Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.095

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐỐI NGẪU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU NỬA VÔ HẠN DẠNG PHÂN SỐ VỚI DỮ LIỆU KHÔNG CHẮC CHẮN SỬ DỤNG DƯỚI VI PHÂN MORDUKHOVICH

Phạm Thanh Hùng và Nguyễn Thanh Sang*
Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thanh Sang (email: ntsang@vnkgu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 14/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 19/06/2022
Ngày duyệt đăng: 22/06/2022

Title:
Optimality conditions and duality for fractional semi-infinite optimization problems under data uncertainty in terms of Mordukhovich subdifferential

Từ khóa:
Bài toán tối ưu nửa vô hạn dạng phân số, dưới vi phân Mordukhovich, điều kiện tối ưu, đối ngẫu Mond-Weir, hàm lồi tổng quát

Keywords:
Fractional semi-infinite optimization problem, Generalized convex function, Mond-Weir duality, Mordukhovich subdifferential, optimality condition

ABSTRACT

In this paper, optimality conditions and duality theorems for a positively properly efficient solution of a nonsmooth fractional semi-infinite optimization problem with data uncertainty in the constraints are studied via Mordukhovich subdifferential. Some examples are given to illustrate the obtained results.

TÓM TẮT

Trong bài viết này, điều kiện tối ưu và các định lý đối ngẫu cho nghiệm chính thường của bài toán tối ưu nửa vô hạn không trơn dạng phân số với dữ liệu không chắc chắn trong những ràng buộc được nghiên cứu thông qua dưới vi phân Mordukhovich. Kết quả đạt được của nghiên cứu được chứng minh thông qua những ví dụ minh họa cụ thể.

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu vectơ nửa vô hạn là một bài toán tìm cực tiểu của một hàm mục tiêu có dạng vectơ và một số vô hạn của các hàm ràng buộc. Điều kiện tối ưu và đối ngẫu cho bài toán tối ưu vectơ nửa vô hạn đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học như: Chuong and Kim (2014), Chuong and Yao (2014), Chuong (2016), Son et al. (2020), Khanh và Tung (2020), Tung (2020, 2021), Singh et al. (2021).

Do lỗi dự đoán, sai sót hoặc thiếu thông tin, dữ liệu của các bài toán trong thực tế thường bị tác động bởi các yếu tố không chắc chắn. Do đó, ta cần phải nghiên cứu sự ảnh hưởng của các yếu không chắc chắn đến các bài toán thực tế. Điều này dẫn đến hình thành một hướng nghiên cứu quan trọng đó là nghiên cứu các bài toán tối ưu với dữ liệu không chắc chắn. Hiện nay, hướng nghiên cứu này đã thu hút được rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Tối ưu robust đã trở thành công cụ quan trọng để tiếp cận các bài toán tối ưu với dữ liệu không chắc chắn. Khi dùng cách tiếp cận của tối ưu robust, nhiều kết quả mới trong lý thuyết tối ưu với dữ liệu không chắc chắn đã nhận được: Chen et al. (2019), Chuong (2016, 2020), Dinh et al. (2017, 2020), Fakhar

(2018, 2019), Khantree and Wangkeeree (2019), Sun et al. (2020).

Trong thời gian gần đây, nghiên cứu điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu chính thường cho bài toán tối ưu đa mục tiêu và bài toán tối ưu đa mục tiêu với vô hạn các hàm ràng buộc đã được nghiên cứu bởi Chương (2013), Chuong and Yao (2014), Singh et al. (2021) bằng cách sử dụng dưới vi phân Mordukhovich. Bài toán tối ưu nửa vô hạn với hàm mục tiêu ở dạng phân số sử dụng dưới vi phân Mordukhovich đã được nghiên cứu bởi Chương (2016), Singh et al. (2021). Singh et al. (2021) nghiên cứu điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu chính thường của bài toán tối ưu nửa vô hạn với hàm mục tiêu có dạng phân số. Tuy nhiên, Singh et al. (2021) chỉ nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu chính thường.

Từ quá trình khảo sát tài liệu, điều kiện tối ưu và đối ngẫu cho bài toán tối ưu nửa vô hạn dạng phân số với dữ liệu không chắc chắn được nghiên cứu thông qua dưới vi phân Mordukhovich. Đây là công cụ hữu ích để nghiên cứu điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu của các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu và ràng buộc có dữ liệu Lipschitz địa phương. Bên cạnh đó, dưới vi phân Mordukhovich trong trường hợp tổng quát là tập không lồi và là tập con của dưới vi phân Clarke.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, nếu không có giả thiết gì thêm thì ta xét không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ được trang bị chuẩn Euclide $\|\cdot\|$. Nón orthant dương của $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu bởi $\mathbb{R}^n_+$ và $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ ký hiệu cho phần trong tôpô của $\mathbb{R}^n$. Tích vô hướng của $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu bởi $\langle x,y\rangle := x^T y, \forall x,y\in\mathbb{R}^n$. Ký hiệu $B(x,r)$ là hình cầu mở tâm tại $x\in\mathbb{R}^n$ với bán kính $r>0$. Giả sử $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, ký hiệu $x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}$ có nghĩa là $x\to\bar{x}$ với $x\in\Omega$. Nón đối cực của tập Ω được định nghĩa bởi

$$\Omega^0 := \left\{ y\in\mathbb{R}^n \mid \langle y,x\rangle \le 0, \forall x\in\Omega \right\}.$$

Một ánh xạ đa trị $F:\Omega\subset\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ được gọi là đóng tại $\bar{x}$ nếu với bất kỳ dãy $\{x_k\}\subset\Omega, x_k\to\bar{x}$, và bất kỳ dãy $\{y_k\}\subset\mathbb{R}^m, y_k\to\bar{y}$, ta có $\bar{y}\in F(\bar{x})$.

Giả sử ánh xạ đa trị $F:\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$, ta ký hiệu

$$\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} F := \left\{ y\in\mathbb{R}^m \mid \exists x_k\to\bar{x},\ y_k\to y, y_k\in F(x_k), \forall k\in\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\} \right\}$$

là giới hạn trên theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của F tại $\bar{x}$.

Giả sử $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ và $\bar{x}\in\Omega$. Nón pháp tuyến Fréchet của Ω tại $\bar{x}\in\Omega$ được định nghĩa bởi

$$\hat{N}(\bar{x};\Omega) := \left\{ v\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} \frac{\langle v, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|} \le 0 \right\}.$$

Nếu $\bar{x}\notin\Omega$, ta quy ước $\hat{N}(\bar{x};\Omega) := \emptyset$.

Giả sử $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ và $\bar{x}\in\Omega$. Nón pháp tuyến Mordukhovich của Ω tại $\bar{x}\in\Omega$ được định nghĩa bởi

$$N(\bar{x};\Omega) := \limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} \hat{N}(\bar{x};\Omega).$$

Nếu $\bar{x}\notin\Omega$, ta quy ước $N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$.

Xét hàm giá trị mở rộng $\varphi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, miền hữu hiệu của φ được định nghĩa bởi

$$\operatorname{dom}\varphi := \left\{ x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \varphi(x) < +\infty \right\}$$

và trên đồ thị của φ được định nghĩa bởi

$$\operatorname{epi}\varphi := \left\{ (x,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \,\middle|\, \mu\ge\varphi(x) \right\}.$$

Giả sử $\varphi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại $x\in\operatorname{dom}\varphi$. Dưới vi phân Mordukhovich của φ tại $\bar{x}\in\operatorname{dom}\varphi$ được định nghĩa bởi

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \left\{ v\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, (v,-1)\in N\big((\bar{x};\varphi(\bar{x}));\operatorname{epi}\varphi\big) \right\}.$$

Nếu $|\varphi(\bar{x})| = +\infty$, ta quy ước $\partial\varphi(\bar{x}) := \emptyset$.

Ta nói rằng một hàm $\varphi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ với hạng $K>0$, nếu tồn tại $r>0$ thỏa mãn

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le K\|x_1-x_2\|, \forall x_1,x_2\in B(\bar{x},r).$$

Ta xét hàm chỉ $\delta(\cdot;\Omega)$ được định nghĩa bởi $\delta(x;\Omega) := 0$ với $x\in\Omega$ và $\delta(x;\Omega) := +\infty$ với các trường hợp khác. Ta có

$$N(\bar{x};\Omega) = \partial\delta(\bar{x};\Omega), \forall\bar{x}\in\Omega. \quad (2.1)$$

Quy luật Fermat cho hàm không trơn (Mordukhovich, 2006) được phát biểu như sau: Nếu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ là một cực tiểu địa phương của hàm φ, thì

$$0 \in \partial\varphi(\bar{x}). \qquad (2.2)$$

Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, φ là nửa liên tục dưới (Mordukhovich, 2006) tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Giả sử $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, k = 1,2,...,m$ với $m \geq 2$ là những hàm nửa liên tục dưới trong lân cận của $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ và những hàm này là liên tục Lipschitz trong lân cận của $\bar{x}$ (Mordukhovich, 2006). Thì ta có

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)(\bar{x}) \subset \partial\varphi_1(\bar{x}) + \partial\varphi_2(\bar{x}) + \cdots + \partial\varphi_m(\bar{x}). \qquad (2.3)$$

Giả sử $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, k = 1,2$ là những hàm liên tục Lipschitz trong lân cận của $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (Mordukhovich, 2006). Thì ta có

$$\partial\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(\bar{x}) \subset \frac{\partial(\varphi_2(\bar{x})\varphi_1)(\bar{x}) - \partial(\varphi_1(\bar{x})\varphi_2)(\bar{x})}{[\varphi_2(\bar{x})]^2}. \qquad (2.4)$$

3. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Trong phần này, ta nghiên cứu điều kiện cần, điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu nửa vô hạn dạng phân số với dữ liệu không chắc chắn trong ràng buộc bởi dùng dưới vi phân Mordukhovich.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập khác rỗng và đóng. Đặt T là một tập chỉ số bất kỳ (có thể vô hạn). Ta xét bài toán tối ưu nửa vô hạn dạng phân số với dữ liệu không chắc chắn trong những ràng buộc có dạng như sau:

$$\min_{\mathbb{R}^m_+}\left\{ f(x) := \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)},...,\frac{p_m(x)}{q_m(x)}\right) \mid g_t(x,v_t) \leq 0, t \in T\right\}, \quad \text{(UP)}$$

ở đây $p_k, q_k, k = 1,...,m$ là những hàm Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$. Ta quy ước rằng $q_k(x) > 0, k = 1,...,m, \forall x \in \Omega$ và $p_k(\bar{x}) \leq 0, k = 1,...,m$ với điểm $\bar{x} \in \Omega$. Ta đặt $g_T := (g_t)_{t \in T}$ và $f := (f_1,..., f_m)$, ở đây $f_k := \frac{p_k}{q_k}, k = 1,...,m.$ Giả sử $g_t : \mathbb{R}^n \times V_t \to \mathbb{R}, t \in T$ là những hàm Lipschitz địa phương tại x và giả sử $v_t \in V_t, t \in T$ là những tham số không chắc chắn, ở đây $V_t \subset \mathbb{R}^q, t \in T$ là những tập compact lồi. Ánh xạ đa trị không chắc chắn $V : T \to 2^{\mathbb{R}^q}$ được định nghĩa bởi $V(t) := V_t, \forall t \in T.$ Ký hiệu $v \in V$ có nghĩa là $v : T \to \mathbb{R}^q$ và $v_t \in V_t, \forall t \in T.$ Do đó, tập không chắc chắn là đồ thị của V, nghĩa là, $\text{gph}V := \{(t, v_t) | v_t \in V_t, t \in T\}.$

Ta nói rằng những hàm $g_t : \mathbb{R}^n \times V_t \to \mathbb{R}, t \in T$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ với hạng $K_t > 0,$ nếu tồn tại $r_t > 0$ thỏa mãn

$$| g_t(x_1, v_t) - g_t(x_2, v_t) | \leq K_t \| x_1 - x_2 \|,$$
$$\forall x_1, x_2 \in B(\bar{x}, r_t), \forall v_t \in V_t, t \in T.$$

Ta sẽ nghiên cứu bài toán (UP) bằng cách tiếp cập của tối ưu robust, với phiên bản robust như sau:

$$\min_{\mathbb{R}^m_+}\left\{ f(x) := \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)},...,\frac{p_m(x)}{q_m(x)}\right) \middle| x \in C\right\}, \quad \text{(RP)}$$

ở đây, tập chấp nhận C được cho bởi

$$C := \left\{x \in \Omega \middle| g_t(x, v_t) \leq 0, \forall v_t \in V_t, t \in T\right\}.$$

Giả sử $\mathbb{R}^{(T)}$ là không gian tuyến tính được cho bởi

$\mathbb{R}^{(T)} := \{\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \mid \lambda_t = 0, t \in T$ ngoại trừ hữu hạn $\lambda_t \neq 0\}$.

Với $\lambda \in \mathbb{R}^{(T)}$, tập tựa của λ được cho bởi

$$T(\lambda) := \{t \in T \mid \lambda_t \neq 0\},$$

là tập con hữu hạn của T. Nón không âm của $\mathbb{R}^{(T)}$ được cho bởi

$$\mathbb{R}^{(T)}_+ := \{\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^{(T)} \mid \lambda_t \geq 0, t \in T\}.$$

Với $\lambda_t \in \mathbb{R}^{(T)}$ và $\{z_t\}_{t \in T} \subset Z$, với Z là không gian tuyến tính, ta hiểu

$$\sum_{t \in T} \lambda_t z_t = \begin{cases} \sum_{t \in T(\lambda)} \lambda_t z_t & \text{khi } T(\lambda) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{khi } T(\lambda) = \varnothing. \end{cases}$$

Với $g_t, t \in T$,

$$\sum_{t \in T} \lambda_t g_t = \begin{cases} \sum_{t \in T(\lambda)} \lambda_t z_t & \text{khi } T(\lambda) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{khi } T(\lambda) = \varnothing. \end{cases}$$

Định nghĩa 3.1. Phần tử $\bar{x} \in C$ được gọi là nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RP) nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ và $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+$ sao cho

$$\forall x \in U \cap C, \langle \alpha, f(x) \rangle \geq \langle \alpha, f(\bar{x}) \rangle.$$

Khi $U := \mathbb{R}^n$, ta có định nghĩa nghiệm chính thường cho bài toán (RP).

Định nghĩa 3.2. Giả sử $\bar{x} \in C$. Ta nói rằng điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) thỏa mãn tại $\bar{x}$ nếu

$$N(\bar{x}; C) \subset \bigcup_{\substack{\lambda \in A(\bar{x}) \\ v_t \in V_t}} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) \right] + N(\bar{x}; \Omega),$$

ở đây

$$A(\bar{x}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{(T)}_+ \mid \lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0, \forall v_t \in V_t, t \in T \right\}$$

là tập các nhân tử ràng buộc chỉ số hoạt tại $\bar{x} \in \Omega$.

Định lý sau đây cung cấp một điều kiện cần cho nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RP) dưới điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ).

Định lý 3.1. Giả sử điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) được thỏa mãn tại $\bar{x} \in C$. Nếu $\bar{x} \in C$ là một nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RP), thì tồn tại $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+, v_t \in V_t$, $\lambda_t \in \mathbb{R}^{(T)}_+, t \in T$ thỏa mãn

$$0 \in \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})} \left[\partial p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \partial q_k(\bar{x}) \right] + \sum_{t \in T} \lambda_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) + N(\bar{x}; \Omega), \lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0. \quad (3.1)$$

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in C$ là một nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RP) thì tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ và $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+$ sao cho

$$\forall x \in U \cap C, \langle \alpha, f(x) \rangle \geq \langle \alpha, f(\bar{x}) \rangle,$$

với $f(x) := \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, ..., \frac{p_m(x)}{q_m(x)} \right)$. Từ đây, ta suy ra

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \geq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}, \forall x \in U \cap C.$$

Suy ra $\bar{x}$ là một cực tiểu địa phương của bài toán tối ưu thực sau đây $\min_{x \in C} \phi(x)$, với

$$\phi(x) := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k(x)}{q_k(x)}. \quad (3.2)$$

Do đó, $\bar{x}$ là một cực tiểu địa phương của bài toán tối ưu không có ràng buộc sau đây

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \phi(x) + \delta(x; C) \}.$$

Áp dụng quy luật Fermat (2.2) cho hàm không trơn, ta được

$$0 \in \partial(\phi + \delta(\cdot; C))(\bar{x}).$$

Hàm ϕ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ và $\delta(\cdot; C)$ là nửa liên tục dưới trong lân cận của $\bar{x}$, áp dụng (2.3) đến (3.2) và từ (2.1), ta suy

$$0 \in \partial\phi(\bar{x}) + \partial\delta(\bar{x}; C) = \partial\phi(\bar{x}) + N(\bar{x}; C). \quad (3.3)$$

Tiếp tục, áp dụng (2.3), ta suy ra

$$\partial\phi(\bar{x}) = \partial\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{q_k} \right)(\bar{x}) \subset \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \partial\left(\frac{p_k}{q_k} \right)(\bar{x}).$$

Áp dụng (2.4), ta suy ra

$$\partial\phi(\bar{x}) \subset \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{\partial(q_k(\bar{x}) p_1)(\bar{x}) - \partial(p_1(\bar{x}) q_2)(\bar{x})}{[q_2(\bar{x})]^2} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{q_k(\bar{x}) \partial(p_k)(\bar{x}) - p_k(\bar{x}) \partial(q_k)(\bar{x})}{[q_k(\bar{x})]^2}, \quad (3.4)$$

ở đây đẳng thức xảy ra do $-p_k(x) \geq 0, q_k(\bar{x}) > 0, k = 1, ..., m.$

Vì điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) thỏa mãn tại $\bar{x}$ nên ta có

$$N(\bar{x}; C) \subset \bigcup_{\substack{\lambda \in A(\bar{x}) \\ v_t \in V_t}} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) \right] + N(\bar{x}; \Omega), \quad (3.5)$$

ở đây

$$A(\bar{x}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{(T)}_+ \mid \lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0, \forall v_t \in V_t, t \in T \right\}.$$

Từ (3.3), (3.4) và (3.5), ta suy ra

$$0 \in \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[\partial p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}\partial q_k(\bar{x})\right] + \sum_{t\in T}\lambda_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) + N(\bar{x};\Omega), \lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0.$$

□

Ví dụ sau đây chứng tỏ tính cốt yếu của điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) trong Định lý 3.1.

Ví dụ 3.1. Giả sử hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$f(x) = \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \frac{p_2(x)}{q_2(x)}\right),$$

ở đây $p_1(x) = p_2(x) = x, q_1(x) = q_2(x) = x^2+1, x\in\mathbb{R}.$ Lấy $T=[0,1], v_t \in V_t = [2-t, 2+t].$ Giả sử $g_t : \mathbb{R}\times V_t \to \mathbb{R}$ được cho bởi $g_t(x,v_t) = v_t x^2, x\in\mathbb{R}, v_t\in V_t, t\in T.$ Ta xét bài toán (RP) với $m=2$ và $\Omega = (-\infty, 0]\subset\mathbb{R}.$ Bằng các tính toán đơn giản, ta có $C=\{0\}.$ Lấy $\bar{x} = 0\in C=\{0\}$ và $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)\in \operatorname{int}\mathbb{R}^2_+,$ với $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}.$ Ta có $\bar{x}$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RP). Thật vậy, ta có

$$\alpha_k\cdot\frac{p_k(x)}{q_k(x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} \ge 0 = \alpha_k\cdot\frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}, \forall x\in C, k=1,2.$$

Vì

$N(\bar{x};\Omega) = [0,+\infty), \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) = \{0\}, \forall v_t\in V_t, t\in T,$

nên ta có

$$\bigcup_{\substack{\lambda\in A(\bar{x})\\ v_t\in V_t}}\left[\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x g_t(\bar{x}, v_t)\right] + N(\bar{x};\Omega) = [0,+\infty).$$

Tuy nhiên $N(\bar{x};C) = \mathbb{R}.$ Do đó, điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) không xảy ra tại $\bar{x}=0.$ Lấy $\bar{x} = 0\in C = \{0\}$ và $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+,$ với $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2},$ thì ta có

$$\partial p_k(\bar{x}) = \{1\}, \partial q_k(\bar{x}) = \{0\}, \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})} = \frac{1}{2}, k=1,2.$$

Khi đó, ta có

$$0\notin[1,+\infty) = \{1\}+[0,+\infty) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[\partial p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}\partial q_k(\bar{x})\right] + \sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x g_t(\bar{x}, v_t) + N(\bar{x};\Omega),$$

với $\lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0, (\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}^{(T)}_+, \forall v_t\in V_t, t\in T.$ Suy ra (3.1) không xảy ra. Hay Định lý 3.1 không xảy ra.

Định nghĩa sau đây được mở rộng từ Định nghĩa 3.7 (i) (Chương, 2016).

Định nghĩa 3.3. Ta giả sử $g_T := (g_t)_{t\in T}$ và $f := (f_1,\ldots,f_m),$ ở đây $f_k := \frac{p_k}{q_k}, k=1,\ldots,m.$ Ta nói rằng (f, g_T) là lồi tổng quát trên Ω tại $\bar{x}\in\Omega$ nếu với bất kỳ $x\in\Omega,$ $u_k\in\partial p_k(\bar{x}), v_k\in\partial q_k(\bar{x}), k=1,\ldots,m,$ và $x_t\in\partial_x g_t(\bar{x}, v_t), t\in T$ có tồn tại $w\in N(\bar{x};\Omega)^\circ$ thỏa mãn

$$p_k(x) - p_k(\bar{x}) \ge \langle u_k, w\rangle, k=1,\ldots,m,$$

$$q_k(x) - q_k(\bar{x}) \ge \langle v_k, w\rangle, k=1,\ldots,m,$$

$$g_t(x,v_t) - g_t(\bar{x}, v_t) \ge \langle x_t, w\rangle, t\in T.$$

Bây giờ ta xét một điều kiện đủ cho nghiệm chính thường của bài toán (RP).

Định lý 3.2. *Giả sử $\bar{x}\in C$ và (f, g_T) là lồi tổng quát trên Ω tại $\bar{x}$. Nếu $\bar{x}$ thỏa mãn (3.1) thì $\bar{x}$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RP).*

Chứng minh. Vì $\bar{x}$ thỏa mãn (3.1) nên tồn tại

$$\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+, v_t\in V_t, \lambda_t\in\mathbb{R}^{(T)}_+, t\in T,$$

$$u_k\in\partial p_k(\bar{x}), v_k\in\partial q_k(\bar{x}), k=1,\ldots,m,$$

và $x_t\in\partial_x g_t(\bar{x}, v_t), t\in T$ thỏa mãn

$$-\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[u_k - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}v_k\right] + \sum_{t\in T}\lambda_t x_t\right)\in N(\bar{x};\Omega),$$

$$\lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0.$$

Theo định nghĩa của nón đối cực và tính lồi tổng quát của $(f, g_T),$ suy ra với mỗi $x\in\Omega,$ tồn tại $w\in N(\bar{x};\Omega)^\circ$ thỏa mãn

$$0 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[\langle u_k, w\rangle - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}\langle v_k, w\rangle\right] + \sum_{t\in T}\lambda_t \langle x_t, w\rangle$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[p_k(x) - p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}\big(q_k(x) - q_k(\bar{x})\big)\right]$$
$$+ \sum_{t\in T}\lambda_t\left[g_t(x,v_t) - g_t(\bar{x},v_t)\right]$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}q_k(x)\right]$$
$$+ \sum_{t\in T}\lambda_t\left[g_t(x,v_t) - g_t(\bar{x},v_t)\right].$$

Do đó, ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}q_k(x)\right]$$
$$+ \sum_{t\in T}\lambda_t\left[g_t(x,v_t) - g_t(\bar{x},v_t)\right] \ge 0.$$

Chú ý $\lambda_t g_t(\bar{x},v_t) = 0$ và $\lambda_t g_t(x,v_t) \le 0, \forall t\in T.$

Từ đó, ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})}\left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}q_k(x)\right] \ge 0.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \ge \sum_{k=1}^{m}\alpha_k \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}.$$

Vậy $\bar{x}$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RP). □

4. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU DẠNG MOND-WEIR

Ta giả sử $z\in X, \alpha := (\alpha_1,...,\alpha_m) \in \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+, v_t \in V_t, \lambda \in \mathbb{R}^{(T)}_+, t\in T.$ Trong phần này, ta xét bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir (RD) tương ứng với bài toán (RP).

$$\max_{\mathbb{R}^m_+}\left\{\tilde{f}(z,\alpha,\lambda) := \left(\frac{p_1(z)}{q_1(z)},...,\frac{p_m(z)}{q_m(z)}\right) \mid (z,\alpha,\lambda)\in C_{\mathrm{RD}}\right\},$$

ở đây tập ràng buộc C_{RD} được cho bởi

$$C_{\mathrm{RD}} := \Bigg\{(z,\alpha,\lambda)\in \Omega\times \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{(T)}_+ \mid 0 \in \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{q_k(z)}\left[\partial p_k(z) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)}\partial q_k(z)\right]$$
$$+ \sum_{t\in T}\lambda_t \partial_x g_t(z,v_t) + N(\bar{x};\Omega), \sum_{t\in T}\lambda_t g_t(z,v_t) \ge 0\Bigg\}.$$

Định nghĩa 4.1. Phần tử $(\bar{z},\bar{\alpha},\bar{\lambda})\in C_{\mathrm{RD}}$ được gọi là nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RD) nếu tồn tại một lân cận U của $(\bar{z},\bar{\alpha},\bar{\lambda})$ và $\theta := (\theta_1,...,\theta_m) \in -\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+$ thỏa mãn

$$\forall (z,\alpha,\lambda)\in U\cap C_{\mathrm{RD}}, \left\langle \theta, \tilde{f}(z,\alpha,\lambda)\right\rangle$$
$$\ge \left\langle \theta, \tilde{f}(\bar{z},\bar{\alpha},\bar{\lambda})\right\rangle.$$

Khi $U := \mathbb{R}^n$, ta có định nghĩa nghiệm chính thường cho bài toán (RD).

Định lý 4.1. (Đối ngẫu yếu) *Giả sử $x\in C$ và $(z,\alpha,\lambda)\in C_{\mathrm{RD}}$. Nếu (f, g_T) là lồi tổng quát trên Ω tại z thì*

$$f_k(x) \ge \tilde{f}_k(z,\alpha,\lambda), k = 1,...,m.$$

Chứng minh. Vì $(z,\alpha,\lambda)\in C_{\mathrm{RD}}$ nên tồn tại

$$\alpha := (\alpha_1,...,\alpha_m)\in \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+, v_t\in V_t, \lambda_t \in \mathbb{R}^{(T)}_+, t\in T,$$
$$u_k \in \partial p_k(z), v_k\in \partial q_k(z), k = 1,...,m,$$

và $x_t \in \partial_x g_t(z,v_t), t\in T$ thỏa mãn

$$-\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{q_k(z)}\left[u_k - \frac{p_k(z)}{q_k(z)}v_k\right] + \sum_{t\in T}x_t\right) \in N(z;\Omega), \quad (4.1)$$
$$\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(z,v_t) \ge 0. \quad (4.2)$$

Từ (4.1) và định nghĩa của nón đối cực, tính lồi tổng quát của (f, g_T) trên Ω tại z, với bất kỳ $x\in C$, tồn tại $w\in N(\bar{x};\Omega)^{\circ}$ thỏa mãn

$$0 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(z)} \left[\langle u_k, w \rangle - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} \langle v_k, w \rangle \right] + \sum_{t\in T} \lambda_t \langle x_t, w \rangle$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(z)} \left[p_k(x) - p_k(z) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} \left(q_k(x) - q_k(z) \right) \right]$$

$$+ \sum_{t\in T} \lambda_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(z, v_t) \right]$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{x})} \left[p_k(x) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} q_k(x) \right]$$

$$+ \sum_{t\in T} \lambda_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(z, v_t) \right].$$

Do đó, ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(z)} \left[p_k(x) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} q_k(x) \right] + \sum_{t\in T} \lambda_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(z, v_t) \right] \ge 0. \quad (4.3)$$

Chú ý rằng với $x \in C$ ta có $\sum_{t\in T} \lambda_t g_t(x, v_t) \le 0.$ Từ điều này kết hợp với (4.2) và (4.3), ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{q_k(z)} \left[p_k(x) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} q_k(x) \right] \ge 0.$$

Suy ra

$$p_k(x) - \frac{p_k(z)}{q_k(z)} q_k(x) \ge 0.$$

Từ đây ta được

$$f_k(x) = \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \ge \frac{p_k(z)}{q_k(z)} = \tilde{f}_k(z, \alpha, \lambda), k = 1, \ldots, m. \quad \square$$

Ví dụ sau đây chứng tỏ tính cốt yếu của tính lồi tổng quát của (f, g_T) trong Định lý 4.1.

Ví dụ 4.1. Giả sử hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$f(x) = \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \right),$$

ở đây $p_1(x) = p_2(x) = x^3, q_1(x) = q_2(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$ Lấy $T = [0,1], v_t \in V_t = [2 - t, 2 + t].$ Giả sử $g_t : \mathbb{R} \times V_t \to \mathbb{R}$ được cho bởi $g_t(x, v_t) = -v_t x^2, x \in \mathbb{R}, v_t \in V_t, t \in T.$ Ta xét bài toán (RP) với $m = 2$ và $\Omega = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}.$ Bằng các tính toán đơn giản, ta có $C = (-\infty, 0].$ Lấy $\bar{x} = -1 \in C = (-\infty, 0].$ Xét bài toán đối ngẫu (RD). Ta chọn $\bar{y} = 0 \in \Omega, \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+,$ với $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \frac{1}{2}, \bar{\lambda} = 0.$

Ta có $N(\bar{y}; \Omega) = [0, +\infty), \partial_x g_t(\bar{y}, v_t) = \{0\}, \forall v_t \in V_t, t \in T,$

$$\partial p_k(\bar{y}) = \{0\}, \partial q_k(\bar{y}) = \{0\}, \frac{\alpha_k}{q_k(\bar{y})} = \frac{1}{2}, k = 1, 2.$$

Khi đó, ta có

$$0 \in [0, +\infty) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{y})} \left[\partial p_k(\bar{y}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \partial q_k(\bar{y}) \right] + \sum_{t\in T} \bar{\lambda}_t \partial_x g_t(\bar{y}, v_t) + N(\bar{y}; \Omega),$$

và $\sum_{t\in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{y}, v_t) = 0.$ Suy ra $(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in C_{\mathrm{RD}}.$ Tuy nhiên với $\bar{x} = -1 \in C = (-\infty, 0],$ thì ta có

$$f_k(\bar{x}) = \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} = -\frac{1}{2} < 0 = \frac{p_k(\bar{y})}{q_k(\bar{y})} = \tilde{f}_k(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}), k = 1, 2.$$

Điều này xảy ra vì (f, g_T) không là lồi tổng quát trên Ω tại $\bar{y} = 0.$ Để thấy điều này, ta chọn $y = -3 \in \Omega = (-\infty, 0]$ và $u_k \in \partial p_k(\bar{y}) = \{0\}, k = 1, 2.$ Khi đó, ta có $N(\bar{y}; \Omega)^{\circ} = (-\infty, 0]$ và

$$\langle u_k, w \rangle = 0 \ge 0, \forall w \in N(\bar{y}; \Omega)^{\circ}, k = 1, 2.$$

Tuy nhiên

$$p_k(y) - p_k(\bar{y}) = -27 < 0, k = 1, 2.$$

Định lý 4.2. (Đối ngẫu mạnh) Giả sử $\bar{x} \in C$ là một nghiệm chính thường địa phương của bài toán (RP) sao cho điều kiện chính quy ràng buộc (MRCQ) thỏa mãn tại $\bar{x}.$ Thì tồn tại $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{(T)}_+$ thỏa mãn $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in C_{\mathrm{RD}}$ và $f(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}).$ Nếu (f, g_T) là lồi tổng quát trên Ω tại bất kỳ $z \in \Omega$ thì $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RD).

Chứng minh. Theo Định lý 3.1, tồn tại $\bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+, v_t \in V_t, t \in T, \bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_t)_{t\in T} \in \mathbb{R}^{(T)}_+$ thỏa mãn

$$0 \in \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[\partial p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \partial q_k(\bar{x}) \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) + N(\bar{x}; \Omega), \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0.$$

Chú ý rằng $\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0, \forall t \in T$. Suy ra $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0$. Do đó, ta có $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in C_{\mathrm{RD}}$ và

$$f(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}).$$

Bởi tính lồi tổng quát của (f, g_T) trên Ω tại bất kỳ $z \in \Omega$, thì từ Định lý 4.1 ta suy

$$\tilde{f}_k(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) = f_k(\bar{x}) \geq \tilde{f}_k(z, \alpha, \lambda), k = 1, ..., m, \forall (z, \alpha, \lambda) \in C_{\mathrm{RD}}.$$

Do đó, tồn tại $\theta := (\theta_1, ..., \theta_m) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^m_+$ thỏa mãn

$$\left\langle \theta, \tilde{f}(z, \alpha, \lambda) \right\rangle \geq \left\langle \theta, \tilde{f}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \right\rangle.$$

Điều này có nghĩa là $(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RD). □

Định lý 4.3. (Đối ngẫu ngược) *Giả sử $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in C_{\mathrm{RD}}$. Nếu $\bar{x} \in C$ và (f, g_T) là lồi tổng quát trên Ω tại $\bar{x}$, thì $\bar{x}$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RP).*

Chứng minh. Vì $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in C_{\mathrm{RD}}$ nên tồn tại $\bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_m) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+, v_t \in V_t, t \in T, \bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_t) \in \mathbb{R}^{(T)}_+$ thỏa mãn

$$-\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[\partial p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \partial q_k(\bar{x}) \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \partial_x g_t(\bar{x}, v_t) \right) \in N(\bar{x}; \Omega), \quad (4.4)$$

$$\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) \geq 0. \qquad (4.5)$$

Chú ý rằng với $\bar{x} \in C$, ta có $g_t(\bar{x}, v_t) \leq 0, \forall t \in T$. Suy ra $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) \leq 0$. Kết hợp điều này với (4.5), ta suy ra $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0$. Suy ra $\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0, \forall t \in T$.

Vì $\bar{x}$ thỏa mãn (4.4) nên tồn tại $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+, v_t \in V_t, \lambda_t \in \mathbb{R}^{(T)}_+, t \in T,$ và $u_k \in \partial p_k(\bar{x}), v_k \in \partial q_k(\bar{x}), k = 1, ..., m,$ $x_t \in \partial_x g_t(\bar{x}, v_t), t \in T$ thỏa mãn

$$-\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[u_k - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} v_k \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t x_t \right) \in N(\bar{x}; \Omega). \quad (4.6)$$

Từ (4.6) và định nghĩa của nón đối cực, tính lồi tổng quát của (f, g_T) trên Ω tại $\bar{x}$, suy ra với mỗi $x \in \Omega$, tồn tại $w \in N(\bar{x}; \Omega)^\circ$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[\langle u_k, w \rangle - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \langle v_k, w \rangle \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \langle x_t, w \rangle \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[p_k(x) - p_k(\bar{x}) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} \left(q_k(x) - q_k(\bar{x}) \right) \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(\bar{x}, v_t) \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} q_k(x) \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(\bar{x}, v_t) \right]. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} q_k(x) \right] + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \left[g_t(x, v_t) - g_t(\bar{x}, v_t) \right] \geq 0.$$

Chú ý $\lambda_t g_t(\bar{x}, v_t) = 0$ và $\lambda_t g_t(x, v_t) \leq 0, \forall t \in T$. Suy ra

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{q_k(\bar{x})} \left[p_k(x) - \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})} q_k(x) \right] \geq 0.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{\alpha}_k \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \geq \sum_{k=1}^{m} \bar{\alpha}_k \frac{p_k(\bar{x})}{q_k(\bar{x})}.$$

Vậy $\bar{x}$ là một nghiệm chính thường của bài toán (RP). □

5. KẾT LUẬN

Tóm lại, điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu nửa vô hạn với hàm mục tiêu có dạng phân số và các ràng buộc ở dạng không chắc chắn được nghiên cứu sử dụng dưới vi phân Mordukhovich cho lớp hàm Lipschitz địa phương. Bên cạnh đó, bài toán đối ngẫu được xét dưới dạng Mond-Weir và thu được các định lý về đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh và đối ngẫu ngược sử dụng dưới vi phân Mordukhovich.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Chen, J. W., Kobis, E. & Yao, J. C. (2019). Optimality conditions and duality for robust nonsmooth multiobjective optimization problems with constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications, 181*, 411 - 436. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1437-8

Chuong, T. D. (2013). Optimality and duality for proper and isolated efficiencies in multiobjective optimization. *Nonlinear Analysis 76*, 93 - 104. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.08.005

Chuong, T. D., & Kim, D. S. (2014). Nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications 160*, 748 - 762. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0314-8

Chuong, T. D., & Yao, J. C. (2014). Isolated and proper efficiencies in semi-infinite vector optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications 162*, 447 - 462 (2014). https://doi.org/10.1007/s10957-013-0425-2

Chuong, T. D. (2016). Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems. *Nonlinear Analysis, 134*, 127 - 143. https://doi.org/10.1016/j.na.2016.01.002

Chuong, T. D. (2016). Nondifferentiable fractional semi-infinite multiobjective optimization problems. *Operations Research Letters, 44*, 260 - 266. https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.02.003

Chuong, T. D. (2020). Robust optimality and duality in multiobjective optimization problems under data uncertainty. *SIAM Journal on Optimization, 30*, 1501 - 1526. https://doi.org/10.1137/19M1251461

Dinh, N., Goberna, M. A., Lopez, M. A., & Volle, M. A. (2017). unifying approach to robust convex infinite optimization duality. *Journal of Optimization Theory and Applications, 174*, 650 - 685. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1136-x

Dinh, N., Long, D. H., & Yao, J. C. (2020). Duality for Robust Linear In nite Programming Problems Revisited. *Vietnam Journal of Mathematics, 46*, 293 - 328. https://doi.org/10.1007/s10013-018-0283-1

Fakhar, M., Mahyarinia, M. R., & Zafarani, J. (2018). On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research, 265*, 39 - 48. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.08.003

Fakhara, M., Mahyarinia, M. R., & Zafarani, J. (2019). On approximate solutions for nonsmooth robust multiobjective optimization problems. *Optimization, 68*, 1653 - 1683. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1579212

Khanh, P. Q., & Tung, N. M. (2020). On the Mangasarian - Fromovitz constraint qualification and Karush - Kuhn - Tucker conditions in nonsmooth semi-infinite multiobjective programming. *Optimization Letters, 14*, 2055-2072. https://doi.org/10.1007/s11590-019-01529-3

Khantree, C., & Wangkeeree, R. (2019). On quasi approximate solutions for nonsmooth robust semi-infinite optimization problems. *Carpathian Journal of Mathematics, 35*, 417 - 426. https://doi.org/10.37193/CJM.2019.03.16

Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory*. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

Singh, V., Jayswal, A., Stancu-Minasian, I. & Rusu-Stancu, A. M. (2021). Isolated and proper efficiencies for semi-infinite multiobjective fractional problems. *Series A Applied Mathematics and Physics, 83*, 111 - 124.

Son, T. Q., Tuyen, N. V., & Wen, C. F. (2020). Optimality conditions for approximate Pareto solutions of a nonsmooth vector optimization problem with an infinite number of constraints. *Acta Mathematica Vietnamica, 45*, 435 - 448. https://doi.org/10.1007/s40306-019-00358-x

Sun, X. K., Teo, K. L., Zheng, J., & Liu, L. (2020). Robust approximate optimal solutions for nonlinear semi-infinite programming with uncertainty. *Optimization, 69*, 2109 - 2129. https://doi.org/10.1080/02331934.2020.1763990

Tung, L. T. (2020). Karush - Kuhn - Tucker optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferentials. *Numerical Functional Analysis and Optimization, 41*, 659 - 684. https://doi.org/10.1080/01630563.2019.1667826

Tung, L. T. (2021). Strong Karush - Kuhn - Tucker optimality conditions for Borwein properly efficient solutions of multiobjective semi-infinite programming. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 52*, 1 - 22. https://doi.org/10.1007/s00574-019-00190-9