Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.009

VI PHÂN SUY RỘNG CỦA HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU TRONG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG ELLIPTIC

Nguyễn Thành Quí[1*] và Đào Duy Phúc[2]

[1]*Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Lớp cao học Toán Giải tích K26, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thành Quí (email: ntqui@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 07/09/2021
Ngày nhận bài sửa: 24/10/2021
Ngày duyệt đăng: 26/02/2022

Title:
Generalized differentiation of marginal functions in parametric optimal control governed by elliptic partial differential equations

Từ khóa:
Marginal function, objective function, optimal control, regular subdifferential (Fréchet subdifferential), solution map

Keywords:
Ánh xạ nghiệm, dưới vi phân chính quy (dưới vi phân Fréchet), điều khiển tối ưu, hàm giá trị tối ưu, hàm mục tiêu

ABSTRACT

This work belongs to the research direction of differential stability for parametric optimal control problems governed by semilinear elliptic partial differential equations. The article obtains new results in this research direction consisting of differentiability formulas of the solution map of semilinear elliptic partial differential equations and the objective function of parametric optimal control problems, then a formula for computing the regular subdifferential (the Fréchet subdifferential) of parametric optimal control problems is established.

TÓM TẮT

Công trình này thuộc hướng nghiên cứu sự ổn định vi phân của các bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Bài báo thu được các kết quả mới theo hướng nghiên cứu này bao gồm việc thiết lập các công thức vi phân của ánh xạ nghiệm của phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính và hàm mục tiêu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số. Qua đó, công thức tính toán dưới vi phân chính quy (dưới vi phân Fréchet) được xây dựng cho hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số đang xét.

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, sự ổn định vi phân của bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính $P(e)$ sau đây được nghiên cứu:

$$\min J(u,e) = \int_\Omega L\left(x, y_{u+e_Y}(x), (u + e_Y)(x)\right) dx + \int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x) dx \tag{1.1}$$

thỏa điều kiện y_{u+e_Y} là nghiệm yếu của phương trình

$$\begin{cases} Ay + f(x,y) = u + e_Y & \text{trong } \Omega \\ \qquad\qquad\;\; y = 0 & \text{trên } \Gamma \end{cases} \tag{1.2}$$

và ràng buộc điều khiển

$$(\alpha + e_\alpha)(x) \le u(x) \le (\beta + e_\beta)(x) \quad \text{với h.h. } x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Trong bài toán $P(e)$ nêu trên, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Γ là biên của Ω, và $A(\cdot)$ là toán tử vi phân elliptic bậc hai được định nghĩa bởi

$$Ay(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}y(x)\right) \quad (1.4)$$

với các hàm hệ số $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ thỏa mãn

$$\lambda_A\|\gamma\|^2 \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\gamma_i\gamma_j, \quad \forall\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N \text{ với h.h. } x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$\lambda_A > 0$, và các hàm $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$ với $\alpha \le \beta$ h.h. trên Ω và $\alpha \ne \beta$ h.h. trên Ω. Ký hiệu

$$e = (e_Y, e_J, e_\alpha, e_\beta) \in E \quad (1.6)$$

là tham số của bài toán $P(e)$, trong đó E là không gian tham số được định nghĩa bởi

$$E = L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \quad (1.7)$$

với chuẩn

$$\|e\| = \|e_Y\|_{L^\infty(\Omega)} + \|e_J\|_{L^\infty(\Omega)} + \|e_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} + \|e_\beta\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.8)$$

Ký hiệu tập điều khiển khả thi

$$U_{ad}(e) = \{u \in L^\infty(\Omega) \,|\, (\alpha + e_\alpha)(x) \le u(x) \le (\beta + e_\beta)(x) \text{ với h.h. } x \in \Omega\}. \quad (1.9)$$

Từ (1.9), ta có ánh xạ đa trị $U_{ad}: E \to 2^{L^\infty(\Omega)}$, với $U_{ad}(e)$ là tập điều khiển khả thi tương ứng với $e \in E$. Ứng với bài toán điều khiển tối ưu có tham số $P(e)$ được phát biểu trong (1.1)–(1.3), hàm *giá trị tối ưu* (*hàm marginal*) của bài toán $P(e)$ là hàm $\mu: E \to \overline{\mathbb{R}}$ được xác định bởi

$$\mu(e) = \inf_{u \in U_{ad}(e)} J(u, e), \quad (1.10)$$

và ánh xạ nghiệm của bài toán $P(e)$ là hàm $S: E \to 2^{L^\infty(\Omega)}$ xác định bởi

$$S(e) = \{u \in U_{ad}(e) | \mu(e) = J(u, e)\}. \quad (1.11)$$

Bài báo đạt được các kết quả mới bao gồm việc thiết lập các công thức vi phân của ánh xạ nghiệm yếu, ký hiệu bởi $G(\cdot)$, của phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính (1.2) và hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ của bài toán điều khiển tối ưu có tham số $P(e)$, qua đó xây dựng công thức tính toán dưới vi phân chính quy (dưới vi phân Fréchet) cho hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ của bài toán $P(e)$.

Trong mô hình bài toán điều khiển tối ưu có tham số $P(e)$, hàm $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ dưới dấu tích phân trong hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ là tổng quát hơn so với hàm dưới dấu tích phân trong hàm mục tiêu tương ứng được khảo sát trong các bài báo Qui and Wachsmuth (2020) và Qui (2020). Vì vậy, mô hình bài toán điều khiển tối ưu có tham số được khảo sát trong bài báo này là tổng quát hơn các mô hình bài toán điều khiển tối ưu có tham số được khảo sát trong Qui and Wachsmuth (2020) và Qui (2020). Ở một khía cạnh khác, trong quá trình nghiên cứu sự ổn định nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu có tham số, Qui and Wachsmuth (2018) và Qui and Wachsmuth (2019) cũng khảo sát các mô hình bài toán điều khiển tối ưu mà ở đó hàm dưới dấu tích phân trong hàm mục tiêu là các trường hợp riêng của $L(\cdot,\cdot,\cdot)$. Khi biến điều khiển u không xuất hiện trong hàm $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ thì bài toán $P(e)$ được gọi là bài toán điều khiển tối ưu bang-bang; xem Casas (2012), Qui and Wachsmuth (2018), Qui (2020) và Qui and Wachsmuth (2020) để có nhiều thông tin hơn về bài toán điều khiển tối ưu bang-bang.

Cần nhấn mạnh rằng việc xét mô hình bài toán trong bài báo này (tổng quát hơn các mô hình đã xét trước đây) là có ý nghĩa khoa học. Chẳng hạn như, trong mô hình của Casas (2012), Qui and Wachsmuth (2018) và Qui (2020)..., biến điều khiển u không xuất hiện trong hàm mục tiêu của bài toán. Những mô hình như thế rất đặc thù, chúng chỉ dùng để khảo sát các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang. Chú ý rằng tính chất Legendre của một dạng toàn phương là rất quan trọng, nó có thể đảm bảo cho một dãy hội tụ yếu trở thành một dãy hội tụ mạnh. Tuy nhiên, việc chứng minh đạo hàm cấp hai của hàm mục tiêu của bài toán điều khiển tối ưu theo biến điều khiển là một dạng Legendre lại cần sự xuất hiện ở dạng toàn phương của biến điều khiển trong hàm mục tiêu mà mô hình bài toán bang-bang không đáp ứng được điều này (Lemma 4.6 trong Qui and Wachsmuth, 2019). Cần bàn luận thêm rằng trong các mô hình bài toán được xét trong Qui and Wachsmuth (2019) và Qui and Wachsmuth (2020), tuy biến điều khiển có xuất hiện trong hàm mục tiêu nhưng chỉ xuất hiện ở dạng toàn phương (khá hạn chế). Điều này đảm bảo cho các tính chất đặc biệt (như tính Legendre) của bài toán được thỏa mãn. Như vậy, các mô hình bài toán vừa nêu rất đặc thù, trong khi đó điều khiển tối ưu cho phương trình đạo hàm riêng là một lĩnh vực rất phong phú và đa dạng về ứng dụng. Do đó, việc mở rộng mô hình bài toán như trong bài báo này là một xu thế tất yếu và có ý nghĩa khoa học để khảo sát nhiều mô hình ứng dụng hơn.

2. HỆ THỐNG GIẢ THIẾT CHO BÀI TOÁN $P(e)$

Mục này trình bày hệ thống các giả thiết cần thiết cho bài toán điều khiển tối ưu $P(e)$. Đây là các giả thiết căn bản thường được sử dụng trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Hệ thống các giả thiết này bao gồm:

(A1) Tập $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền mở và bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên Lipschitz Γ.

(A2) Hàm $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory (tức là, $f(\cdot, y)$ đo được với mọi $y \in \mathbb{R}$ và $f(x,\cdot)$ liên tục với h.h. $x \in \Omega$) thuộc lớp hàm C^2 đối với biến thứ hai và thỏa mãn

$$f(\cdot,0) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0 \text{ với h.h. } x \in \Omega, \tag{2.1}$$

và với mọi $M > 0$ tồn tại $C_{f,M} > 0$ sao cho

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq C_{f,M} \text{ với h.h. } x \in \Omega \text{ và } |y| \leq M, \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_1)\right| \leq C_{f,M}|y_2 - y_1| \text{ với h.h. } x \in \Omega \text{ và } |y_1|, |y_2| \leq M. \tag{2.3}$$

(A3) Hàm $L: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory thuộc lớp C^2 đối với biến thứ hai và thứ ba. Hơn nữa, $L(\cdot,0,0) \in L^1(\Omega)$ và với mọi $M > 0$ tồn tại $C_{L,M} > 0$ và $\psi_M \in L^2(\Omega)$ sao cho

$$\left|\frac{\partial L}{\partial u}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,u)\right| \leq \psi_M(x), \tag{2.4}$$

$$\left\|D^2_{(y,u)}L(x,y,u)\right\| \leq C_{L,M}, \tag{2.5}$$

$$\left\|D^2_{(y,u)}L(x,y_2,u_2) - D^2_{(y,u)}L(x,y_1,u_1)\right\| \leq C_{L,M}(|y_2 - y_1| + |u_2 - u_1|), \tag{2.6}$$

với h.h. $x \in \Omega$ và mọi $|y|, |y_1|, |y_2|, |u|, |u_1|, |u_2| \leq M$, trong đó $D^2_{(y,u)}L$ ký hiệu đạo hàm riêng cấp hai của L tương ứng với biến (y, u).

Dựa trên hệ thống các giả thiết đã nêu, sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu $P(e)$ được thiết lập. Hơn nữa, hệ thống các giả thiết này cũng đảm bảo cho sự khả vi của ánh xạ nghiệm yếu $G(\cdot)$ của phương trình trạng thái (1.2) và hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ của bài toán $P(e)$.

3. SỰ KHẢ VI CỦA HÀM MỤC TIÊU

Mục này trình bày các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu $P(e)$ cùng các kết quả về sự khả vi của ánh xạ nghiệm yếu $G(\cdot)$ của (1.2) và hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ của bài toán $P(e)$.

Một điều khiển $\bar{u} \in U_{ad}(\bar{e})$ được gọi là *điều khiển tối ưu* (hay *nghiệm*) của bài toán $P(\bar{e})$ ứng với trạng thái tối ưu $\bar{y} = G(\bar{u}) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ nếu

$$J(\bar{u}, \bar{e}) \leq J(u, \bar{e}), \quad \forall u \in U_{ad}(\bar{e}). \tag{3.1}$$

Định lý 3.1. Giả sử các giả thiết **(A1)**–**(A3)** được thỏa mãn. Khi đó, phương trình trạng thái (1.2) luôn có nghiệm yếu duy nhất. Nếu hàm $L(\cdot)$ lồi theo biến thứ ba thì bài toán $P(e)$ luôn có nghiệm với mọi $e \in E$ sao cho tập $U_{ad}(e)$ khác rỗng.

Chứng minh. Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) được chứng minh tương tự như chứng minh Tröltzsch (2010) (Theorem 4.4). Với mỗi $e \in E$, bài toán $P(e)$ được quy về bài toán (P) được khảo sát trong Casas et al. (2008). Theo Casas et al. (2008) (Theorem 2.2), bài toán (P) luôn có nghiệm. Suy ra bài toán $P(e)$ luôn có nghiệm dưới các giả thiết đã cho. □

Định lý 3.2. Giả sử các giả thiết **(A1)**–**(A3)** được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ nghiệm của (1.2), ký hiệu bởi $G: L^2(\Omega) \to H^1_0(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ với $G(w) = y_w$, thuộc lớp C^2. Hơn nữa, với mọi $u, v, e_Y \in L^\infty(\Omega)$, $z_{u+e_Y,v} = G'(u + e_Y)v$ là nghiệm của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y,v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v} = v & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y,v} = 0 & \text{trên } \Gamma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Với mọi $u, v_1, v_2, e_Y \in L^\infty(\Omega)$, $z_{u+e_Y,v_1v_2} = G''(u+e_Y)v_1v_2$ là nghiệm của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y,v_1v_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1v_2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1}z_{u+e_Y,v_2} = 0 & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y,v_1v_2} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \tag{3.3}$$

trong đó $z_{u+e_Y,v_1} = G'(u+e_Y)v_1$ và $z_{u+e_Y,v_2} = G'(u+e_Y)v_2$.

Chứng minh. Các kết quả được phát biểu trong định lý được suy ra từ Casas et al. (2008) (Theorem 2.4). Một số kết quả có liên quan đến định lý này được trình bày trong Casas and Mateos (2002).

Định lý 3.3. Giả sử các giả thiết **(A1)–(A3)** được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ $J(\cdot, e): L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Hơn nữa, với mọi $u, v, v_1, v_2 \in L^\infty(\Omega)$, đạo hàm riêng $J'_u(u, e)$ xác định bởi

$$J'_u(u,e)v = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) + \varphi_{u,e}\right) v dx \tag{3.4}$$

trong đó $y_{u+e_Y} = G(u+e_Y)$ và $\varphi_{u,e}$ là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) + e_J & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

với A^* là toán tử liên hợp của A xác định bởi

$$A^*\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\right). \tag{3.6}$$

Chứng minh. Bằng cách đặt

$$J_1(u,e) = \int_\Omega L\left(x, y_{u+e_Y}(x), (u+e_Y)(x)\right) dx, \tag{3.7}$$

$$J_2(u,e) = \int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x) dx, \tag{3.8}$$

khi đó

$$J(u,e) = J_1(u,e) + J_2(u,e). \tag{3.9}$$

Từ công thức (2.4) trong Casas et al. (2008) (Theorem 2.6) suy ra

$$(J_1)'_u(u,e)v = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) + \varphi_{u+e_Y}\right) v dx \tag{3.10}$$

trong đó $y_{u+e_Y} = G(u+e_Y)$ và φ_{u+e_Y} là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma. \end{cases} \tag{3.11}$$

Tương tự như vậy,

$$(J_2)'_u(u,e)v = \int_\Omega \varphi_{e_J} v dx \tag{3.12}$$

trong đó φ_{e_J} là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi = e_J & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma. \end{cases} \tag{3.13}$$

Chú ý rằng $\varphi_{u+e_Y} + \varphi_{e_J}$ là nghiệm yếu duy nhất của phương trình (3.5) và

$$J'_u(u,e)v = (J_1)'_u(u,e)v + (J_2)'_u(u,e)v = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) + \varphi_{u+e_Y} + \varphi_{e_J}\right) v dx \quad (3.14)$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_{u+e_Y}, u+e_Y) + \varphi_{u,e}\right) v dx,$$

trong đó $\varphi_{u,e} := \varphi_{u+e_Y} + \varphi_{e_J}$ là nghiệm yếu duy nhất của phương trình (3.5). Nhiều mô hình bài toán điều khiển tối ưu cho phương trình đạo hàm riêng elliptic có thể được tìm thấy trong Tröltzsch (2010) (Chapter 4). Trong đó, tác giả trình bày các kiến thức cơ bản và nền tảng về điều khiển tối ưu cho phương trình đạo hàm riêng elliptic.

4. DƯỚI VI PHÂN CỦA HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU

Hàm giá trị tối ưu của các bài toán tối ưu có tham số thường không khả vi, thậm chí lớp hàm này cũng thường không khả vi trong trường hợp dữ liệu của bài toán đang xét là khả vi. Vì vậy, việc khảo sát các tính chất vi phân của lớp hàm giá trị tối ưu theo nghĩa suy rộng là điều tất yếu. Mục này thiết lập các công thức tính toán dưới vi phân chính quy/dưới vi phân Fréchet cho hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ của bài toán $P(e)$.

Các khái niệm vi phân suy rộng trình bày dưới đây được tham khảo trong bộ sách chuyên khảo Mordukhovich (2006) (Vol. I and II) (xem thêm Mordukhovich, 2018). Cho không gian Banach X, hàm đa trị $F: X \to 2^{X^*}$ và hàm thực mở rộng $\sigma: X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé – Kuratowski* của F khi $u \to \bar{u}$ được xác định bởi

$$\operatorname*{Limsup}_{u\to\bar{u}} F(u) = \left\{u^* \in X^* \middle| \text{tồn tại } u_n \to \bar{u} \text{ và } F(u_n) \ni u_n^* \to u^* \text{ theo tôpô } w^*\right\}. \quad (4.1)$$

Với $\epsilon \geq 0$, tập các ϵ-dưới gradient của σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma := \{u \in X | \sigma(u) < \infty\}$ được cho bởi

$$\hat{\partial}_\epsilon \sigma(\bar{u}) = \left\{u^* \in X^* \middle| \liminf_{u\to\bar{u}} \frac{\sigma(u) - \sigma(\bar{u}) - \langle u^*, u-\bar{u}\rangle}{\|u-\bar{u}\|} \geq -\epsilon\right\}. \quad (4.2)$$

Dưới vi phân chính quy (dưới vi phân Fréchet) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được định nghĩa bởi

$$\hat{\partial}\sigma(\bar{u}) := \hat{\partial}_0\sigma(\bar{u}). \quad (4.3)$$

Dưới vi phân chính quy trên (dưới vi phân Fréchet trên) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được xác định bởi

$$\hat{\partial}^+\sigma(\bar{u}) := -\hat{\partial}(-\sigma)(\bar{u}). \quad (4.4)$$

Dưới vi phân Mordukhovich của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được định nghĩa bởi

$$\partial\sigma(\bar{u}) := \operatorname*{Limsup}_{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon\downarrow 0} \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u) \quad (4.5)$$

và *dưới vi phân qua giới hạn suy biến* của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được cho bởi

$$\partial^\infty\sigma(\bar{u}) := \operatorname*{Limsup}_{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon\downarrow 0, \lambda\downarrow 0} \lambda\hat{\partial}_\epsilon \sigma(u), \quad (4.6)$$

trong đó ký hiệu $u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}$ có nghĩa là $u \to \bar{u}$ và $\sigma(u) \to \sigma(\bar{u})$.

Cho các không gian Banach X và W, đối đạo hàm chính quy (đối đạo hàm Fréchet) và đối đạo hàm Mordukhovich của ánh xạ đa trị $F: X \to 2^W$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph}F$ lần lượt là ánh xạ đa trị $\hat{D}^*F(\bar{u},\bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$ xác định bởi

$$\hat{D}^*F(\bar{u},\bar{v})(v^*) = \left\{u^* \in X^* \middle| (u^*, -v^*) \in \hat{N}\big((\bar{u},\bar{v}); \operatorname{gph}F\big)\right\}, \quad (4.7)$$

và ánh xạ đa trị $D^*F(\bar{u},\bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$ xác định bởi

$$D^*F(\bar{u},\bar{v})(v^*) = \left\{u^* \in X^* \middle| (u^*, -v^*) \in N\big((\bar{u},\bar{v}); \operatorname{gph}F\big)\right\}, \quad (4.8)$$

trong đó gph$F$ là đồ thị của F, $\hat{N}\big((\bar{u},\bar{v}); \operatorname{gph}F\big)$ là nón pháp tuyến chính quy (nón pháp tuyến Fréchet) của gph$F$ tại điểm $(\bar{u},\bar{v})$ định nghĩa bởi

$$\hat{N}\big((\bar{u},\bar{v}); \operatorname{gph}F\big) = \hat{\partial}\delta\big((\bar{u},\bar{v}); \operatorname{gph}F\big), \quad (4.9)$$

và $N\big((\bar{u},\bar{v});\text{gph}F\big)$ là nón pháp tuyến Mordukhovich của gph$F$ tại điểm $(\bar{u},\bar{v})$ định nghĩa bởi

$$N\big((\bar{u},\bar{v});\text{gph}F\big)=\partial\delta\big((\bar{u},\bar{v});\text{gph}F\big). \tag{4.10}$$

Vì không gian tham số E được xét dưới dạng

$$E=L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega) \tag{4.11}$$

nên không gian liên hợp E^* của E là

$$E^*=L^\infty(\Omega)^*\times L^\infty(\Omega)^*\times L^\infty(\Omega)^*\times L^\infty(\Omega)^*. \tag{4.12}$$

Khi đó, các phần tử của E^* bao gồm các thành phần là hàm hoặc độ đo vì không gian $L^\infty(\Omega)^*$ bao gồm các hàm và độ đo. Trong bài báo này, phạm vi được xét đối với các phần tử của dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu là không gian E_1^* (chỉ bao gồm các hàm) dưới đây

$$E_1^*=L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)\subset E^*. \tag{4.13}$$

Định lý 4.1. Giả sử các giả thiết **(A1)–(A3)** được thỏa mãn. Xét $\bar{e}\in dom\,S$ và $\bar{u}_{\bar{e}}\in S(\bar{e})$ sao cho $\hat{\partial}^+J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\neq\emptyset$. Khi đó,

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})\subset J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})+\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big), \tag{4.14}$$

trong đó $U_{ad}:E\to 2^{L^\infty(\Omega)}$ là ánh xạ đa trị xác định bởi (1.9). Hơn thế nữa, nếu ánh xạ nghiệm $S:dom\,U_{ad}\to 2^{L^\infty(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})$ thì

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})=J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})+\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big). \tag{4.15}$$

Chứng minh. Từ Mordukhovich et al. (2009) (Theorem 1) suy ra rằng

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})\subset\bigcap_{(u^*,e^*)\in\hat{\partial}^+J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})}\big(e^*+\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})(u^*)\big). \tag{4.16}$$

Chú ý rằng dưới các giả thiết đã nêu thì hàm $J(\cdot,\cdot):L^\infty(\Omega)\times E\to\mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại $(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$. Điều này suy ra rằng

$$\hat{\partial}^+J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})=\{J'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\}=\big\{\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}),J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)\big\}. \tag{4.17}$$

Do đó,

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})\subset J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})+\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big). \tag{4.18}$$

Nếu ánh xạ nghiệm $S:\text{dom}\,U_{ad}\to 2^{L^\infty(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})$ (xem định nghĩa lát cắt Lipschitz trên địa phương trong Mordukhovich et al. (2009)) thì theo Mordukhovich et al. (2009) (Theorem 2), đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})=J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})+\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big), \tag{4.19}$$

và như vậy định lý đã được chứng minh.

Chú ý rằng không gian chứa các dưới vi phân (là các hàm) dạng E_1^* trong (4.13) cũng được xét trong Qui and Wachsmuth (2020). Cụ thể hơn, trong Qui and Wachsmuth (2020), các tác giả xét không gian $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)$, trong đó các tính chất của không gian Hilbert $L^2(\Omega)$ trong hai không gian thành phần đầu tiên là cần thiết. Như vậy, không gian E_1^* trong (4.13) được xét trong bài báo này là khác so với không gian tương ứng được xét trong Qui and Wachsmuth (2020). Hơn thế nữa, Qui and Wachsmuth (2020) chỉ xét không gian dạng E_1^* cho mô hình bài toán bang-bang, trong khi đó ở bài báo này không gian E_1^* trong (4.13) được xét cho mô hình bài toán tổng quát hơn.

Với mỗi $(e,u)\in E\times L^\infty(\Omega)$ với $u\in U_{ad}(e)$, các tập con $\Omega_1(e,u)$, $\Omega_2(e,u)$, $\Omega_3(e,u)$ của tập Ω được định nghĩa như sau:

$$\Omega_1(e,u)=\{x\in\Omega\,|\,u(x)=\alpha(x)+e_\alpha(x)\}, \tag{4.20}$$

$$\Omega_2(e,u)=\big\{x\in\Omega\,\big|\,\alpha(x)+e_\alpha(x)<u(x)<\beta(x)+e_\beta(x)\big\}, \tag{4.21}$$

$$\Omega_3(e,u)=\big\{x\in\Omega\,\big|\,u(x)=\beta(x)+e_\beta(x)\big\}. \tag{4.22}$$

Định lý 4.2. Giả sử các giả thiết **(A1)–(A3)** được thỏa mãn và $\bar{u}_{\bar{e}}\in S(\bar{e})$. Công thức sau đây được thiết lập

$$\widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})(u^*) \cap E_1^* = \left\{ e^* \in E_1^* \middle| \begin{array}{l} e^* = \left(0{,}0, e_\alpha^*, e_\beta^*\right), u^* = e_\alpha^* + e_\beta^*, \\ e_\alpha^*|_{\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \geq 0, e_\alpha^*|_{\Omega\backslash\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ e_\beta^*|_{\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \leq 0, e_\beta^*|_{\Omega\backslash\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

với mọi $u^* \in L^\infty(\Omega)^* \cap L^1(\Omega)$.

Chứng minh. Áp dụng Qui and Wachsmuth (2020) (Lemma 3.1 and Proposition 3.2) suy ra công thức của định lý. □

Định lý 4.3. Giả sử các giả thiết **(A1)–(A3)** được thỏa mãn và $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. Khi đó, điều kiện cần để $e^* = \left(\hat{e}_Y^*, \hat{e}_J^*, \hat{e}_\alpha^*, \hat{e}_\beta^*\right) \in \hat{\partial}\mu(\bar{e}) \cap E_1^*$ là

$$\begin{cases} \hat{e}_Y^* = \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) + \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} \\ \hat{e}_J^* = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y} \\ \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \geq 0, \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega\backslash\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\beta^*|_{\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \leq 0, \hat{e}_\beta^*|_{\Omega\backslash\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\alpha^* + \hat{e}_\beta^* = \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) + \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Hơn nữa, nếu ánh xạ nghiệm $S\colon \operatorname{dom} U_{ad} \to 2^{L^\infty(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})$ thì điều kiện cần trên cũng là điều kiện đủ để $e^* = \left(\hat{e}_Y^*, \hat{e}_J^*, \hat{e}_\alpha^*, \hat{e}_\beta^*\right) \in \hat{\partial}\mu(\bar{e}) \cap E_1^*$.

Chứng minh. Dưới các giả thiết đã cho thì hàm $J(\cdot,\cdot)\colon L^\infty(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại điểm $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})$. Do đó, dưới vi phân Fréchet trên được tính theo công thức

$$\begin{aligned} \hat{\partial}^+ J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) &= \{J'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\} \\ &= \left\{\left(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}), J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\right)\right\} \quad (4.25) \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Theo Định lý 4.1 suy ra

$$\begin{aligned} &\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \\ &\subset J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\left(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Lấy bất kỳ $e^* = \left(\hat{e}_Y^*, \hat{e}_J^*, \hat{e}_\alpha^*, \hat{e}_\beta^*\right) \in \hat{\partial}\mu(\bar{e}) \cap E_1^*$. Khi đó, $e^* \in E_1^*$ và

$$e^* - J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) \in \widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\left(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\right). \quad (4.27)$$

Vì hàm $J(u,e)$ chỉ phụ thuộc e_Y và e_J nên $J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$ có dạng

$$\begin{aligned} J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) = \Big(&\frac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) \\ &+ \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}}, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, 0{,}0\Big). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Kết hợp điều này với kết quả trong Định lý 4.2 suy ra rằng

$$\begin{cases} \hat{e}_Y^* - \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) - \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} = 0 \\ \hat{e}_J^* - y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y} = 0 \\ \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \geq 0, \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega\backslash\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\beta^*|_{\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \leq 0, \hat{e}_\beta^*|_{\Omega\backslash\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\alpha^* + \hat{e}_\beta^* = \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) + \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Tức là,

$$\begin{cases} \hat{e}_Y^* = \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) + \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} \\ \hat{e}_J^* = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y} \\ \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \geq 0, \hat{e}_\alpha^*|_{\Omega\backslash\Omega_1(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\beta^*|_{\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} \leq 0, \hat{e}_\beta^*|_{\Omega\backslash\Omega_3(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})} = 0 \\ \hat{e}_\alpha^* + \hat{e}_\beta^* = \dfrac{\partial L}{\partial u}\left(x, y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y\right) + \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Hơn nữa, nếu ánh xạ nghiệm $S\colon \operatorname{dom} U_{ad} \to 2^{L^\infty(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})$ thì Định lý 4.1 khẳng định rằng

$$\begin{aligned} &\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \\ &= J_e'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \widehat{D}^*U_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\left(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sử dụng đẳng thức này trong các lập luận trên ta suy ra rằng điều kiện cần của định lý cũng là điều kiện đủ để $e^* = \left(\hat{e}_Y^*, \hat{e}_J^*, \hat{e}_\alpha^*, \hat{e}_\beta^*\right) \in \hat{\partial}\mu(\bar{e}) \cap E_1^*$.

Nhận xét 4.1. Các công thức tính toán dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân qua giới hạn suy biến của một hàm thực mở rộng $\sigma: X \to \overline{\mathbb{R}}$ trong (4.5) và (4.6) sẽ đơn giản hơn khi X là không gian Asplund (Mordukhovich, 2006 (Vol. I)). Tuy nhiên, hàm giá trị tối ưu $\mu: E \to \overline{\mathbb{R}}$ trong bài báo này được xét trên không gian tham số E, trong đó $E = L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ không là không gian Asplund. Vì vậy, việc tính toán dưới vi phân Mordukhovich $\partial\mu(\cdot)$ và dưới vi phân qua giới hạn suy biến $\partial^\infty\mu(\cdot)$ của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ là một bài toán khó.

5. KẾT LUẬN

Bài báo thu được các kết quả mới theo hướng nghiên cứu sự ổn định vi phân của các bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính bao gồm các công thức vi phân của ánh xạ nghiệm của phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính và hàm mục tiêu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số và công thức tính toán dưới vi phân chính quy (dưới vi phân Fréchet) cho hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số đang xét. Vì hàm giá trị tối ưu trong bài báo này được xét trên không gian tham số không phải là không gian Asplund nên việc tính toán dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân qua giới hạn suy biến của hàm giá trị tối ưu này là một bài toán khó. Đây là một chủ đề nghiên cứu còn mở, việc tiếp tục nghiên cứu về chủ đề này là thú vị và ý nghĩa.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo này được tài trợ bởi đề tài cấp cơ sở với mã số T2021-34 của Trường Đại học Cần Thơ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Casas, E. (2012). Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *50*(4), 2355–2372. https://doi.org/10.1137/120862892

Casas, E., & Mateos, M. (2002). Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *40*(5), 1431–1454. https://doi.org/10.1137/S0363012900382011

Casas, E., de los Reyes, J. C., & Tröltzsch, F. (2008). Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. *SIAM Journal on Optimization*, *19*(2), 616–643. https://doi.org/10.1137/07068240X

Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic theory*. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational analysis and generalized differentiation. II. Applications*. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92775-6

Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., & Yen, N. D. (2009). Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming. *Mathematical Programming*, *116*(1-2), Ser. B, 369–396. https://doi.org/10.1007/s10107-007-0120-x

Qui, N. T. (2020). Subdifferentials of marginal functions of parametric bang–bang control problems. *Nonlinear Analysis*, *195*, 111743, 13pp. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111743

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2018). Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. *Optimization*, *67*(12), 2157–2177. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1522634

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2019). Full stability for a class of control problems of semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *57*(4), 3021–3045. https://doi.org/10.1137/17M1153224

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2020). Subgradients of marginal functions in parametric control problems of partial differential equations. *SIAM Journal on Optimization*, *30*(2), 1724–1755. https://doi.org/10.1137/18M1200956

Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*. American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/gsm/112