Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.097

QUỸ ĐẠO ĐỐI PHỤ HỢP CỦA MỘT LỚP NHÓM LIE GIẢI ĐƯỢC 7-CHIỀU

Lê Anh Vũ[1], Nguyễn Thị Cẩm Tú[2,3*] và Nguyễn Kim Ngân[4]

[1]*Khoa Toán kinh tế, Trường Đại học Kinh tế – Luật, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh*

[2]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[3]*Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh*

[4]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thị Cẩm Tú (email: camtu@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 16/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 05/06/2022
Ngày duyệt đăng: 29/06/2022

Title:
Coadjoint orbits of a class of 7-dimensional solvable Lie groups

Từ khóa:
Biểu diễn phụ hợp, biểu diễn đối phụ hợp, đại số Lie giải được, nhóm Lie giải được, quỹ đạo đối phụ hợp

Keywords:
Adjoint representation, coadjoint orbit, coadjoint representation, solvable Lie algebra, solvable Lie group

ABSTRACT

The orbit method, which is also known as the Kirillov theory, was first introduced by Kirillov in the early 1960's and remained a useful and powerful tool in representation theory of Lie groups as well as Lie algebras. The key of the Kirillov theory is concerned the coadjoint orbits of Lie groups. In this paper, the problem of describing the coadjoint orbits of a class of Lie groups corresponding to a subclass of 7-dimensional solvable Lie algebras, which has been recently classified, is considered. Namely, a description method based on the structure of Lie algebra is presented. By using this method, the geometry of the coadjoint orbits of the class of Lie groups under consideration is explicitly described.

TÓM TẮT

Phương pháp quỹ đạo hay còn gọi là lý thuyết Kirillov, được khởi xướng bởi Kirillov vào đầu những năm 60 của thế kỷ 20, đã trở thành một công cụ quan trọng trong lý thuyết biểu diễn nhóm Lie và đại số Lie. Chìa khóa của lý thuyết Kirillov chính là các quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie. Trong bài viết này, vấn đề mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp của lớp nhóm Lie tương ứng với một lớp đại số Lie giải được 7-chiều vừa được phân loại gần đây được xem xét. Cụ thể, một phương pháp mô tả quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie mà hoàn toàn dựa vào cấu trúc của đại số Lie tương ứng sẽ được giới thiệu. Sau đó, bằng cách áp dụng phương pháp này, các quỹ đạo đối phụ hợp của lớp nhóm Lie đang xét được mô tả tường minh.

1. GIỚI THIỆU

Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp là hai biểu diễn quan trọng trong lý thuyết biểu diễn nhóm Lie và đại số Lie. Với một nhóm Lie, biểu diễn đối phụ hợp là đối ngẫu của biểu diễn phụ hợp. Đồng thời, các biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của nhóm Lie luôn cảm sinh nên các biểu diễn tương ứng trên đại số Lie của nhóm Lie đó.

Khi nghiên cứu biểu diễn đối phụ hợp của nhóm Lie, mỗi quỹ đạo ứng với biểu diễn này, còn được gọi là quỹ đạo đối phụ hợp, giữ một vị trí trung tâm. Cụ thể, các quỹ đạo đối phụ hợp chính là chìa khóa của phương pháp quỹ đạo hay còn gọi là lý thuyết Kirillov. Lý thuyết này thiết lập sự tương ứng giữa các biểu diễn unita bất khả quy của một nhóm Lie với các quỹ đạo đối phụ hợp của nó (Kirillov, 1976, 2004). Lý thuyết được khởi xướng bởi Kirillov vào đầu những năm 60 của thế kỷ 20 và cho đến nay vẫn luôn là một công cụ quan trọng bậc nhất trong nghiên cứu biểu diễn nhóm Lie và đại số Lie. Chính vai trò trung tâm của các quỹ đạo đối phụ hợp mà việc nghiên cứu mô tả chúng là thực sự cần thiết.

Bên cạnh vấn đề biểu diễn, bài toán phân loại nhóm Lie và đại số Lie là một bài toán cơ bản, rất được quan tâm nghiên cứu. Giữa lớp các nhóm Lie liên thông, đơn liên và lớp các đại số Lie có sự tương ứng 1 – 1. Vì vậy, đối với bài toán phân loại, ta chỉ cần giải quyết trên lớp các nhóm Lie liên thông, đơn liên hoặc trên lớp các đại số Lie.

Bài toán phân loại các đại số Lie (hữu hạn chiều trên trường có đặc trưng 0) được quy về phân loại các đại số Lie nửa đơn và các đại số Lie giải được (Levi, 1905; Malcev, 1945). Trong khi các đại số Lie nửa đơn đã được giải quyết triệt để (Cartan, 1894; Gantmacher, 1939) thì phân loại các đại số Lie giải được lại phức tạp hơn nhiều và đến nay vẫn còn là bài toán mở. Các kết quả phân loại đầy đủ đã biết hầu như đều kết thúc ở số chiều tương đối thấp. Trong đó, các đại số Lie giải được 7-chiều cũng chỉ mới được phân loại đầy đủ gần đây. Ngay bên dưới, ta giới thiệu một lớp con của lớp các đại số Lie này.

Ký hiệu $\mathfrak{g}_{5,3}$ là đại số Lie lũy linh có một cơ sở $\{X_i\}_{i=1,\dots,5}$ với các móc Lie không tầm thường là

$$[X_1, X_2] = X_4,\ [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = X_5.$$

Đây là một trong chín đại số Lie lũy linh 5-chiều được phân loại bởi Dixmier (1958). Trong một nghiên cứu về phân loại các đại số Lie giải được với căn lũy linh cho trước, Snobl và Karásek (2010) đã chỉ ra rằng có duy nhất một đại số Lie giải được bất khả phân 7-chiều nhận $\mathfrak{g}_{5,3}$ làm căn lũy linh. Gần đây, bằng cách mở rộng căn lũy linh là đại số Lie $\mathfrak{g}_{5,3}$ bởi hai phần tử độc lập tuyến tính lũy linh, Tú (2020) cũng thu được kết quả tương tự. Theo đó, tất cả các đại số Lie thực giải được bất khả phân 7-chiều có căn lũy linh là $\mathfrak{g}_{5,3}$ luôn đẳng cấu với đại số Lie $\mathcal{L} = \mathrm{span}\{X_i\}_{i=1,\dots,7}$ với các móc Lie không tầm thường là

$$[X_1, X_2] = X_4,\ [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = X_5,$$
$$[X_6, X_1] = X_1,\ [X_6, X_3] = 2X_3,\ [X_6, X_4] = X_4,$$
$$[X_6, X_5] = 2X_5,\ [X_7, X_2] = X_2,\ [X_7, X_4] = X_4,$$
$$[X_7, X_5] = X_5.$$

Trong bài viết này, ta xét nhóm Lie liên thông, đơn liên tương ứng với đại số Lie $\mathcal{L}$ và nghiên cứu việc mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie này. Cụ thể, bài viết giới thiệu một phương pháp mô tả hoàn toàn dựa vào cấu trúc của đại số Lie tương ứng. Đây là phương pháp được đưa ra bởi Vũ (1990a, 1990b). Sau đó, bằng cách áp dụng phương pháp này, các quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie đang xét được mô tả tường minh.

Bài viết gồm 5 mục kể cả Mục 1 này. Mục 2 nhắc lại vài khái niệm cơ bản và kết quả đã biết mà có sử dụng về sau. Mục 3 giới thiệu phương pháp mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp của một nhóm Lie nhưng hoàn toàn dựa vào cấu trúc của đại số Lie tương ứng. Kết quả chính của bài viết sẽ được thành lập trong Mục 4. Cuối cùng là nhận xét kết luận.

Trong bài viết, các ký hiệu $\mathbb{N}$ và $\mathbb{R}$ lần lượt là tập các số tự nhiên và tập các số thực, còn $\mathbb{R}^n$ (với n nguyên dương) là không gian vectơ thực n-chiều.

2. ĐẠI SỐ LIE, NHÓM LIE VÀ K-QUỸ ĐẠO

2.1. Đại số Lie, nhóm Lie và đồng cấu

Định nghĩa 1. *Đại số Lie* $\mathcal{G}$ là một không gian vectơ cùng với ánh xạ song tuyến tính phản xứng $[.,.] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, còn được gọi là *móc Lie*, thỏa mãn đồng nhất thức Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

với mọi X, Y, Z thuộc $\mathcal{G}$.

Tùy vào trường cơ sở của $\mathcal{G}$ là thực hay phức mà ta có *đại số Lie thực* hay *đại số* Lie *phức*. Số chiều của không gian vectơ $\mathcal{G}$ cũng được gọi là *số chiều* của đại số Lie $\mathcal{G}$. Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *giải được* nếu dãy sau đây dừng

$$\mathcal{G}^0 := \mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}^1 := [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{G}^k := [\mathcal{G}^{k-1}, \mathcal{G}^{k-1}]$$

tức là tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\mathcal{G}^k = 0$.

Định nghĩa 2. Nhóm *Lie* G là một nhóm đồng thời cũng là một đa tạp khả vi sao cho phép toán nhóm $G \times G \to G: (x, y) \mapsto xy$ và phép lấy nghịch đảo $G \to G: x \mapsto x^{-1}$ đều khả vi.

Ghi chú 3. Theo kết quả cơ bản trong lý thuyết Lie, mỗi nhóm Lie G sẽ xác định duy nhất một đại số Lie, ký hiệu là $Lie(G)$, và được gọi là *đại số Lie của nhóm Lie* G. Ngược lại, với mỗi đại số Lie $\mathcal{G}$ cho trước, luôn tồn tại duy nhất nhóm Lie liên thông, đơn liên G sao cho $Lie(G) = \mathcal{G}$.

Ví dụ 4. Tập hợp $\mathrm{GL}(V)$ gồm các tự đẳng cấu tuyến tính trên không gian vectơ V là một nhóm Lie với phép hợp thành ánh xạ. Đại số Lie của nhóm Lie này chính là *đại số Lie tuyến tính tổng quát* $\mathrm{gl}(V)$ gồm tất cả các phép biến đổi tuyến tính trên V với móc Lie $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$.

Định nghĩa 5. Cho hai đại số Lie $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$. Ánh xạ tuyến tính (tương ứng, đẳng cấu tuyến tính) $f: \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ được gọi là *đồng cấu đại số* Lie (tương ứng, *đẳng cấu đại số Lie*) nếu $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ với mọi X, Y thuộc $\mathcal{G}_1$.

Định nghĩa 6. Cho hai nhóm Lie G_1, G_2 và ánh xạ $\phi: G_1 \to G_2$.

a. ϕ được gọi là đồng cấu nhóm Lie nếu nó là một đồng cấu nhóm và khả vi.

b. ϕ được gọi là đẳng cấu nhóm Lie nếu nó là một đẳng cấu nhóm và cả ϕ, ϕ^{-1} đều khả vi.

Ghi chú 7. Cho đồng cấu nhóm Lie $\phi: G_1 \to G_2$. Khi đó, đồng cấu ϕ luôn cảm sinh nên một đồng cấu đại số Lie $\phi_*: Lie(G_1) \to Lie(G_2)$ bằng cách lấy đạo hàm tại đơn vị.

2.2. Biểu diễn phụ hợp, biểu diễn đối phụ hợp và K-quỹ đạo

Cho nhóm Lie G. Ta sẽ luôn ký hiệu $\mathcal{G} = Lie(G)$ và $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$. Với mỗi $g \in G$, bằng cách lấy đạo hàm tại đơn vị, tự đẳng cấu trong $A_g: G \to G, A_g(x) := gxg^{-1} (\forall x \in G)$ cảm sinh nên tự đẳng cấu đại số Lie $(A_g)_*: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.

Định nghĩa 8. *Biểu diễn phụ hợp* của G trong $\mathcal{G}$ là đồng cấu nhóm Lie

$$Ad: G \to \mathrm{GL}(\mathcal{G}),\ g \mapsto Ad_g := (A_g)_* \quad (\forall g \in G).$$

Định nghĩa 9. *Biểu diễn đối phụ hợp* (hay *K-biểu diễn*) của G trong $\mathcal{G}$ là đồng cấu nhóm Lie

$$K: G \to \mathrm{GL}(\mathcal{G}^*),\ g \mapsto K_g$$

sao cho $(\forall g \in G, F \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G})$

$$\langle K_g(F), X\rangle := \langle F, Ad_{g^{-1}}(X)\rangle.$$

Định nghĩa 10. Mỗi quỹ đạo ứng với K-biểu diễn được gọi là *quỹ đạo đối phụ hợp* hay *K-quỹ đạo* của G (trong $\mathcal{G}^*$). K-quỹ đạo của G qua $F \in \mathcal{G}^*$ ký hiệu là Ω_F và ta có:

$$\Omega_F = \{K_g(F) :\ g \in G\}.$$

Đặc biệt, *số chiều của mỗi K-quỹ đạo của một nhóm Lie G luôn luôn là chẵn*. Để xác định số chiều của các K-quỹ đạo Ω_F, chúng ta thường xét dạng song tuyến tính, phản xứng Kirillov B_F trên $\mathcal{G}$ tương ứng với F như sau:

$$B_F(X,Y) = \langle F, [X,Y]\rangle \quad (\forall X, Y \in \mathcal{G}).$$

Theo Kirillov (1976) thì $\dim\Omega_F = \mathrm{rank} B_F$.

3. PHƯƠNG PHÁP MÔ TẢ K-QUỸ ĐẠO

Ta lấy $\mathcal{G}$ là đại số Lie thực giải được hữu hạn chiều, G là nhóm Lie liên thông, đơn liên mà $Lie(G) = \mathcal{G}$ và $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$.

Các K-quỹ đạo chính là chìa khóa của phương pháp quỹ đạo của Kirillov. Vì vậy, với mỗi nhóm Lie G, vấn đề được quan tâm là mô tả các K-quỹ đạo Ω_F của G qua mỗi $F \in \mathcal{G}^*$. Hơn nữa, chúng ta muốn có một phương pháp mô tả Ω_F trong trường hợp luật nhóm của G chưa được cho một cách tường minh mà chỉ biết rõ cấu trúc đại số Lie $\mathcal{G}$ tương ứng. Lúc này, việc khảo sát ánh xạ mũ và tính chất tự nhiên của nó là thật sự hữu ích.

Ghi chú 11. Với mỗi $X \in \mathcal{G}$, tồn tại duy nhất đồng cấu $\varphi_X: (\mathbb{R}, +) \to G$ sao cho $\varphi'_X(0) = X$.

Định nghĩa 12. *Ánh xạ mũ* của G là ánh xạ

$$exp: \mathcal{G} \to G,\ exp(X) := \varphi_X(1).$$

Nếu ánh xạ mũ $exp: \mathcal{G} \to G$ là một vi phôi thì G được gọi là *nhóm exponential*.

Ghi chú 13. Nhóm Lie $\mathrm{GL}(\mathcal{G})$ có đại số Lie là đại số tuyến tính tổng quát $\mathrm{gl}(\mathcal{G})$ (xem Ví dụ 4). Mặt khác, theo Ghi chú 7, biểu diễn phụ hợp $Ad: G \to \mathrm{GL}(\mathcal{G})$ cảm sinh nên một đồng cấu đại số Lie. Đồng cấu được cảm sinh này chính xác là biểu diễn phụ hợp $ad: \mathcal{G} \to \mathrm{gl}(\mathcal{G}), ad_X(Y) := [X,Y]$ của đại số Lie $\mathcal{G}$. Hơn nữa, biểu đồ dưới đây giao hoán

$$\begin{array}{ccccc} & G & \xrightarrow{Ad} & \mathrm{GL}(\mathcal{G}) & \\ exp & \uparrow & & \uparrow & exp \\ & \mathcal{G} & \xrightarrow[ad]{} & \mathrm{gl}(\mathcal{G}) & \end{array} \qquad (*)$$

Vũ (1990) đã giới thiệu một phương pháp mô tả K-quỹ đạo của nhóm Lie mà hoàn toàn chỉ dựa vào cấu trúc của đại số Lie tương ứng. Phương pháp này được áp dụng cho toàn bộ các nhóm Lie exponential và một số lớp nhóm Lie đặc biệt khác. Ý tưởng chính của phương pháp là đưa về xem xét, mô tả tập hợp

$$\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_X :\ X \in \mathcal{G}\},$$

trong đó, $F_X \in \mathcal{G}^*$ được xác định bởi

$$\langle F_X, Y\rangle = \langle F, exp(ad_X)(Y)\rangle \quad (\forall Y \in \mathcal{G}).$$

Do sự giao hoán của $(*)$ nên $\Omega_F(\mathcal{G}) \subseteq \Omega_F$. Trong trường hợp đẳng thức xảy ra, ta có ngay sự mô tả cần thiết thông qua việc mô tả $\Omega_F(\mathcal{G})$. Do đó, vấn đề quan tâm là nghiên cứu tìm điều kiện của nhóm Lie để thu được đẳng thức này. Vũ (1990a, 1990b) đã chỉ ra các điều kiện đủ để $\Omega_F(\mathcal{G}) = \Omega_F$ thể hiện trong hai mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 14. Nếu G là nhóm exponential thì $\Omega_F(\mathcal{G}) = \Omega_F$ với mọi $F \in \mathcal{G}^*$.

Mệnh đề 15. Nếu họ $\{\Omega_F(\mathcal{G})\}_{F\in\mathcal{G}^*}$ lập thành một phân hoạch của $\mathcal{G}^*$ và mọi $\Omega_{F'}(\mathcal{G}), F' \in \Omega_F$ đều cùng mở hoặc cùng đóng (tương đối) trong Ω_F, $F \in \mathcal{G}^*$ thì $\Omega_F(\mathcal{G}) = \Omega_F$ với mọi $F \in \mathcal{G}^*$.

Kết quả nghiên cứu là việc mô tả các K-quỹ đạo của nhóm Lie liên thông, đơn liên mà đại số Lie của nó chính là đại số Lie $\mathcal{L}$ (Mục 1). Nhóm Lie đang xét là nhóm exponential, do đó, phương pháp của Vũ (1990a, 1990b) được áp dụng trong việc mô tả các K-quỹ đạo thông qua cấu trúc đại số Lie tương ứng.

Trước khi sang mục kết quả chính, ta nhắc lại một điều kiện cần và đủ cho tính exponential của nhóm Lie G. Một điều kiện cần và đủ về tính exponential của nhóm Lie được cho bởi mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 16. Nhóm Lie G là exponential, khi và chỉ khi với mọi $X \in \mathcal{G}$ toán tử ad_X không có giá trị riêng thuần ảo nào (Diệp, 1999).

4. KẾT QUẢ CHÍNH

Xét đại số Lie $\mathcal{L}$ (Mục 1), ký hiệu L là nhóm Lie liên thông, đơn liên sao cho $Lie(L) = \mathcal{L}$ và $\mathcal{L}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{L}$ với cơ sở đối ngẫu $\{X_i^*\}_{i=1,\dots,7}$. Với mỗi $X \in \mathcal{L}$, toán tử ad_X được đồng nhất với ma trận của nó trong cơ sở $\{X_i\}_{i=1,\dots,7}$ của $\mathcal{L}$.

Trước hết, ta chứng minh L là nhóm exponential và khảo sát số chiều các K-quỹ đạo của L.

Mệnh đề 17. L là nhóm exponential.

Chứng minh. Với mọi $X \in \mathcal{L}$, giả sử $X = \sum_{i=1}^{7} x_i X_i$ $(x_i \in \mathbb{R})$, ta tìm được các giá trị riêng của ad_X là

$$0\ ;\ x_6\ ;\ x_7\ ;\ 2x_6\ ;\ x_6 + x_7\ ;\ 2x_6 + x_7.$$

Vì ad_X không có giá trị riêng thuần ảo nên theo Mệnh đề 16, L là nhóm exponential. ■

Ký hiệu $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*) \in \mathcal{L}^*$ nghĩa là $X^* \in \mathcal{L}^*$ và X^* có tọa độ là $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*)$ đối với cơ sở đối ngẫu $\{X_i^*\}_{i=1,\dots,7}$ của $\mathcal{L}^*$.

Mệnh đề 18. Giả sử $F(f_1, f_2, \dots, f_7) \in \mathcal{L}^*$. Số chiều K-quỹ đạo Ω_F của L qua F luôn thuộc tập $\{0, 2, 4, 6\}$, trong đó

- $\dim\Omega_F = 0$ nếu $f_i = 0$ $(\forall i = 1, \dots, 5)$,
- $\dim\Omega_F = 2$ nếu

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = f_3 = f_4 = f_5 = 0;\ f_2 \neq 0 \\ f_2 = f_4 = f_5 = 0;\ f_1^2 + f_3^2 \neq 0, \end{array}\right.$$

- $\dim\Omega_F = 4$ nếu

$$\left[\begin{array}{l} f_4 = f_5 = 0;\ (f_1 f_2)^2 + (f_2 f_3)^2 \neq 0 \\ f_3 = f_5 = 0;\ f_4 \neq 0, \end{array}\right.$$

- $\dim\Omega_F = 6$ nếu $f_5^2 + (f_3 f_4)^2 \neq 0$.

Chứng minh. Theo Mục 2.2, $\dim\Omega_F = \mathrm{rank}B_F$ với

$$B_F = \begin{pmatrix} \langle F, [X_1, X_1]\rangle & \cdots & \langle F, [X_1, X_7]\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle F, [X_7, X_1]\rangle & \cdots & \langle F, [X_7, X_7]\rangle \end{pmatrix}.$$

Tính toán trực tiếp, ta được ma trận B_F là

$$\begin{pmatrix} 0 & f_4 & 0 & f_5 & 0 & -f_1 & 0 \\ -f_4 & 0 & f_5 & 0 & 0 & 0 & -f_2 \\ 0 & -f_5 & 0 & 0 & 0 & -2f_3 & 0 \\ -f_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_4 & -f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2f_5 & -f_5 \\ f_1 & 0 & 2f_3 & f_4 & 2f_5 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & f_4 & f_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu $f_i = 0$ $(\forall i = 1, \dots, 5)$ thì $\mathrm{rank}B_F = 0$. Ngược lại, xét $\sum_{i=1}^{5} f_i^2 \neq 0$, ta có

- $\mathrm{rank}B_F = 2$ khi trong các f_i $(i = 1, \dots, 5)$ chỉ có duy nhất $f_1 \neq 0$ hoặc $f_2 \neq 0$ hoặc $f_3 \neq 0$ hoặc tích $f_1 f_3 \neq 0$.
- $\mathrm{rank}B_F = 4$ trong hai trường hợp sau:
    - Trong các f_i $(i = 1, \dots, 5)$ chỉ có duy nhất tích $f_1 f_2 \neq 0$ hoặc $f_2 f_3 \neq 0$ hoặc $f_1 f_2 f_3 \neq 0$.
    - $f_3 = f_5 = 0;\ f_4 \neq 0$.
- $\mathrm{rank}B_F = 6$ khi $(f_5 = 0;\ f_3 f_4 \neq 0)$ hoặc khi $f_5 \neq 0$.

Do đó, định lý được chứng minh. ■

Chú ý 19. Việc mô tả các K-quỹ đạo Ω_F của L được quy về mô tả tập hợp $\Omega_F(\mathcal{L})$, trong đó $exp(ad_X)$ cần được xác định với mọi $X \in \mathcal{L}$. Maple được sử dụng để thực hiện việc tính toán này, ta được:

$$exp(ad_X) = \begin{pmatrix} e^{x_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & e^{x_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & e^{2x_6} & 0 & 0 & p & 0 \\ q & r & 0 & e^{x_6+x_7} & 0 & s & t \\ u & v & w & x & e^{2x_6+x_7} & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

với $X = \sum_{i=1}^{7} x_i X_i \in \mathcal{L}$ $(x_i \in \mathbb{R})$, $F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ và

$m = -x_1F(x_6)$, $\quad n = -x_2F(x_7)$,
$p = -2x_3F(2x_6)$, $\quad q = ne^{x_6}$, $\quad r = -me^{x_7}$,
$s = \frac{x_1x_2}{x_6+x_7}(e^{x_6}F(x_7) - F(x_6)) - x_4F(x_6 + x_7)$,
$t = \frac{-x_1x_2}{x_6+x_7}(e^{x_7}F(x_6) - F(x_7)) - x_4F(x_6 + x_7)$,
$u = te^{x_6}$, $\quad v = \frac{1}{2}(m^2 + p)e^{x_7}$,
$w = -ne^{2x_6}$, $\quad x = -me^{x_6+x_7}$,

$y = \frac{1}{x_6(x_6+x_7)x_7(2x_6+x_7)}[e^{2x_6}x_2x_3(2x_6^2 + 3x_6x_7 + x_7^2) + e^{2x_6+x_7}x_1x_7(x_1x_2 - x_4x_7) + (x_6 + x_7)(-2e^{2x_6+x_7}x_2x_3x_6 - 2e^{2x_6+x_7}x_5x_6x_7 - x_2x_3x_7 + 2x_5x_6x_7) + (2x_6 + x_7)(e^{x_6+x_7}x_1x_4x_7 - e^{x_6+x_7}x_1^2x_2 + e^{x_6}x_1^2x_2 - e^{x_6}x_1x_4x_7) + x_1x_7(x_4x_7 - x_1x_2)]$,

$z = -\frac{1}{2}\frac{1}{x_7x_6^2(x_6+x_7)(2x_6+x_7)}[(x_6 + x_7)(e^{2x_6+x_7}x_1^2x_2x_7 + 2e^{2x_6+x_7}x_1x_4x_6x_7 - e^{2x_6+x_7}x_2x_3x_6x_7 + 2e^{2x_6+x_7}x_5x_6^2x_7 - 2e^{x_6+x_7}x_1^2x_2x_7 - 2e^{x_6+x_7}x_1x_4x_6x_7 - 2x_3x_2x_6^2 - 2x_5x_6^2x_7) + (2x_6 + x_7)(e^{x_7}x_1^2x_2x_6 + e^{x_7}x_2x_6^2x_3) + e^{x_7}x_7^2x_2(x_3x_6 + x_1) + 2x_1x_6^2(x_4x_7 - x_1x_2)]$.

Định lý 20. (Tập hợp các K-quỹ đạo của L). Tập hợp tất cả các K-quỹ đạo của L lập thành một phân hoạch của $\mathcal{L}^* (\equiv \mathbb{R}^7)$. Hơn nữa, với $F(f_1, f_2, \dots, f_7) \in \mathcal{L}^*$, K-quỹ đạo của L qua F là tập hợp $\Omega_F = \{X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*)\} \subseteq \mathcal{L}^* \equiv \mathbb{R}^7$, trong đó:

$x_1^* = f_1e^{x_6} + f_4q + f_5u$

$x_2^* = f_2e^{x_7} + f_4r + f_5v$

$x_3^* = f_3e^{2x_6} + f_5w$

$x_4^* = f_4e^{x_6+x_7} + f_5x$

$x_5^* = f_5e^{2x_6+x_7}$

$x_6^* = f_1m + f_3p + f_4s + f_5y + f_6$

$x_7^* = f_2n + f_4t + f_5z + f_7$.

($x_6, x_7, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ được xác định như trong Chú ý 19).

Chứng minh. Hiển nhiên tập hợp các K-quỹ đạo luôn lập thành một phân hoạch của $\mathcal{L}^* (\equiv \mathbb{R}^7)$. Mệnh đề 17 khẳng định $\Omega_F = \Omega_F(\mathcal{L})$. Mặt khác, bằng những tính toán trực tiếp, ta được:

$$\Omega_F(\mathcal{L}) = \{X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*)\} \subseteq \mathcal{L}^* \equiv \mathbb{R}^7,$$

trong đó:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \\ x_7^* \end{pmatrix} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \times exp(ad_X)$$

và ma trận $exp(ad_X)$ (với $X = \sum_{i=1}^{7} x_iX_i \in \mathcal{L}$) đã được tính cụ thể trong Chú ý 19. Từ đây, ta được điều cần chứng minh. ■

Để hình dung trực quan hơn, ta mô tả tường minh bức tranh hình học của một lớp K-quỹ đạo của L, cụ thể là lớp các quỹ đạo 2-chiều.

Định lý 21. (Hình học các K-quỹ đạo 2-chiều của L). Giả sử $F(f_1, f_2, \dots, f_7) \in \mathcal{L}^*$ và K-quỹ đạo của L qua F là $\Omega_F = \{X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*)\} \subseteq \mathcal{L}^* \equiv \mathbb{R}^7$. Họ tất cả các K-quỹ đạo 2-chiều của L gồm các nửa mặt phẳng và các mặt trụ parabol như bên dưới.

a. Nếu $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$ và $f_1 \neq 0$ thì Ω_F là nửa mặt phẳng 2-chiều xác định như sau

$$\Omega_F = \{X^*: f_1x_1^* > 0, x_6^* \in \mathbb{R}, x_2^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0, x_7^* = f_7\}.$$

b. Nếu $f_1 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$ và $f_2 \neq 0$ thì Ω_F là nửa mặt phẳng 2-chiều xác định như sau

$$\Omega_F = \{X^*: f_2x_2^* > 0, x_7^* \in \mathbb{R}, x_1^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0, x_6^* = f_6\}.$$

c. Nếu $f_1 = f_2 = f_4 = f_5 = 0$ và $f_3 \neq 0$ thì Ω_F là nửa mặt phẳng 2-chiều xác định như sau

$$\Omega_F = \{X^*: f_3x_3^* > 0, x_6^* \in \mathbb{R}, x_1^* = x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0, x_7^* = f_7\}.$$

d. Nếu $f_2 = f_4 = f_5 = 0$ và $f_1f_3 \neq 0$ thì Ω_F là mặt trụ parabol 2-chiều xác định như sau

$$\Omega_F = \{X^*: \frac{(x_1^*)^2}{f_1^2} = \frac{x_3^*}{f_3}, x_6^* \in \mathbb{R}, x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0, x_7^* = f_7\}.$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 18, các K-quỹ đạo 2-chiều chỉ qua những điểm F có tọa độ thỏa mãn

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = f_3 = f_4 = f_5 = 0;\ f_2 \neq 0 \\ f_2 = f_4 = f_5 = 0;\ f_1^2 + f_3^2 \neq 0. \end{array}\right.$$

Kết hợp Định lý 20, ta có:

- Trường hợp $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$, $f_1 \neq 0$ thì

$x_1^* = f_1e^{x_6}$, $\quad x_2^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$,

$x_6^* = f_1m + f_6$, $\quad x_7^* = f_7$.

Rõ ràng, x_1^* luôn cùng dấu f_1 hay $f_1 x_1^* > 0$; còn x_6^* chạy khắp một đường thẳng thực. Do đó, Ω_F là nửa mặt phẳng 2-chiều xác định như ở (a). Các trường hợp ở (b) và (c) chứng minh hoàn toàn tương tự.

- Trường hợp $f_2 = f_4 = f_5 = 0$, $f_1 f_3 \neq 0$ thì

$$x_1^* = f_1 e^{x_6}, \qquad x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0,$$
$$x_3^* = f_3 e^{2x_6}, \qquad x_6^* = f_1 m + f_3 p + f_6,$$
$$x_7^* = f_7.$$

Rõ ràng, các tọa độ x_1^* và x_3^* thỏa mãn phương trình $\frac{(x_1^*)^2}{f_1^2} = \frac{x_3^*}{f_3}$; còn x_6^* cũng chạy khắp một đường thẳng thực. Do đó, Ω_F là mặt trụ parabol 2-chiều xác định như ở (d). ■

5. KẾT LUẬN

Phương pháp mô tả quỹ đạo đối phụ hợp (hay K-quỹ đạo) của nhóm Lie đã được giới thiệu trong bài viết. Điểm hữu ích của phương pháp này là hoàn toàn sử dụng cấu trúc đại số Lie tương ứng và áp dụng được trên các nhóm Lie exponential. Theo đó, ta áp dụng phương pháp và xác định được các K-quỹ đạo của nhóm Lie liên thông, đơn liên có đại số Lie là $\mathcal{L}$ (đây là đại số Lie bất khả phân duy nhất trong lớp các đại số Lie 7-chiều có căn lũy linh 5-chiều là $\mathfrak{g}_{5,3}$). Các K-quỹ đạo được xác định có đủ 4 tầng quỹ đạo gồm 0, 2, 4 và 6-chiều. Tầng 0-chiều đơn giản chỉ là các quỹ đạo tầm thường $\Omega_F = \{F\}$. Còn lại, lớp các quỹ đạo không tầm thường gồm 2, 4 và 6-chiều, trong đó, bức tranh hình học lớp quỹ đạo 2-chiều được mô tả tường minh.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2022 - 48.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cartan, E. (1894). *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (doctoral dissertation). Académie de Paris.

Diệp, Đ. N. (1999). *Methods of noncommutative geometry for group C∗-algebras.* Chapman & Hall/Research Notes in Math. Series, Vol. 416, Boca-Raton Florida.

Dixmier, J. (1958). Sur les represéntations unitaires des groupes de Lie nilpotents III. *Canad. J. Math*, 321-348.https://doi.org/10.4153/CJM-1958 033-5

Gantmacher, F. R. (1939). On the classification of real simple Lie groups. *Sb. Math,* 217-250.

Kirillov, A. A. (1976). *Elements of the Theory of Representations.* Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66243-0

Kirillov, A. A. (2004). *Lectures on the Orbit Method* Graduate Studies in Mathematics, *64*(American Mathematical Society), 408. https://doi.org/10.1090/gsm/064

Levi, E. E. (1905). Sulla struttura dei gruppi finiti e continui. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur,* 551-565.

Malcev, A. I. (1945). On solvable Lie algebras. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat,* 329-356.

Snobl, L., & Karásek, D. (2010). Classification of solvable Lie algebras with a given nilradical by means of solvable extensions of its subalgebras. *Linear Algebra Appl.*, 432, 1836–1850. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.11.035

Tú, N. T. C. (2020). Một lớp con của các đại số Lie giải được 7-chiều có căn lũy linh 5-chiều và biểu diễn của chúng. *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, 17*(9), 1565-1574. https://doi.org/10.54607/hcmue.js.17.9.2816 (2020)

Vũ, L. A. (1990a). *Không gian phân lá tạo bởi các quỹ đạo chiều cực đại của một lớp nhóm Lie MD4.* (luận án tiến sĩ). Viện Toán học Việt Nam.

Vũ, L. A. (1990b). On the foliations formed by the generic K-orbits of the MD4-groups. *Acta Math. Vietnam,* 15, 39–55.