Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2023.090

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR THÔNG QUA TẬP CO-RADIANT

Lâm Quốc Anh[1], Phạm Thanh Dược[2], Võ Thị Mộng Thúy[3*] và Đặng Thị Mỹ Vân[4]
[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghệ Cần Thơ*
[3]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*
[4]*Khoa Đào tạo Giáo viên, Trường Cao đẳng Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Võ Thị Mộng Thúy (email: vtmthuy@tdu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 15/01/2023
Ngày nhận bài sửa: 06/03/2023
Ngày duyệt đăng: 14/03/2023

Title:
Existence of solutions of vector optimization problems via co-radiant sets

Từ khóa:
Bài toán tối ưu vector, nghiệm hữu hiệu yếu Benson, sự tồn tại, tập radiant, tập co-radiant

Keywords:
Benson weakly efficient solution, co-radiant set, existence, radiant set, vector optimization problem

ABSTRACT

This paper considers vector optimization problems via co-radiant sets and studies the existence conditions of the Benson weakly efficient solutions of these problems. Firstly, the properties of radiant sets and co-radiant sets were discussed. Then, models of vector optimization problems via co-radiant sets and their Benson weakly efficient solutions were proposed. Finally, using the linear scalarization method, sufficient conditions for these Benson weakly efficient solutions are formulated.

TÓM TẮT

Mô hình bài toán tối ưu vector thông qua tập co-radiant được xem xét và nghiên cứu các điều kiện tồn tại của nghiệm hữu hiệu yếu Benson cho các bài toán này. Trước tiên, các tính chất của tập radiant và tập co-radiant được thảo luận. Sau đó, mô hình bài toán tối ưu vector thông qua tập co-radiant và nghiệm hữu hiệu yếu Benson của chúng được đề xuất. Cuối cùng, bằng cách sử dụng phương pháp vô hướng hóa tuyến tính, các điều kiện đủ cho sự tồn tại của các nghiệm hữu hiệu yếu Benson này được thiết lập.

1. GIỚI THIỆU

Tối ưu vector là một lĩnh vực quan trọng của Toán học được nhiều người quan tâm trong những năm gần đây, có thể liệt kê một cách không đầy đủ một số công trình nghiên cứu tiêu biểu về lĩnh vực này được công bố bởi các nhà Toán học trong nước và trên thế giới như: Ehrgott (2005), Gutiérrez (2006), Patrone et al. (2007), Aubin and Frankowska (2009) và Jahn (2009). Từ những công trình đã công bố, cho thấy các chủ đề của tối ưu vector đã được các nhà Toán học khảo sát với nhiều kết quả thú vị, có ý nghĩa khoa học như: điều kiện tồn tại nghiệm (Kazmi, 1996; Lee & Kuk, 1998; Aubin & Frankowska, 2009; Anh et al., 2021), tính ổn định nghiệm (Miglierina & Molho, 2002; Aubin & Frankowska, 2009; Zhao et al., 2013; Lalitha & Chatterjee, 2015; Anh et al., 2018; Anh et al., 2020a), sự hội tụ nghiệm (Anh et al., 2020b), tính liên thông của tập nghiệm (Han & Huang, 2018; Anh et al., 2022).

Một đặc điểm quan trọng của tối ưu vector là chúng có rất nhiều dạng nghiệm khác nhau, tùy thuộc vào các phương án giải quyết các tình huống thực tế. Chính vì vậy, cho đến nay có nhiều dạng nghiệm hữu hiệu được các nhà Toán học đề xuất như nghiệm Edgeworth (Edgeworth, 1881), nghiệm Pareto (Pareto, 1906), nghiệm Geoffrion (Geoffrion, 1968), nghiệm Borwein (Borwein, 1977), nghiệm Benson (Benson, 1979), nghiệm Henig (Henig, 1982). Một trong những yếu tố mang tính chất quyết định dẫn đến các dạng nghiệm hữu hiệu như đã được đề cập ở trên chính là cấu trúc của nón thứ tự. Do đó, việc nghiên cứu các mô hình bài toán tối ưu bằng việc thay thế và mở rộng các cấu trúc nón là một chủ đề hay và được nhiều người quan tâm trong thời gian qua. Theo hướng nghiên cứu này, tập co-radiant được cho là có vai trò quan trọng, đặc biệt là đối với việc xấp xỉ nghiệm trong tối ưu vector. Gutiérrez et al. (2006) đã giới thiệu một loại nghiệm gần đúng mới để hợp nhất một số nghiệm gần đúng hiện có, đồng thời các tác giả cũng thiết lập kết quả vô hướng hóa phi tuyến cho các nghiệm gần đúng hợp nhất đó. Từ ý tưởng của Gutiérrez et al. (2006), Gao et al. (2011) đã giới thiệu một loạt các nghiệm hữu hiệu cho các bài toán tối ưu vector và thảo luận về mối quan hệ của chúng cũng như các điều kiện tối ưu cho các nghiệm này thông qua phương pháp vô hướng hóa phi tuyến. Sau đó, dựa trên khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, Zhao et al. (2015a) đã cung cấp một hàm phi tuyến tính vô hướng cho bài toán tối ưu hóa vector thông qua tập co-radiant và bằng cách sử dụng hàm này, các tác giả đã đề xuất nhiều loại nghiệm hữu hiệu cho bài toán liên quan và thu được nhiều phiên bản cải tiến của kết quả trong Gao et al. (2011). Gần đây, Gao and Xu (2019) cũng đã xem xét một số nghiệm hữu hiệu cho các bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu như nghiệm Benson, nghiệm Borwein, nghiệm xấp xỉ, nghiệm Henig và bằng cách sử dụng phương pháp vô hướng tuyến tính, nhóm tác giả đã thành công trong việc nghiên cứu các điều kiện tối ưu và mối quan hệ giữa các nghiệm này.

Lấy ý tưởng từ những công trình trên, nghiệm hữu hiệu yếu Benson ứng với tập co-radiant cho bài toán tối ưu vector và nghiên cứu các điều kiện tồn tại của nghiệm đó được đề xuất.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ là các không gian định chuẩn, $\mathcal{X}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$.

Định nghĩa 2.1. Tập $\mathcal{C} \subset \mathbb{Y}$ được gọi là *nón* nếu với mọi $x \in \mathcal{C}$ và mọi $\alpha > 0$ ta luôn có $\alpha x \in \mathcal{C}$. Nón $\mathcal{C}$ được gọi là nón có đỉnh nếu $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0_{\mathbb{Y}}\}$. Nón $\mathcal{C}$ được gọi là nón lồi nếu $\mathcal{C}$ là nón và là tập lồi.

Ví dụ 2.1. Trong $\mathbb{R}^2$, ta có $\mathbb{R}^2_+$ là nón lồi có đỉnh.

Giả sử $\mathbb{Y}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{Y}$. Ký hiệu nón đối cực $\mathcal{C}^*$ của $\mathcal{C}$ là:

$$\mathcal{C}^* := \{\ell \in \mathbb{Y}^* : \ell(y) \geq 0, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Cho $\mathbb{R}_+$ tập hợp các số thực không âm và $\mathcal{A}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$, ký hiệu bao đóng và phần trong của $\mathcal{A}$ lần lượt là $\mathrm{cl}\mathcal{A}$ và $\mathrm{int}\mathcal{A}$. Nón sinh ra bởi $\mathcal{A}$ ký hiệu là:

$$\mathrm{cone}(\mathcal{A}) := \{ta : t \geq 0, a \in \mathcal{A}\}.$$

Ta nói tập $\mathcal{A}$ là đặc nếu $\mathrm{int}\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Bổ đề 2.1. (Jahn, 2009, Bổ đề 3.21, tr. 77) Nếu $\mathbb{Y}$ là một không gian tô pô tuyến tính thực và $\mathcal{C}$ là nón lồi thỏa mãn $\mathrm{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì:

$$\mathrm{int}\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{Y} : \ell(y) > 0, \forall \ell \in \mathcal{C}^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}\}. \quad (2.1)$$

Định nghĩa 2.2. Một ánh xạ có giá trị vector $g: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là liên tục tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $g(x_0)$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $g(x) \in \mathcal{V}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$.

Dựa vào Định nghĩa 2.2, ta có định nghĩa hàm liên tục theo nón như sau:

Định nghĩa 2.3. (Anh et al., 2009) Một ánh xạ có giá trị vector $g: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *nửa liên tục dưới* theo nón $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $g(x_0)$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $g(x) \in \mathcal{V} + \mathcal{C}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(b) *nửa liên tục trên* theo nón $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $g(x_0)$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $g(x) \in \mathcal{V} - \mathcal{C}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(c) *liên tục* theo nón $\mathcal{C}$ tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó $\mathcal{C}$-usc và $\mathcal{C}$-lsc tại x_0.

Hàm g được gọi là liên tục (liên tục theo nón $\mathcal{C}$) trên tập $\mathcal{X} \subset \mathbb{X}$ nếu nó liên tục (liên tục theo nón $\mathcal{C}$) tại mọi điểm $x_0 \in \mathcal{X}$.

Nhận xét 2.1. Ta thấy rằng lớp hàm liên tục là tập con thực sự của lớp hàm liên tục theo nón (điều này được minh họa qua Chú ý 5.4 trong Luc, 1989). Các ví dụ sau đây cho thấy điều kiện nửa liên tục theo nón là nhẹ hơn so với liên tục.

Ví dụ 2.2. Xét ánh xạ $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Khi đó, D là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên tại $\sqrt{2}$ nhưng không liên tục tại $\sqrt{2}$.

Ví dụ 2.3. Xét ánh xạ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}, x\right), & x > 0, \\ (-1, -1), & x \leq 0. \end{cases}$$

Khi đó, g là $\mathbb{R}^2_+$-nửa liên tục dưới tại 0 nhưng không liên tục tại 0.

Bổ đề 2.2. Cho $x_0 \in \mathbb{X}$, $\ell \in \mathcal{C}^*$ và $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là ánh xạ có giá trị vector. Khi đó:

(a) $\ell \circ f$ nửa liên tục dưới tại x_0 nếu f nửa liên tục dưới theo $\mathcal{C}$ tại x_0;

(b) $\ell \circ f$ nửa liên tục trên tại x_0 nếu f nửa liên tục trên theo $\mathcal{C}$ tại x_0;

(c) $\ell \circ f$ liên tục tại x_0 nếu f liên tục theo $\mathcal{C}$ tại x_0.

Chứng minh.

(a) Ta cần chứng minh với mỗi $\gamma \in \mathbb{R}$ mà $\gamma < \ell(f(x_0))$ thì tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $\gamma < \ell(f(x))$ với mọi $x \in \mathcal{U}$. Vì $\gamma < \ell(f(x_0))$ và ℓ nửa liên tục dưới tại $f(x_0)$ nên ta có thể tìm được lân cận $\mathcal{V}$ của $f(x_0)$ sao cho:

$$\gamma < \ell(y), \quad \forall y \in \mathcal{V}. \tag{2.2}$$

Do f nửa liên tục dưới theo $\mathcal{C}$ tại x_0 nên với lân cận $\mathcal{V}$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $f(x) \in \mathcal{V} + \mathcal{C}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$. Khi đó, với mọi $x \in \mathcal{U}$, tồn tại $y \in \mathcal{V}$ thỏa $f(x) \in y + \mathcal{C}$. Từ $\ell \in \mathcal{C}^*$, ta suy ra:

$$\ell(y) \leq \ell(f(x)). \tag{2.3}$$

Kết hợp (2.2) và (2.3), ta được

$$\gamma < \ell(f(x)), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Vì vậy, $\ell \circ f$ nửa liên tục dưới tại x_0.

(b) Chứng minh tương tự ta cũng được kết quả (b).

(c) Suy ra từ kết quả (a) và (b). ■

Bổ đề 2.3. Cho $\mathcal{Y}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$, khi đó, nếu $\mathcal{Y} \cap \operatorname{int}\mathcal{C} = \emptyset$ thì

$$\operatorname{cl}\mathcal{Y} \cap \operatorname{int}\mathcal{C} = \emptyset.$$

Chứng minh.

Giả sử $\operatorname{cl}\mathcal{Y} \cap \operatorname{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì tồn tại $y \in \operatorname{cl}\mathcal{Y} \cap \operatorname{int}\mathcal{C}$. Do đó $y \in \operatorname{int}\mathcal{C}$ nên ta có thể tìm được lân cận $\mathcal{V}$ của $0_{\mathbb{Y}}$ sao cho $y + \mathcal{V} \subset \operatorname{int}\mathcal{C}$. Mặt khác, vì $y \in \operatorname{cl}\mathcal{Y}$ nên

$$(y + \mathcal{V}) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset.$$

Từ đó suy ra $\operatorname{int}\mathcal{C} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ mâu thuẫn. ■

Định nghĩa 2.4. (Gutiérrez et al., 2012) Tập $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathbb{Y}$ được gọi là *tập cải tiến* tương ứng với (t.ư.v) $\mathcal{C}$ nếu $0_{\mathbb{Y}} \notin \mathcal{E}$ và $\mathcal{E} + \mathcal{C} = \mathcal{E}$. Họ các tập cải tiến t.ư.v $\mathcal{C}$ trong $\mathbb{Y}$ ký hiệu là $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$.

Dễ thấy $\mathcal{C}\backslash\{0\} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$, $\operatorname{int}\mathcal{C} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ và $\mathbb{Y}\backslash(-\mathcal{C}) \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$.

3. TẬP RADIANT VÀ TẬP CO-RADIANT

Phần này nhắc lại định nghĩa và khảo sát các tính chất của tập radiant và tập co-radiant.

Định nghĩa 3.1. (Rubinov, 2013, Định nghĩa 5.1, tr.156) Một tập con khác rỗng $\mathcal{R}$ của $\mathbb{Y}$ được gọi là tập *radiant* nếu với mọi $r \in \mathcal{R}$ và $0 < \alpha \leq 1$ thì $\alpha r \in \mathcal{R}$.

Định nghĩa 3.2. (Rubinov, 2013, Định nghĩa 5.3, tr.159) Một tập con khác rỗng $\mathcal{D}$ của $\mathbb{Y}$ được gọi là tập *co-radiant* nếu với mọi $d \in \mathcal{D}$ và $\alpha \geq 1$ thì $\alpha d \in \mathcal{D}$.

Rõ ràng nón $\mathcal{C}$ vừa là tập radiant vừa là tập co-radiant.

Mối quan hệ giữa tập radiant và tập co-radiant được thể hiện qua bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Cho $\mathcal{R}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$ với $\mathcal{R} \neq \mathbb{Y}$. Khi đó, $\mathcal{R}$ là tập radiant khi và chỉ khi phần bù của nó $\mathcal{D} = \mathbb{Y}\backslash\mathcal{R}$ là tập co-radiant.

Chứng minh.

Lấy $y \in \mathcal{D}$ và $\alpha \geq 1$, suy ra $0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1$, giả sử $\alpha y \in \mathcal{R}$. Vì $\mathcal{R}$ là tập radiant nên $y = \frac{1}{\alpha}(\alpha y) \in \mathcal{R}$. Suy ra $y \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$, điều này vô lý vì $\mathcal{D} \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Do đó, $\alpha y \notin \mathcal{R}$ suy ra $\alpha y \in \mathcal{D}$ hay $\mathcal{D}$ là tập co-radiant.

Ngược lại, với $y \in \mathcal{R}$ và $0 < \lambda \leq 1$, giả sử rằng $\lambda y \in \mathcal{D}$. Vì $\mathcal{D} = \mathbb{Y}\backslash\mathcal{R}$ là tập co-radiant nên $y = \frac{1}{\lambda}(\lambda y) \in \mathcal{D}$. Suy ra $y \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$, điều này vô lý vì $\mathcal{D} \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Do đó, $\lambda y \in \mathcal{R}$, hay $\mathcal{R}$ là tập radiant. ■

Ta có các tính chất sau của tập co-radiant:

Bổ đề 3.2. Cho $\mathcal{D}$ là tập co-radiant. Khi đó

(a) với mọi $\varepsilon > 0, \varepsilon\mathcal{D}$ là tập co-radiant;

(b) với mọi $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, thì $\varepsilon_1\mathcal{D} \subset \varepsilon_2\mathcal{D}$;

(c) với mọi λ, $\mu > 0$, nếu $\mathcal{D}$ lồi thì

$$\lambda\mathcal{D} + \mu\mathcal{D} \subset \lambda\mathcal{D} \cap \mu\mathcal{D};$$

(d) với mọi $\varepsilon > 0, \operatorname{cone}(\mathcal{D}) = \operatorname{cone}(\varepsilon\mathcal{D})$.

Chứng minh.

(a) Với mọi $y \in \varepsilon\mathcal{D}$, ta có $y = \varepsilon d, d \in \mathcal{D}$ và $\mathcal{D}$ là tập co-radiant nên với $\alpha \geq 1$ thì $\alpha d \in \mathcal{D}$. Do đó

$$\alpha y = \alpha\varepsilon d = \varepsilon(\alpha d) \in \varepsilon\mathcal{D},$$

nên $\varepsilon\mathcal{D}$ là tập co-radiant.

(b) Với phần tử tùy ý $y \in \varepsilon_1\mathcal{D}$, ta tìm được $d \in \mathcal{D}$ sao cho $y = \varepsilon_1 d$. Điều này kết hợp với $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, suy ra

$$y = \varepsilon_1 d = \varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}d\right) \in \varepsilon_2\mathcal{D}.$$

(c) Với mọi $\varepsilon > 0$, thì $\mathcal{D} + \varepsilon\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Thật vậy, lấy $y \in \mathcal{D} + \varepsilon\mathcal{D}$ thì tồn tại $d_1,\ d_2 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$y = d_1 + \varepsilon d_2.$$

Do đó,

$$y = d_1 + \varepsilon d_2 = (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}d_1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}d_2\right) \in \mathcal{D}$$

khi $\mathcal{D}$ là tập lồi co-radiant. Do đó $\mathcal{D} + \varepsilon\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

Với mọi $\lambda,\ \mu > 0$, từ kết quả trên, ta có

$$\lambda\mathcal{D} + \mu\mathcal{D} = \lambda\left(\mathcal{D} + \tfrac{\mu}{\lambda}\mathcal{D}\right) \subset \lambda\mathcal{D},$$

và

$$\lambda\mathcal{D} + \mu\mathcal{D} = \mu\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\mathcal{D} + \mathcal{D}\right) \subset \mu\mathcal{D}.$$

Vậy $\lambda\mathcal{D} + \mu\mathcal{D} \subset \lambda\mathcal{D} \cap \mu\mathcal{D}$.

(d) Lấy tùy ý phần tử $y \in \operatorname{cone}(\mathcal{D})$ thì tồn tại $t \geq 0$ và $d \in \mathcal{D}$ sao cho $y = td$. Hơn nữa, với $\varepsilon > 0$ ta có

$$y = td = \tfrac{t}{\varepsilon}(\varepsilon d) \in \operatorname{cone}(\varepsilon\mathcal{D}).$$

Ngược lại, với bất kỳ $y \in \operatorname{cone}(\varepsilon\mathcal{D})$, ta tìm được $t \geq 0$ và $d \in \mathcal{D}$ để

$$y = t\varepsilon d = t_1 d \in \operatorname{cone}(\mathcal{D}), \text{ với } t_1 = t\varepsilon \geq 0.$$

Vậy $\operatorname{cone}(\mathcal{D}) = \operatorname{cone}(\varepsilon\mathcal{D})$. ■

Chiều ngược lại của Bổ đề 3.2 (c) là không đúng được minh họa qua ví dụ sau:

Ví dụ 3.1. Trong $\mathbb{R}$, cho $\mathcal{D} = [1, +\infty[$, xét $2\mathcal{D} = [2, +\infty[$, $3\mathcal{D} = [3, +\infty[$, thì

$$2\mathcal{D} \cap 3\mathcal{D} = [3, +\infty[,$$
$$2\mathcal{D} + 3\mathcal{D} = [5, +\infty[.$$

Rõ ràng $[3, +\infty[\not\subset [5, +\infty[$ nên

$$2\mathcal{D} \cap 3\mathcal{D} \not\subset 2\mathcal{D} + 3\mathcal{D}.$$

Bổ đề 3.3. Với $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}\backslash\{0_{\mathbb{Y}}\}$ là tập co-radiant lồi đặc và $\mathcal{K} = \operatorname{cone}(\mathcal{D})$ thì

(a) $\mathcal{K}$ là nón có đỉnh và $\mathcal{D} \cap (-\operatorname{int}\mathcal{K}) = \emptyset$;

(b) $\mathcal{K}$ là nón lồi;

(c) $\mathcal{D}$ là tập cải tiến ứng với $\mathcal{K}$.

Chứng minh.

(a) Do $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}\backslash\{0_{\mathbb{Y}}\}$, $\mathcal{C}$ là nón và

$$\operatorname{cone}(\mathcal{D}) = \mathcal{K} \subset \operatorname{cone}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}. \tag{3.1}$$

Mà $\mathcal{C}$ là nón có đỉnh nên ta suy ra

$$\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0_{\mathbb{Y}}\}. \tag{3.2}$$

Do đó, $\mathcal{K}$ là nón có đỉnh.

Mặc khác, vì $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$ nên (3.2) kéo theo

$$\mathcal{D} \cap (-\operatorname{int}\mathcal{K}) = \emptyset.$$

(b) Với các phần tử bất kỳ $y_1, y_2 \in \mathcal{K}$, tồn tại $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, $d_1,\ d_2 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$y_1 = \alpha_1 d_1, y_2 = \alpha_2 d_2.$$

Với $t \in [0,1]$, xét

$$\begin{aligned} ty_1 + (1-t)y_2 &= t\alpha_1 d_1 + (1-t)\alpha_2 d_2 \\ &= (t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2)\Bigg(\frac{t\alpha_1}{t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2}d_1 \\ &\qquad + \frac{(1-t)\alpha_2}{t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2}d_2\Bigg) \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

do $\mathcal{D}$ lồi. Từ đó suy ra $\mathcal{K}$ là nón lồi.

(c) Từ tính chất có đỉnh của nón $\mathcal{K}$ ta được

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D} + \mathcal{K}. \tag{3.3}$$

Vì $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}\backslash\{0_{\mathbb{Y}}\}$ nên $0_{\mathbb{Y}} \notin \mathcal{D}$. Lấy $y \in \mathcal{D} + \mathcal{K}$ thì tồn tại $d_1 \in \mathcal{D}$ và $k_1 \in \mathcal{K}$ thỏa mãn

$$y = d_1 + k_1.$$

Kết hợp với $\mathcal{K} = \operatorname{cone}(\mathcal{D})$ ta có thể tìm được $t \in \mathbb{R}^+, \mathrm{d}_2 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$y = d_1 + t\mathrm{d}_2.$$

Điều này kết hợp với Bổ đề 3.2 (c) suy ra $y \in \mathcal{D}$.

Do đó $\mathcal{D} + \mathcal{K} \subset \mathcal{D}$, kết hợp với (3.3) suy ra

$$\mathcal{D} + \mathcal{K} = \mathcal{D}.$$ ■

Sử dụng các kỹ thuật tương tự trong chứng minh Bổ đề 3.2, ta cũng thu được một số tính chất của tập radiant.

Bổ đề 3.4. Cho $\mathcal{R}$ là tập radiant. Khi đó

(a) với mọi $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\mathcal{R}$ là tập radiant;

(b) với mọi $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, thì $\varepsilon_2\mathcal{R} \subset \varepsilon_1\mathcal{R}$;

(c) với mọi $\lambda,\ \mu > 0$, nếu $\mathcal{R}$ lồi thì

$$\lambda\mathcal{R} + \mu\mathcal{R} \subset (\lambda+\mu)\mathcal{R}.$$

4. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR THÔNG QUA TẬP CO-RADIANT

Phần này khảo sát điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu vector thông qua tập co-radiant Ɗ.

Xét bài toán tối ưu vector (VOP):

$$(\text{VOP})\colon \min\ f(x)\ \text{ thỏa mãn }\ x \in \mathcal{X},$$

trong đó $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{Y}$ ánh xạ có giá trị vector và $\mathcal{X}$ là các tập con không rỗng của $\mathbb{X}$.

Từ Benson (1979) và Sheng (2002), ta có định nghĩa nghiệm hữu hiệu Benson và nghiệm hữu hiệu yếu Benson cho bài toán (VOP) như sau:

Định nghĩa 4.1. Phần tử $x_0 \in \mathcal{X}$ được gọi là

(a) (Benson, 1979) *nghiệm hữu hiệu Benson* của (VOP), ký hiệu $x_0 \in \text{BEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathcal{C}}$ nếu

$$\text{cl}\big(\text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(x_0) + \mathcal{C})\big) \cap (-\mathcal{C}) = \{0_{\mathbb{Y}}\};$$

(b) (Sheng, 2002) *nghiệm hữu hiệu yếu Benson* của (VOP), ký hiệu $x_0 \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathcal{C}}$ nếu

$$\text{cl}\big(\text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(x_0) + \mathcal{C})\big) \cap (-\text{int}\mathcal{C}) = \emptyset.$$

Với $Ɗ \subset \mathcal{C}$ là tập co-radiant cho trước, từ Định nghĩa 4.1, ta xét bài toán tối ưu vector thông qua tập co-radiant Ɗ, ký hiệu $(\text{VOP})_Ɗ$ như sau:

$$(\text{VOP})_Ɗ\colon\ \min\ f(x)\ \text{ thỏa mãn }\ x \in \mathcal{X},$$

trong đó $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{Y}$ ánh xạ có giá trị vector và $\mathcal{X}$ là các tập con không rỗng của $\mathbb{X}$.

Định nghĩa 4.2. Phần tử $x_0 \in \mathcal{X}$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu yếu Benson của* $(\text{VOP})_Ɗ$ *ứng với* Ɗ, ký hiệu $x_0 \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ$ nếu

$$\text{cl}\big(\text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(x_0) + Ɗ)\big) \cap (-\text{int}\mathcal{K}) = \emptyset,$$

với $\mathcal{K} = \text{cone}(Ɗ)$.

Nhận xét 4.1. Từ Bổ đề 3.2 (a) và (d), ta thấy rằng việc xem xét bài toán tối ưu thông qua tập co-radiant, thay vì xét tập co-radiant có dạng $\varepsilon Ɗ$, với $\varepsilon > 0$ thì ta chỉ cần xét đối với $\varepsilon = 1$.

Ví dụ 4.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{X} = [-1,1]$, $Ɗ = \{(x,y)\colon x \geq 1, y = 0\} \cup \{(x,y)\colon x = 0, y \geq 1\}$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+$ và $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$f(x) = (x, x^2),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $\mathcal{K} = \{(x,y)\colon x \geq 0, y = 0\} \cup \{(x,y)\colon x = 0, y \geq 0\}$,

và $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ = [-1,1]$.

Định lý 4.1. Giả sử

(i) $\mathcal{X}$ là tập compact;

(ii) f nửa liên tục dưới theo nón $\mathcal{K}$ trên $\mathcal{X}$.

Khi đó, tập nghiệm $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ$ khác rỗng.

Chứng minh.

Với $\ell \in \mathcal{K}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$, xét

$$S_\ell \coloneqq \big\{x \in \mathcal{X}\colon \ell(f(z) + d) \geq \ell\big(f(x)\big) \text{ với mọi } (z,d) \in \mathcal{X} \times Ɗ\big\}. \quad (4.1)$$

Áp dụng Bổ đề 2.2 (a) và tính nửa liên tục dưới của hàm f, hàm số $\ell \circ f$ là nửa liên tục dưới trên tập compact $\mathcal{X}$. Vì vậy, hàm $\ell \circ f$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathcal{X}$. Hay, tập hợp

$$E \coloneqq \big\{x \in \mathcal{X}\colon \ell\big(f(z)\big) \geq \ell\big(f(x)\big), \forall\, z \in \mathcal{X}\big\}$$

khác rỗng.

Vì $Ɗ \subset \mathcal{K}$ nên $\ell(d) \geq 0$ với mọi $d \in Ɗ$. Điều này kết hợp với sự khác rỗng của E dẫn đến tồn tại $x \in \mathcal{X}$ sao cho

$$\ell\big(f(z)\big) + \ell(d) \geq \ell\big(f(x)\big), \forall\, (z,d) \in\ \mathcal{X} \times Ɗ.$$

Suy ra S_ℓ khác rỗng với mọi $\ell \in \mathcal{K}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$.

Với mỗi $\ell_0 \in \mathcal{K}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$, lấy $\bar{x} \in S_{\ell_0}$, ta có

$$\ell_0(f(x)) + \ell_0(d) \geq \ell_0(f(\bar{x})), \forall (x,d) \in \mathcal{X} \times Ɗ. \quad (4.2)$$

Giả sử $\bar{x} \notin \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ$, tức là:

$$\text{cl}(\text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(\bar{x}) + Ɗ)) \cap (-\text{int}\mathcal{K}) \neq \emptyset,$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, ta được:

$$\text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(\bar{x}) + Ɗ) \cap (-\text{int}\mathcal{K}) \neq \emptyset.$$

Ta lấy:

$$y \in \text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(\bar{x}) + Ɗ) \cap (-\text{int}\mathcal{K}).$$

Từ đó suy ra $y \in (-\text{int}\mathcal{K})$, kết hợp điều này với (2.1), ta được:

$$\hat{\ell}(y) < 0, \quad (4.3)$$

Mặt khác, $y \in \text{cone}(f(\mathcal{X}) - f(\bar{x}) + Ɗ)$ nên tồn tại $\hat{t} > 0$ và $(\hat{z}, \hat{d}) \in \mathcal{X} \times Ɗ$ sao cho:

$$y = \hat{t}(f(\hat{z}) - f(\bar{x}) + \hat{d}).$$

Kết hợp kết quả này với (4.3) và tính chất tuyến tính của ℓ_0, suy ra:

$$\ell_0(f(\hat{z})) - \ell_0(f(\bar{x})) + \ell_0(\hat{d}) < 0,$$

hay $\ell_0\big(f(\hat{z})\big) + \ell_0\big(\hat{d}\big) < \ell_0\big(f(\bar{x})\big)$, điều này mâu thuẫn với (4.2). Vì vậy, $\bar{x} \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ$ nên $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_Ɗ$ khác rỗng. ■

Nhận xét 4.2. Theo sự hiểu biết của chúng tôi, chưa có bất kỳ một công bố nào cung cấp điều kiện đủ cho tập nghiệm hữu hiệu yếu Benson của bài toán $(\text{VOP})_{\mathrm{D}}$ ứng với D ngay cả trường hợp đặc biệt $\mathrm{D} = \mathcal{C}$. Do đó, Định lý 4.1 là mới.

Ví dụ sau đây minh họa cho Định lý 4.1.

Ví dụ 4.2. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}, \mathrm{D} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{R}_+^2$, và $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2), \quad \forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ta có $\mathcal{K} = \text{cone}(\mathrm{D}) = \mathbb{R}_+^2$.

Dễ thấy các điều kiện (i), (ii) của Định lý 4.1 đều thỏa mãn nên tập $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$ khác rỗng.

Hơn nữa, ta có:

$$f(\mathcal{X}) = \{(x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\},$$

và với mỗi $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{X}$,

$$f(\mathcal{X}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \mathrm{D}$$

$$= \left\{\left((x_1^2 + x_2^2) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + \frac{1}{2}, (x_1^2 + x_2^2) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + \frac{1}{2}\right) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} + \mathbb{R}_+^2.$$

Nếu $\bar{\boldsymbol{x}} \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$ thì với mọi $t \ge 0$ và với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, ta được:

$$t\left((x_1^2 + x_2^2) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + \frac{1}{2}\right) \ge 0,$$

và vì thế $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 \le \frac{1}{2}$.

Ngược lại, với $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ mà $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 \le \frac{1}{2}$, ta có:

$$\bar{x}_1{}^2 + \bar{x}_2{}^2 \le \frac{1}{2} + (x_1^2 + x_2^2),$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1.$$

Do đó, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1$, kéo theo

$$\left(\left\{\left((x_1^2 + x_2^2) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + \frac{1}{2}, (x_1^2 + x_2^2) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + \frac{1}{2}\right) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} + \mathbb{R}_+^2\right) \cap (-\text{int}\mathbb{R}_+^2) = \emptyset.$$

Vì vậy, $\bar{\boldsymbol{x}} \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$.

Kết quả là

$$\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}} = \left\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 \le \frac{1}{2}\right\}.$$

Phần còn lại của mục này trình bày các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm hữu hiệu yếu Benson của $(\text{VOP})_{\mathrm{D}}$ ứng với D mà không sử dụng tính compact của tập ràng buộc và tính nửa liên tục theo nón của hàm mục tiêu.

Định lý 4.2. Giả sử tồn tại $\ell \in \mathcal{K}^*$ và $m \in \mathbb{R}$ sao cho

(i) $\ell(d) > 0, \forall d \in \mathrm{D}$;

(ii) $\ell(f(x)) \ge m, \forall x \in \mathcal{X}$.

Khi đó, tập nghiệm $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$ khác rỗng.

Chứng minh.

Vì $\ell(d) > 0$ nên tồn tại $r \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\ell(d) > r > 0.$$

Do (ii) ta tìm được $\hat{x} \in \mathcal{X}$ sao cho:

$$\begin{aligned} \ell(f(\hat{x})) &\le \inf_{x \in \mathcal{X}} \ell(f(x)) + \frac{r}{2} \\ &\le \inf_{x \in \mathcal{X}} \ell(f(x)) + \frac{r}{2} + \ell(d) - r \\ &\le \inf_{x \in \mathcal{X}} \ell(f(x)) + \ell(d) - \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\ell(f(\hat{x})) \le \ell(f(x)) + \ell(d), \forall (x, d) \in \mathcal{X} \times \mathrm{D},$$

hay $\hat{x} \in S_\ell$. Bằng cách lập luận tương tự như Định lý 4.1 ta có $\hat{x} \in \text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$ nên $\text{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathrm{D}}$ khác rỗng. ■

Các ví dụ sau đây cho thấy Định lý 4.1 và Định lý 4.2 không so sánh được với nhau.

Ví dụ 4.3. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} =]-1,3]$, $\mathrm{D} = \{(x, y) : x \ge 1, 1 \le y \le x\} \cup [2, +\infty[\times [0,1]$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+^2$ và $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \left(x, \dfrac{-1}{x+1}\right), & x \ne -1 \\ (1,1), & x = -1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$f(\mathcal{X}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \le 3, -\infty < y = -\tfrac{1}{x+1} \le -\tfrac{1}{4}\},$$

Với $x_0 \in \mathcal{X}$ tùy ý, ta xét:

$$f(\mathcal{X}) - \left(x_0, \tfrac{-1}{x_0+1}\right) + \mathbb{R}_+^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - x_0 < x \le 3 - x_0, -\infty < y = -\tfrac{1}{x+x_0+1} + \tfrac{1}{x_0+1} \le -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{x_0+1}\right\} + \mathbb{R}_+^2.$$

Vì $-4 \leq -1 - x_0 < 0$ nên tồn tại $\bar{x}$ sao cho:

$$-1 - x_0 < \bar{x} < 0.$$

Khi đó: $\bar{y} = -\frac{1}{\bar{x}+x_0+1} + \frac{1}{x_0+1} < 0.$

Do đó

$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{cl}\big(\mathrm{cone}(f(\mathcal{X}) - f(x_0) + \mathbb{R}^2_+)\big) \cap (-\mathrm{int}\mathbb{R}^2_+).$

Nghĩa là $x_0 \notin \mathrm{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathcal{C}}$ với mọi $x_0 \in \mathcal{X}$, hay $\mathrm{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathcal{C}} = \emptyset$.

Mặt khác, với $\ell = (2, -1)$ thì các điều kiện của Định lý 4.2 thỏa mãn. Do đó, $\mathrm{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathfrak{D}}$ khác rỗng. Bằng cách tính trực tiếp ta có

$$0 \in \mathrm{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathfrak{D}}.$$

Tuy nhiên, vì tập $\mathcal{X}$ không compact nên Định lý 4.1 không thể áp dụng được cho trường hợp này.

Ví dụ 4.4. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} = [0, 1]$, $\mathfrak{D} = \{(0,0)\} \cup \{(x, y): 1 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq x\}$ và $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$f(x) = (x, x^2), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng tập $\mathcal{X}$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện (i), (ii) của Định lý 4.1 nên ta kết luận tập nghiệm $\mathrm{WBEff}(\mathcal{X}, f)_{\mathfrak{D}}$ khác rỗng. Trong khi đó, do $0 \in \mathfrak{D}$ nên điều kiện (i) của Định lý 4.2 không nghiệm đúng và vì vậy Định lý 4.2 không thể vận dụng vào trường hợp này.

5. KẾT LUẬN

Điều kiện tồn tại nghiệm hữu hiệu yếu Benson của bài toán tối ưu vector thông qua tập co-radiant bằng phương pháp vô hướng hóa tuyến tính đã được nghiên cứu. Với việc áp dụng các điều kiện liên tục giảm nhẹ theo nón (không cần đến giả thiết lồi đặc có đỉnh), các điều kiện đủ cho tính giải được của bài toán đang xét đã được thiết lập. Với những điều chỉnh thích hợp, cách tiếp cận và kỹ thuật được sử dụng trong bài báo này có khả năng vận dụng vào nhiều mô hình tối ưu thông qua tập co-radiant, đặc biệt là cho việc nghiên cứu các dạng nghiệm xấp xỉ trong tối ưu hóa.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là một phần kết quả đạt được trong đề tài nghiên cứu "Tính ổn định nghiệm của bài toán tối ưu vector thông qua tập cải tiến", được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Đô, mã số: 01.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., & Van Hung, N. (2018). Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems. *Computational and Applied Mathematics*, *37*(2), 1537-1549. https://doi.org/10.1007/s40314-016-0411-z

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2020a). On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems. *Optimization*, *69*(7-8), 1583-1599. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1646744

Anh, L. Q., Duy, T. Q., Hien, D. V., Kuroiwa, D., & Petrot, N. (2020b). Convergence of solutions to set optimization problems with the set less order relation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *185*(2), 416-432. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01657-2

Anh, L. Q., Hai, N. X., Nguyen, K. T., Quan, N. H., & Van, D. T. M. (2021). On the existence and stability of solutions to stochastic equilibrium problems. *RAIRO-Operations Research*, *55*, S705-S718. https://doi.org/10.1051/ro/2020001

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Duong, T. T. T. (2022). Connectedness properties of the efficient sets and the nondominated sets to vector optimization problems. *Optimization Letters*, *16*(8), 2457–2468. https://doi.org/10.1007/s11590-021-01841-x

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (2009). *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 474 pages. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0

Benson, H. P. (1979). An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *71*(1), 232-241. https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90226-9

Borwein, J. (1977). Proper efficient points for maximizations with respect to cones. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *15*(1), 57-63. https://doi.org/10.1137/0315004

Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences* (Vol. 10). CK Paul.

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization* (Vol. 491). Springer Science & Business Media, 322 pages.

Gao, Y., Yang, X., & Teo, K. L. (2011). Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. *Journal of Industrial & Management Optimization*, *7*(2), 483-496. https://doi.org/10.3934/jimo.2011.7.483

Gao, Y., & Xu, Z. (2019). Approximate proper efficiency for multiobjective optimization problems. *Filomat, 33*(18), 6091-6101. https://doi.org/10.2298/FIL1918091G

Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of mathematical analysis and applications, 22*(3), 618-630. https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90201-1

Gutiérrez, C., Jiménez, B., & Novo, V. (2006). A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, *17*(3), 688-710. https://doi.org/10.1137/05062648X

Gutiérrez, C., Jiménez, B., & Novo, V. (2012). Improvement sets and vector optimization, *European J. Oper. Res*, *223*(2), 304-311. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

Han, Y., & Huang, N. J. (2018). Existence and connectedness of solutions for generalized vector quasi-equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *179*(1), 65-85.

https://doi.org/10.1007/s10957-016-1032-9

Henig, M. I. (1982). Proper efficiency with respect to cones. *Journal of Optimization Theory and Applications, 36*(3), 387-407. https://doi.org/10.1007/BF00934353

Jahn, J. (2009). *Vector optimization*, Springer, Berlin, 470 pages.

https://doi.org/ 10.1007/978-3-540-24828-6

Kazmi, K. R. (1996). Existence of solutions for vector optimization. *Applied Mathematics Letters*, *9*(6), 19-22. https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00088-2

Lalitha, C. S., & Chatterjee, P. (2015). Stability and scalarization in vector optimization using improvement sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *166*(3), 825-843. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0686-4

Lee, G. M., & Kuk, H. (1998). Existence of solutions for vector optimization problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *220*(1), 90-98. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5821

Luc, D.T. (1989). *Theory of vector optimization*, Springer, Berlin, 183 pages. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

Miglierina, E., & Molho, E. (2002). Scalarization and stability in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *114*(3), 657-670. https://doi.org/10.1023/A:1016031214488

Pareto, V. (1906). L'ofelimità nei cicli non chiusi. *Giornale degli economisti*, *33*, 15-30.

Patrone, F., Pusillo, L., & Tijs, S. (2007). Multicriteria games and potentials. *Top*, *15*(1), 138-145.

https://doi.org/10.1007/s11750-007-0008-1

Rubinov, A. M. (2013). *Abstract convexity and global optimization* (Vol. 44). Springer Science & Business Media, 506 pages. https://doi.org/ 10.1007/978-1-4757-3200-9

Sheng, B. H. (2002). The weak benson proper efficient subgradient and the optimality conditions of set-valued optimization, *Journal of systems science and complexity*, *15*(1), 69–76.

Zhao, K. Q., & Yang, X. M. (2013). A unified stability result with perturbations in vector optimization. *Optimization Letters*, *7*(8), 1913-1919.

https://doi.org/10.1007/s11590-012-0533-1

Zhao, K. Q., Yang, X. M., & Peng, J. W. (2013). Weak E-optimal solution in vector optimization. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *17*(4), 1287-1302. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0533-1

Zhao, K., Chen, G., & Yang, X. (2015a). Approximate proper efficiency in vector optimization. *Optimization*, *64*(8), 1777-1793. https://doi.org/10.1080/02331934.2014.979818

Zhao, K. Q., & Yang, X. M. (2015b). E-Benson proper efficiency in vector optimization. *Optimization*, *64*(4), 739-752. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.798321