra quan hệ $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự từng phần trong $\mathfrak{I}$. Khi A không nhỏ hơn B theo thứ tự $\preccurlyeq$ thì ta ký hiệu là $A \npreccurlyeq B$.

Ta nhắc lại tính bị chặn dưới của hàm thực ở định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 2.5. (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho hàm thực $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó,

(i) f được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực $a \in \mathbb{R}$ sao cho,

$$a \leq f(x), \forall x \in X.$$

(ii) f được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực $a \in \mathbb{R}$ sao cho,

$$f(x) \leq a, \forall x \in X.$$

(iii) f được gọi là *bị chặn* nếu f vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

Dựa vào định nghĩa thứ tự $\preccurlyeq$ trên khoảng, ta có mở rộng tự nhiên cho tính bị chặn dưới và trên của hàm có giá trị khoảng.

Định nghĩa 2.6. (Zhang & Huang, 2022) Cho $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó

(i) F được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại $A \in \mathfrak{I}$ sao cho,

$$A \preccurlyeq F(x), \forall x \in X.$$

(ii) F được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại $A \in \mathfrak{I}$ sao cho,

$$F(x) \preccurlyeq A, \forall x \in X.$$

(iii) F được gọi là *bị chặn* nếu F vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

Mệnh đề 2.2. Cho $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó,

(i) F là bị chặn dưới khi và chỉ khi tồn tại một số thực $a \in \mathbb{R}$ sao cho,

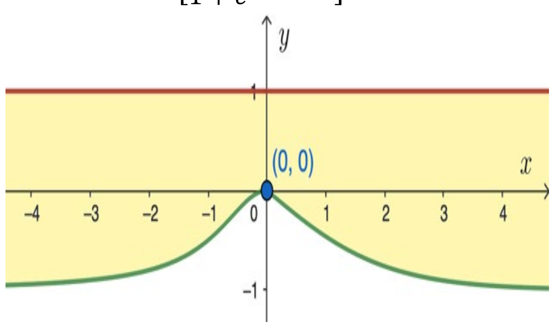
$$a \leq y, \ \forall y \in F(x), \forall x \in X.$$

(ii) F là bị chặn trên khi và chỉ khi tồn tại một số thực hữu hạn $a \in \mathbb{R}$ sao cho,

$$y \leq a, \ \forall y \in F(x), \forall x \in X.$$

Ví dụ 2.1. Cho $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{I}$ là hàm giá trị khoảng xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1+x^2} - 1, 1\right], & khi\ x < 0 \\ [0,0], & khi\ x = 0 \\ \left[\dfrac{2}{1+e^x} - 1, 1\right], & khi\ x > 0 \end{cases}$$



Hình 1. Đồ thị hàm bị chặn

Khi đó, F là hàm bị chặn dưới. Thật vậy, ta có đánh giá sau:

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 > -1,$$

và

$$\frac{2}{1+e^x} - 1 > -1.$$

Khi đó, tồn tại $A = [-1,0]$ thỏa

$$A \leq F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, cũng tồn tại số thực $a = -1$ thỏa

$$a \leq y,\ \forall y \in F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dưới đây, nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm thực được giới thiệu đầu tiên bởi Ivar Ekeland (1974).

Định lí 2.3. (Ekeland, 1974) Cho (X, d) là không gian mêtric đủ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực. Giả sử, f là nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

thì tồn tại $\overline{x} \in X$ sao cho:

(i) $f(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq f(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$;

(iii) $f(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > f(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

3. NGUYÊN LÍ BIẾN PHÂN EKELAND CHO HÀM CÓ GIÁ TRỊ KHOẢNG

Trong mục này, các dạng mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng được đưa ra dựa trên tính nửa liên tục outer.

Định lý 3.1. Cho (X, d) là không gian mêtric đủ và $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Giả sử rằng F là hàm nửa liên tục outer và bị chặn dưới. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \not\preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X \backslash \{\bar{x}\}.$$

Chứng minh

Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$\underline{f}(x) \coloneqq \min F(x).$$

Trước tiên, ta sẽ chứng minh $\underline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Thật vậy, với $x_0 \in X$ và $\varepsilon > 0$, xét tập mở $U = (\min F(x_0) - \varepsilon, \max F(x_0) + \varepsilon)$. Dễ thấy U là một lân cận của $F(x_0)$. Do F là hàm nửa liên tục outer tại x_0 nên theo định nghĩa tồn tại lân cận V của x_0 sao cho,

$$F(V) \subset U.$$

Khi đó, ta có, $\forall x \in V$,

$$F(x) \subset (\min F(x_0) - \varepsilon, \max F(x_0) + \varepsilon).$$

Suy ra

$$\min F(x_0) - \varepsilon < \min F(x), \forall x \in V.$$

Hay

$$\underline{f}(x_0) - \varepsilon < \underline{f}(x), \forall x \in V.$$

Từ đó, kéo theo

$$\underline{f}(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \inf \underline{f}(x).$$

Vậy $\underline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới tại x_0 với mọi $x_0 \in X$. Suy ra $\underline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới trên X.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\underline{f}$ là hàm bị chặn dưới. Thật vậy, vì F là hàm khoảng bị chặn dưới nên tồn tại khoảng đóng $A \in \mathfrak{I}$ sao cho

$$A \preccurlyeq F(x), \forall x \in X.$$

Do đó

$$\min A \leq \min F(x), \forall x \in X.$$

Để ý rằng $\underline{f}(x) = \min F(x)$. Suy ra, tồn tại số thực hữu hạn $a = \min A \in \mathbb{R}$, sao cho

$$a \leq \underline{f}(x), \forall x \in X.$$

Vậy $\underline{f}$ là hàm bị chặn dưới trên X.

Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lí biến phân Ekeland với hàm $\underline{f}$. Với số thực cố định $\varepsilon > 0$, vì hàm $\underline{f}$ bị chặn dưới nên $\inf_{x \in X} \underline{f}(x) > -\infty$. Do đó, theo định nghĩa của cận dưới đúng, tồn tại một điểm $x_0 \in X$ thoả

$$\underline{f}(x_0) \leq \inf_{x \in X} \underline{f}(x) + \varepsilon.$$

Khi đó mọi giả thiết của Định lý 2.3 đều thỏa mãn. Vậy tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho

(i) $\underline{f}(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq \underline{f}(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$;

(iii) $\underline{f}(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > \underline{f}(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

Từ kết quả (iii), ta dễ dàng suy ra được

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \not\preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X \backslash \{\bar{x}\}.$$

Vậy định lý được chứng minh xong. ■

Dưới đây là một phiên bản khác của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng.

Định lý 3.2. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ và hàm $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Giả sử rằng F là hàm nửa liên tục outer và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$\min F(x_0) \leq \inf_{x\in X}(\min F(x)) + \varepsilon.$$

Đặt

$$S_0 := \{x \in X: F(x) + \varepsilon d(x,x_0) \preccurlyeq F(x_0)\}.$$

Khi đó, nếu S_0 là tập đóng thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho :

(i) $F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x},x_0) \preccurlyeq F(x_0)$;

(ii) $d(\bar{x},x_0) \leq 1$;

(iii) $F(x) + \varepsilon d(x,\bar{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X\backslash\{\overline{x}\}$.

Chứng minh

Nhận xét rằng, $x_0 \in S_0$ nên $S_0 \neq \emptyset$. Vì S_0 đóng nên (S_0,d) cũng là một không gian mêtric đủ. Xét $\bar{F}: S_0 \to \mathfrak{I}$ là ánh xạ thu hẹp của F trên S_0. Áp dụng Định lý 3.1, khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in S_0$ sao cho

$$F(x) + \varepsilon d(x,\bar{x}) \not\preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in S_0\backslash\{\bar{x}\}.$$

Từ $\bar{x} \in S_0$, ta có (i) đúng. Ta kiểm tra (iii) đúng. Thật vậy, lấy $x \in X$, ta có hai trường hợp sau. Nếu $x \in S_0\backslash\{\bar{x}\}$ thì theo kết quả trên ta có (iii) đúng. Nếu $x \notin S_0$, giả sử rằng (iii) không đúng, tức là

$$F(x) + \varepsilon d(x,\bar{x}) \preccurlyeq F(\bar{x}).$$

Theo đó, kết hợp với (i) và bất đẳng thức tam giác, ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} F(x) + \varepsilon d(x,x_0) &\preccurlyeq F(x) + \varepsilon\big(d(x,x_0) + d(x,\bar{x})\big) \\ &\preccurlyeq \big(F(x) + \varepsilon d(x,\bar{x})\big) + \varepsilon d(x,x_0) \\ &\preccurlyeq F(\bar{x}) + \varepsilon d(x,x_0) \\ &\preccurlyeq F(x_0). \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x \notin S_0$. Vậy (iii) đúng trên X.

Để hoàn thành chứng minh, ta chỉ cần chứng minh (ii) đúng. Thật vậy, giả sử ngược lại $d(x_0,\bar{x}) > 1$, ta có

$$\begin{aligned} \inf_{x\in X}(\min F(x)) + \varepsilon &< \inf_{x\in X}(\min F(x)) + \varepsilon d(\bar{x},x_0) \\ &\leq \min F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x},x_0). \end{aligned}$$

Theo (i), ta lại có

$$\min F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x},x_0) \leq \min F(x_0).$$

Do đó kéo theo

$$\inf_{x\in X}(\min F(x)) + \varepsilon < \min F(x_0).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của điểm x_0. Do đó, ta có $d(\bar{x},x_0) \leq 1$. ■

Dưới đây là một dạng phát biểu khác của Định lý 3.2.

Định lý 3.3. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ và hàm $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Giả sử rằng F là hàm nửa liên tục outer và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$\min F(x_0) \leq \inf_{x\in X}(\min F(x)) + \varepsilon.$$

Đặt

$$S_0 := \left\{x \in X: F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x,x_0) \preccurlyeq F(x_0)\right\}.$$

Khi đó, ta có nếu S_0 là tập đóng thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho:

(i) $F(\overline{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x},x_0) \preccurlyeq F(x_0)$;

(ii) $d(\bar{x},x_0) \leq \lambda$;

(iii) $F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x,\bar{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X\backslash\{\overline{x}\}$.

Chứng minh

Đặt $d'(.,.) = \frac{1}{\lambda} d(.,.)$. Nhận xét rằng, không gian (X,d') cũng là không gian mêtric đủ. Áp dụng Định lý 3.2 với hàm khoảng cách d' thay cho hàm khoảng cách d ta dễ dàng có được các kết quả của Định lý 3.3. ■

Nhận xét 3.1. Định lý 3.1 – 3.3 là các dạng mở rộng khác của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng. Các kết quả này khác biệt so với kết quả của Định lý 3.1 của Zhang & Huang (2022). Điều đó được chỉ ra bởi các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.1. Cho $X = \mathbb{R}$ và hàm $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng được cho như sau:

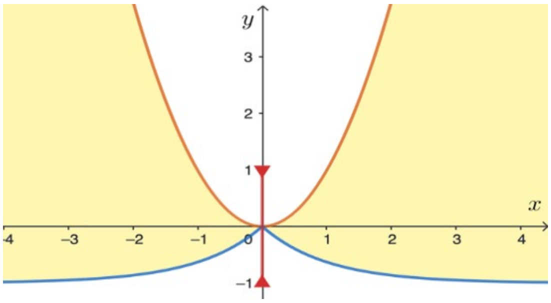
$$F(x) = \begin{cases} [e^{-|x|} - 1, x^2] & \text{nếu } x \neq 0, \\ [-1,1] & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Ta có hàm F có dạng $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ với:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \neq 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

và

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} e^{|x|} - 1 & \text{nếu } x \neq 0, \\ -1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$



Hình 2. Đồ thị minh hoạ ví dụ 3.1

Dễ thấy $\overline{f}$ không là hàm nửa liên tục dưới tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Zhang & Huang (2022) không áp dụng được. Tuy nhiên, trong trường hợp này, hàm F là nửa liên tục outer và bị chặn dưới nên các điều kiện của Định lý 3.1 thoả mãn. Tính toán trực tiếp ta có được với mọi $\varepsilon \in (0,1)$, thì mọi $\overline{x} \in \mathbb{R}$ đều thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \npreceq F(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.2. Cho $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 2, \varepsilon = 9$ và $\lambda = 9$. Xét hàm $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng được cho như sau:

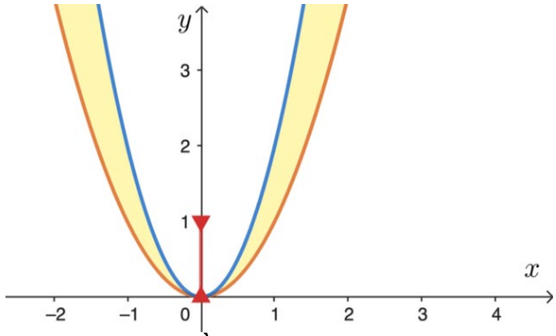
$$F(x) = \begin{cases} [x^2, 2x^2] & \text{nếu } x \neq 0 \\ [0,1] & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Ta có, hàm F có dạng $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ với

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{nếu } x \neq 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

và

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$



Hình 3. Đồ thị minh hoạ ví dụ 3.2

Dễ thấy $\overline{f}$ không là hàm nửa liên tục dưới tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Zhang & Huang (2022) không áp dụng được. Tuy nhiên, trong trường hợp này, hàm F là nửa liên tục outer và bị chặn dưới. Tính toán trực tiếp ta có tập $S_0 = [-1,2]$ là tập đóng nên mọi giả thiết của Định lý 3.3 thoả mãn. Tính toán trực tiếp ta có được với mọi $\overline{x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ đều thỏa (i)-(iii) của Định lý 3.3.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, dựa trên tính nửa liên tục outer của hàm giá trị khoảng, một số phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm khoảng đã được trình bày. Các tiếp cận này đã mang lại tính mới và khác biệt so với các kết quả nghiên cứu trước đây. Nhiều ví dụ cụ thể đã được đưa ra để so sánh và phân tích các ưu điểm của cách tiếp cận này.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số : T2023-07.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmad, I., Jayswal, A., Al-Homidan, S., & Banerjee, J. (2019). Sufficiency and duality in intervalvalued variational programming. *Neural Computing and Applications,* 31, 4423–4433. https://doi.org/10.1007/s00521-017-3307-y

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley, NewYork.

Chalco-Cano, Y., Rufían-Lizana, A., Román-Flores, H., & Jiménez-Gamero, M.D. (2013). Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49–6. https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.004

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47*(3), 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Ghosh, D. (2017). Newton method to obtain efficient solutions of the optimization problems with interval-valued objective functions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53, 709–731. DOI:10.1007/s12190-016-0990-2

Ghosh, D., Bhuiya, S. K., & Patra, L. K. (2018). A saddle point characterization of efficient solutions for interval optimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 58, 193–217. DOI:10.1007/s12190-017-1140-1

Ghosh, D., Chauhan, R. S., Mesiar, R., & Debnath, A. K., (2020). Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*, 510, 317–340. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.09.023

Ghosh, D., Debnath, A. K., & Pedrycz, W. (2020). A variable and a fixed ordering of intervals and their application in optimization with interval-valued functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 121, 187–205. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.03.004

Ghosh, D., Singh, A., Shukla, K. K., & Manchanda, K. (2019). Extended Karush-Kuhn-Tucker condition for constrained interval optimization problems and its application in support vector machines. *Information Sciences*, 504, 276–292. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.07.017

Gong, D., Sun, J., & Miao, Z. (2016). A set-based genetic algorithm for interval many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22, 47–60. DOI: 10.1109/TEVC.2016.2634625

Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research,* 48, 219–225. https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90375-L

Moore, R. E., (1966). *Interval Analysis*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Osuna-Gómez, R., Hernández-Jiménez, B., Chalco-Cano, Y., & Ruiz-Garzón, G. (2017). New efficiency conditions for multiobjective interval-valued programming problems. *Information Sciences*, 420, 235–248. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.022

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Stefanini, L., & Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* 71, 1311–1328. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005

Singh, D., Dar, B. A., & Kim, D. (2016). KKT optimality conditions in interval valued multiobjective programming with generalized differentiable functions. *European Journal of Operational Research*, 254, 29–39. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.042

Wolfe, M., (2000). Interval mathematics, algebraic equations and optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 124, 263–280. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00421-0

Wu, H. C., (2007). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Journal of Operational Research,* 176, 46–59. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007

Wu, H. C., (2008a). On interval-valued nonlinear programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338, 299–316. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.023

Wu, H. C. (2008). Wolfe duality for interval-valued optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 138, 497–509. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9396-0

Zhang, C., & Huang, N. (2022). On Ekeland's variational principle for interval-valued functions with applications. *Fuzzy Sets and Systems,* 436,152–174. DOI:10.1016/j.fss.2021.10.003

Zhang, Z., Wang, X., & Lu, J. (2018). Multi-objective immune genetic algorithm solving nonlinear interval-valued programming. *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* 67, 235–245. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.004