Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2021.142

BÀI TOÁN VỊ TRÍ TRÊN CÂY VỚI TRỌNG SỐ ĐỈNH HÌNH TRÒN

Mai Đình Lộc[1*], Nguyễn Thị Cẩm Tiên [1], Võ Nguyễn Minh Hiếu[1] và Phạm Vương Đăng Linh[2,3]

[1]*Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[3]*Tổ Toán, Trường Trung học phổ thông chuyên Lý Tự Trọng, Thành phố Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Mai Đình Lộc (email: locb1800225@student.ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 18/05/2021
Ngày nhận bài sửa: 21/06/2021
Ngày duyệt đăng: 29/10/2021

Title:
Location problem on trees with solid circular vertex weights

Từ khóa:
Bài toán vị trí, 1-median, cây, trọng số đỉnh hình tròn

Keywords:
Location problem, 1-median, tree, solid circular vertex weights

ABSTRACT

In this paper, the 1-median problem with the solid circular vertex weights is considered. The set operations according to the Minkowski sum are introduced. Then, optimal criterion for a vertex that is a 1-median of the trees with solid circular vertex weights is given. Based on the result, an algorithm to solve the 1-median problem with solid circular vertex weights is proposed.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán vị trí 1-median được xem xét với trọng số đỉnh hình tròn. Đầu tiên các phép toán tập hợp theo nghĩa Minkowski được giới thiệu. Sau đó, điều kiện tối ưu cho một đỉnh 1-median trên cây với trọng số đỉnh hình tròn được chỉ ra. Trên cơ sở đó, một thuật toán để giải quyết bài toán 1-median với trọng số đỉnh hình tròn sẽ được đề xuất.

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết vị trí là một lĩnh vực khoa học ứng dụng, đã được quan tâm từ thế kỉ XVII. Ngày nay, lý thuyết vị trí trở thành một hướng nghiên cứu quan trọng, được nhiều nơi trên thế giới đẩy mạnh phát triển. Lý thuyết vị trí nghiên cứu để tìm vị trí của một vật thể hay một cơ sở vật chất sao cho hàm mục tiêu đạt giá trị tối ưu. Để dễ hình dung, có thể lấy ví dụ như bài toán xác định vị trí của một điểm trên mặt phẳng để tổng khoảng cách từ điểm đó đến ba điểm cho trước là nhỏ nhất, đây cũng là bài toán vị trí đầu tiên được đưa ra bởi Fermat một cách không chính thức vào khoảng thế kỉ XVII. Lý thuyết vị trí có ứng dụng rất lớn trong nhiều lĩnh vực như hoạch định kinh tế, chính sách xã hội, quân sự quốc phòng, công nghệ thông tin,… Do đó, bài toán vị trí đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Trong lĩnh vực này, có nhiều khái niệm vị trí được nghiên cứu tùy vào các nhu cầu, bối cảnh trong thực tế, một số khái niệm có thể kể đến như: điểm trung tâm, điểm trung vị có thứ tự, các bài toán có liên quan đến dữ liệu xác suất, các bài toán cân bằng,…

Qua nghiên cứu các bài toán vị trí median trên đồ thị, người ta thấy rằng trọng số thông thường (exactly vertex weights) chưa thể giải quyết nhiều bài toán thực tiễn. Do đó, một hướng phát triển mới được quan tâm trong những năm gần đây đó là bài toán vị trí với trọng số đỉnh mang giá trị tập hợp. Đây là một hướng tổng quát cho bài toán 1-median, ở đó, các dữ liệu về trọng số có thể biến thiên trong một phạm vi nhất định. Bài toán 1- median với trọng số đỉnh tập hợp và bài toán tối ưu đa mục tiêu có một số điểm tương đồng nhau, như đặc trưng về trọng số ở đỉnh, thuật toán để giải. Đã có một số tác giả với các công trình gần với chủ đề của bài báo này, như Hamacher et al. (1999) với bài toán 1 - median đa mục tiêu trên đồ thị cây, Kalcsics et al. (2014) với bài toán p – median đa mục tiêu trên đồ thị tổng quát. Bài toán 1 – median với trọng số đỉnh tập hợp là một bài toán thuộc lĩnh vực tối ưu tổ hợp, đây là một chủ đề thu hút nhiều nhà nghiên cứu trong thời gian gần đây (Günther et al., 2019; Khan et al., 2015).

Trong bài báo này, các vấn đề liên quan đến "bài toán vị trí trên cây với trọng số đỉnh hình tròn" được trình bày theo cấu trúc sau: Ở phần đầu, các thông tin sơ lược về vấn đề nghiên cứu đã được giới thiệu. Ở phần tiếp theo, trình bày một số định nghĩa, các khái niệm và các công thức tính toán liên quan đến phần tập hợp. Kế tiếp, việc so sánh hai hình tròn được xem xét. Sau đó, định nghĩa bài toán 1- median trên cây với trọng số đỉnh hình tròn cùng các tính chất nghiệm và thuật toán liên quan. Cuối cùng là phần kết luận vấn đề và tài liệu tham khảo.

2. CÁC KẾT QUẢ CƠ BẢN

Phần này là điểm lại và xây dựng một số kết quả cơ bản về các phép tính trên hình tròn và phép so sánh hai hình tròn. Sau đó, khái niệm về bài toán 1-median với trọng số đỉnh hình tròn sẽ được nêu lại.

2.1. Các phép toán trên tập hợp và so sánh hai hình tròn

Trong không gian thực $\mathbb{R}^d$ cho hai hình tròn S_1 và S_2, với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa tích của một số với một hình tròn và tổng hai hình tròn như sau:

$$\lambda S_1 = \left\{\lambda a : a \in S_1\right\},$$

$$S_1 + S_2 = \left\{a + b : a \in S_1, b \in S_2\right\}.$$ (tổng Minkowski)

Một cách tổng quát, ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i : a_i \in S_i\right\}$$

trong đó, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ và S_i là các hình tròn trong $\mathbb{R}^d$ với mọi $i \in \left\{1,\ldots,k\right\}$.

Nhìn chung, ta không có cách nào xác định hình dạng cụ thể của tổng hai tập hợp (Pasko et al., 2003). Tuy nhiên, đối với đa giác, ta có một thuật toán xác định tổng hai đa giác được đề xuất bởi Agarwal et al. (2002), De Berg et al. (1997). Đối với hình tròn ta cũng chứng minh được rằng tổng của hai hình tròn hoặc tích của một số với một hình tròn là một hình tròn.

Mệnh đề 2.1.1 *Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai tập hợp S_1 và S_2 là hai hình tròn được xác định như sau:*

$$S_1 = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 \le R_1^2\right\},$$

$$S_2 = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - c\right)^2 + \left(y - d\right)^2 \le R_2^2\right\}.$$

Khi đó, tổng Minkowski $S_1 + S_2$ cũng là một hình tròn và được xác định bởi:

$$S_1 + S_2 = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \left(a + c\right)\right)^2 + \left(y - \left(b + d\right)\right)^2 \le \left(R_1 + R_2\right)^2\right\}.$$

Chứng minh

Đặt

$$S = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - (a + c)\right)^2 + \left(y - (b + d)\right)^2 \le \left(R_1 + R_2\right)^2\right\}.$$

Ta xét hai điểm bất kì $A\left(x_A, y_A\right) \in S_1$, $B\left(x_B, y_B\right) \in S_2$, khi đó:

$$\left(x_A - a\right)^2 + \left(y_A - b\right)^2 \le R_1^2,$$

$$\left(x_B - c\right)^2 + \left(y_B - d\right)^2 \le R_2^2.$$

Ta đặt $C = A + B$ thì $C = \left(x_A + x_B, y_A + y_B\right) \in S_1 + S_2$ và:

$$\left[\left(x_A + x_B\right) - \left(a + c\right)\right]^2 + \left[\left(y_A + y_B\right) - \left(b + d\right)\right]^2$$

$$\le R_1^2 + R_2^2 + 2\left[\left(x_A - a\right)\left(x_B - c\right) + \left(y_A - b\right)\left(y_B - d\right)\right]$$

$$\le R_1^2 + R_2^2 + 2.\sqrt{R_1^2.R_2^2} = \left(R_1 + R_2\right)^2$$ (do bất đẳng thức Bunhiacopxki).

Suy ra $C \in S$ hay $S_1 + S_2 \subseteq S$. (1)

Giả sử $M\left(x_M, y_M\right) \in S$, khi đó $\exists t \in \left[0,1\right], \exists \varphi \in \left[0,2\pi\right]$:

$$M=\begin{pmatrix} a+c+t\left(R_1+R_2\right)\cos\varphi, \\ b+d+t\left(R_1+R_2\right)\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Đặt $A=\left(a+tR_1\cos\varphi,\ b+tR_1\sin\varphi\right)$, $B=\left(c+tR_2\cos\varphi, d+tR_2\sin\varphi\right)$ ta có $A+B=M$. Mà $A\in S_1, B\in S_2$ nên $M\in S_1+S_2$, suy ra $S\subseteq S_1+S_2$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $S=S_1+S_2$. ■

Mệnh đề 2.1.2 *Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình tròn S được xác định bởi tâm $I\left(a,b\right)$ và bán kính R:*

$$S=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2\right\}.$$

Khi đó, với mọi $\lambda\in R$, tập hợp λS là hình tròn được xác định bởi tâm $I'\left(\lambda a,\lambda b\right)$ và bán kính $\left|\lambda\right|R$:

$$\lambda S=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:\left(x-\lambda a\right)^2+\left(y-\lambda b\right)^2\le\left(\lambda R\right)^2\right\}.$$

Chứng minh

Đặt

$$T=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:\left(x-\lambda a\right)^2+\left(y-\lambda b\right)^2\le\left(\lambda R\right)^2\right\}.$$

Với $\lambda=0$ thì $\lambda S\equiv O$ (gốc tọa độ) và mệnh đề đúng. Ta xét trường hợp $\lambda\neq 0$.

Với mọi $A\left(x_A,y_A\right)\in S$, ta có:

$$\left(x_A-a\right)^2+\left(y_A-b\right)^2\le R^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2\left[\left(x_A-a\right)^2+\left(y_A-b\right)^2\right]\le\lambda^2R^2 .$$

$$\Rightarrow \left(\lambda x_A-\lambda a\right)^2+\left(\lambda y_A-\lambda b\right)^2\le\left(\lambda R\right)^2.$$

Suy ra $\lambda A\in T$.

Vậy $\lambda S\subseteq T.$

Ngược lại, với $M\left(x_M,y_M\right)\in T$ thì $\left(x_M-\lambda a\right)^2+\left(y_M-\lambda b\right)^2\le\left(\lambda R\right)^2$.

$$\Rightarrow \lambda^2\left[\left(\frac{x_M}{\lambda}-a\right)^2+\left(\frac{y_M}{\lambda}-b\right)^2\right]\le\left(\lambda R\right)^2$$

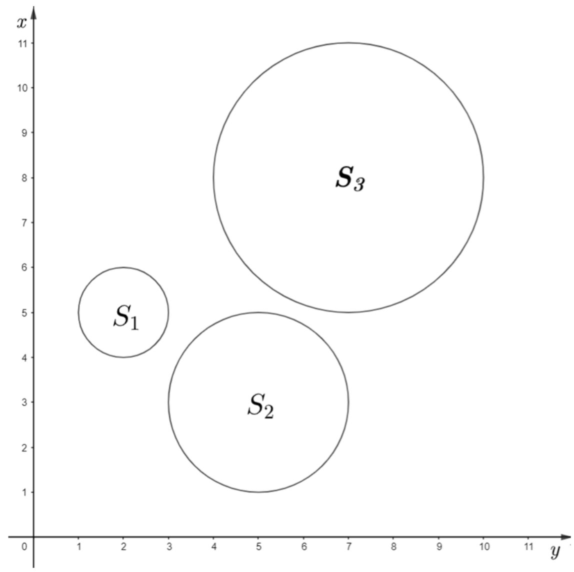
$$\Rightarrow \left(\frac{x_M}{\lambda}-a\right)^2+\left(\frac{y_M}{\lambda}-b\right)^2\le R^2$$

Suy ra $N\left(\dfrac{x_M}{\lambda},\dfrac{y_M}{\lambda}\right)\in S$ và $M=\lambda N$

Do đó $T\subseteq\lambda S.$

Vậy $T=\lambda S$. ■

Mệnh đề có thể được tổng quát hóa cho trường hợp quả cầu trong $\mathbb{R}^d$. Hình 1 minh họa hình tròn S_3 là tổng của hai hình tròn S_1 và S_2.



Hình 1. Tổng của hai hình tròn trong không gian hai chiều

Tiếp theo ta điểm qua một số nội dung trong lĩnh vực tối ưu tập.

Một tập hợp C là một hình nón trong R^d nếu với bất kỳ $x \in C$ và $t > 0$ kéo theo tx cũng nằm trong C. Hơn thế nữa, nếu $C + C \subseteq C$ thì hình nón C là lồi. Ta luôn xét hình nón lồi từ đây về sau. Cho trước một hình nón C, ta định nghĩa quan hệ của hai vecto y và z trong R^d như sau.

$$y \leq_C z \Leftrightarrow z - y \in C.$$

Quan hệ này được gọi là quan hệ tiền thứ tự vì nó có tính chất phản xạ và bắc cầu. Sau khi thiết lập quan hệ của hai điểm, ta sẽ định nghĩa quan hệ của hai tập. Ta nói $S_1 \leq_l S_2$ nếu với bất kỳ a_2 trong S_2, thì tồn tại a_1 trong S_1 sao cho $a_1 \leq_C a_2$. Mặt khác, ta có thể nói rằng $S_1 \leq_l S_2$ nếu và chỉ nếu $S_2 \subseteq S_1 + C$. Ngoài ra, ta cũng có thể định nghĩa quan hệ $\geq_l$ như sau: $S_1 \geq_l S_2 \Leftrightarrow S_2 \leq_l S_1$. Rõ ràng quan hệ mới được định nghĩa vẫn giữ nguyên các tính chất của quan hệ ban đầu, do đó, về sau ta có thể tự do sử dụng một trong hai quan hệ tùy vào tình huống thuận tiện.

Tiếp theo, ta xét khái niệm biên Pareto của một tập. Cho hai vecto x và y trong $\mathbb{R}^d$, ta nói rằng hai vecto x và y không so sánh được với nhau nếu không có $x \leq_C y$ lẫn $y \leq_C x$. Ngoài ra, ta kí hiệu $x <_C y$ để chỉ $x \leq_C y$ và $x \neq y$. Ta biểu diễn biên Pareto của tập S bằng:

$$.\left(S\right)_{\text{Par}} = \left\{x \in S : \nexists y \in S, y <_C x\right\}..$$

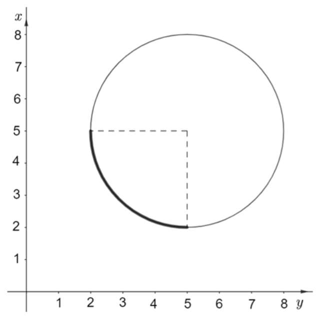
Ta biết rằng $S_1 \leq_l S_2$ nếu và chỉ nếu $\left(S_1\right)_{\text{Par}} \leq_l \left(S_2\right)_{\text{Par}}$ (Hamacher et al., 1999). Từ đó, ta định nghĩa $S_1 <_l S_2$ nếu và chỉ nếu $\left(S_1\right)_{\text{Par}} \leq_l \left(S_2\right)_{\text{Par}}$ và $\left(S_1\right)_{\text{Par}} \neq \left(S_2\right)_{\text{Par}}$. Hơn nữa, nếu $S_1 \leq_l S_2$ và $S_2 \leq_l S_1$ thì $S_1 \approx_l S_2$ và ta nói rằng hai tập bằng nhau theo quan hệ $\leq_l$. Trong trường hợp $\left(S_1\right)_{\text{Par}} \not\leq_l \left(S_2\right)_{\text{Par}}$ và $\left(S_2\right)_{\text{Par}} \not\leq_l \left(S_1\right)_{\text{Par}}$ thì ta nói hai tập S_1, S_2 không so sánh được với nhau.

2.2. So sánh hai hình tròn

Trong phần này, ta tập trung nghiên cứu các hình tròn dương:

$$S = \left\{x = \left(x_1, x_2\right) \middle| \left(x_1 - a\right)^2 + \left(x_2 - b\right)^2 \leq R^2,\ a - R \geq 0, b - R \geq 0\right\},$$

với quan hệ so sánh trên nón $\mathbb{R}^2_+$ gồm các vecto $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, trong đó $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1,2$, từ đó tìm điều kiện cần và đủ để hai hình tròn so sánh được với nhau theo quan hệ $\leq_l$ như đã đề cập. Trước tiên ta có nhận xét sau: với hình tròn dương S cho trước, tập biên Pareto của S ứng với nón $\mathbb{R}^2_+$ là phần biên của hình tròn ở góc một phần tư thứ ba. Tập biên Pareto của hình tròn S ở Hình 2 là phần biên của S được viền đậm.

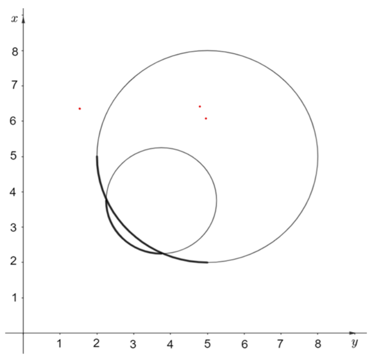


Hình 2. Tập biên Pareto của S

Đặt $LP(S) = \min_{A \in S} x_A$, $BP(S) = \min_{A \in S} y_A$, với $A = (x_A, y_A)$.

Mệnh đề 2.2.1 *Cho hai hình tròn dương* S_1, S_2. *Khi đó nếu* $S_1 <_l S_2$ *thì* $LP(S_1) < LP(S_2)$ *và* $BP(S_1) < BP(S_2)$.

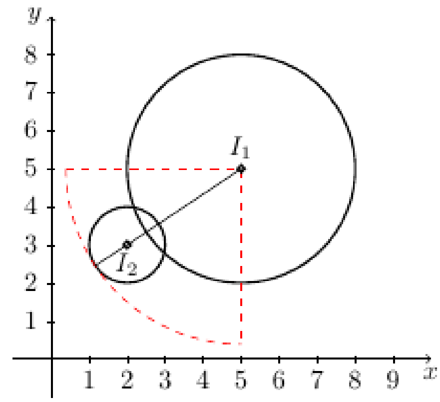
Mệnh đề cho ta điều kiện cần để hai hình tròn so sánh được với nhau, tuy nhiên, đây không phải là điều kiện đủ. Một trường hợp không thỏa mãn được minh họa thông qua Hình 3 vì hai hình tròn đã cho thỏa Mệnh đề 2.2.1 nhưng rõ ràng không so sánh được với nhau.



Hình 3. Hai hình tròn không so sánh được

Ta sẽ tìm điều kiện đủ để hai hình tròn so sánh được với nhau.

Ta có quan sát sau (Hình 4):



Hình 4. Khoảng cách lớn nhất từ I_1 đến S_2

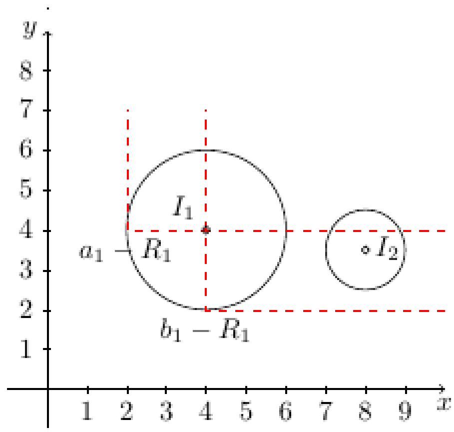
Cho hai đường tròn S_1, S_2. Khi đó đường thẳng đi qua hai tâm I_1, I_2 (tương ứng với hai hình tròn S_1, S_2) cắt đường tròn S_2 tại hai giao điểm thì khoảng cách từ I_1 đến giao điểm xa hơn là khoảng cách lớn nhất từ I_1 đến một điểm bất kì trên S_2.

Mệnh đề 2.2.2 *Cho hai hình tròn dương* S_1, S_2. *Khi đó* $S_1 <_l S_2$ *khi và chỉ khi* $LP(S_1) < LP(S_2)$, $BP(S_1) < BP(S_2)$ *và hai giao điểm trên* S_2 *được tạo thành bởi đường thẳng qua hai tâm đều thuộc* $(S_1)_{Par} + R^2_+$.

Chứng minh:

Dễ thấy khi $S_1 <_l S_2$ thì theo định nghĩa $\forall y \in S_2, \exists x \in S_1 : x \leq_{\mathbb{R}^2_+} y$ nên chiều thuận của mệnh đề là hiển nhiên. Giả sử điều kiện đủ được thỏa mãn, theo nhận xét vừa nêu, ta suy ra mọi điểm trong S_2 đều thuộc $(S_1)_{Par} + \mathbb{R}^2_+$, dẫn đến $S_1 <_l S_2$. ■

Để thuận tiện cho các tính toán về sau, ta thiết lập công thức dựa trên điều kiện đã nêu. Cho hai hình tròn S_1 có tâm $I_1(a_1, b_1)$ và bán kính R_1, S_2 có tâm $I_2(a_2, b_2)$ và bán kính R_2 (Hình 5). Dễ thấy rằng $LP(S_1) = a_1 - R_1$, $BP(S_1) = b_1 - R_1$. Ngoài ra, ta cũng nhận xét rằng với hai hình tròn S_1, S_2 có $LP(S_1) < LP(S_2)$, $BP(S_1) < BP(S_2)$ và tâm $I_2 \in a_1 + \mathbb{R}^2_+$ hoặc $I_2 \in b_1 + \mathbb{R}^2_+$ thì ta có ngay $S_1 <_l S_2$.



Hình 5. Hai hình tròn dương S_1, S_2 với $S_1 <_l S_2$

Trong trường hợp ngược lại, nếu tâm I_2 không nằm trong hai miền nói trên thì ta sử dụng điều kiện ở Mệnh đề 2.2.2. Chú ý rằng lúc này $a_2 < a_1$, $b_2 < b_1$. Bằng các phép tính sơ cấp ta có thể tìm được tọa độ của hai giao điểm A, B của I_1I_2 tương ứng với hai đường tròn S_1, S_2 sao cho hoành độ của hai giao điểm này bé hơn so với hai giao điểm tương ứng trên cùng đường tròn. Cụ thể, ta tìm được:

$$A\left(a_1 + (a_2 - a_1).\frac{R_1}{\sqrt{M}}, b_1 + (b_2 - b_1).\frac{R_1}{\sqrt{M}}\right),$$

$$B\left(a_2 + (a_2 - a_1).\frac{R_2}{\sqrt{M}}, b_2 + (b_2 - b_1).\frac{R_2}{\sqrt{M}}\right),$$

với $M = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$.

Như vậy, trong trường hợp tâm I_2 không nằm ở một trong hai miền $a_1 + \mathbb{R}^2_+$ và $b_1 + \mathbb{R}^2_+$ thì ta phải có $B \in A + \mathbb{R}^2_+$. Điều kiện $B \in A + \mathbb{R}^2_+$ tương đương

$$\begin{cases} a_2 - a_1 + \dfrac{a_2 - a_1}{\sqrt{M}}(R_2 - R_1) \ge 0 \\ b_2 - b_1 + \dfrac{b_2 - b_1}{\sqrt{M}}(R_2 - R_1) \ge 0 \end{cases}.$$

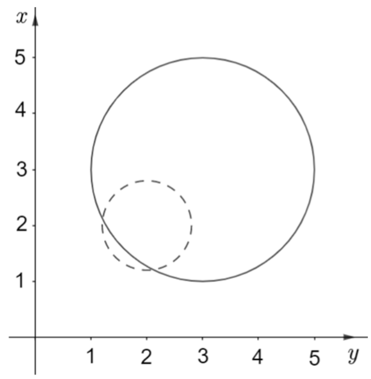
Tóm lại, với hai hình tròn S_1, S_2 như đã nêu, ta có $S_1 <_l S_2$ khi và chỉ khi $LP(S_1) < LP(S_2)$ và $BP(S_1) < BP(S_2)$ và thỏa ít nhất một trong ba điều kiện sau:

1) $a_1 \le a_2$.

2) $b_1 \le b_2$.

3) $\begin{cases} a_2 - a_1 + \dfrac{a_2 - a_1}{\sqrt{M}}(R_2 - R_1) \ge 0 \\ b_2 - b_1 + \dfrac{b_2 - b_1}{\sqrt{M}}(R_2 - R_1) \ge 0 \end{cases}.$

Ví dụ 1 Ta xét hai hình tròn S_1 và S_2 trong Hình 6, ở đó hình tròn S_1 có viền nét liền và hình tròn S_2 có viền nét đứt.



Hình 6. Hai hình tròn trong mặt phẳng

Với phương trình tổng quát của hai hình tròn là:

$$S_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 \le 4.$$

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 0.64.$$

Từ phương trình tổng quát trên, ta có hình tròn S_1 có tâm $I_1(3,3)$, bán kính $R_1 = 2$, hình tròn S_2 có tâm $I_2(2,2)$, bán kính $R_2 = 0.8$.

Suy ra $LP(S_1) = 1$, $BP(S_1) = 1$, $LP(S_2) = 1.2$, $BP(S_2) = 1.2$

Do đó $LP(S_1) < LP(S_2)$, $BP(S_1) < BP(S_2)$.

Vì $3 = a_1 > a_2 = 2$, $3 = b_1 > b_2 = 2$, ta có

$$a_2 - a_1 + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{M}}.(R_2 - R_1)$$

$$= a_2 - a_1 + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2}}.(R_2 - R_1)$$

$$= (2-3) + \frac{2-3}{\sqrt{(2-3)^2 + (2-3)^2}}.(0.8-2)$$

$$= \frac{-5+3\sqrt{2}}{5} < 0$$ (không thỏa điều kiện).

Suy ra $S_1 \not\preceq_l S_2$. Tương tự, $LP(S_2) > LP(S_1)$ nên $S_2 \not\preceq_l S_1$.

Vậy hai hình tròn S_1 và S_2 không so sánh được với nhau.

Mệnh đề 2.2.3 *Với bất kỳ các hình tròn dương S_1, S_2 và S_3, ta có*

i) $kS_1 \leq_l lS_1$, *với* $0 < k \leq l$.

ii) $\frac{1}{2}S_1 \sim_l S_2 \Leftrightarrow S_1 \sim_l 2S_2$.

iii) $S_1 \sim_l S_2 \Leftrightarrow S_1 + S_3 \sim_l S_2 + S_3$,

trong đó, $\sim \in \{<, \leq\}$.

Chứng minh

Ta chứng minh mệnh đề với trường hợp $\sim = \leq$, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

(i) Với $0 < k \leq l$ và $A(a_1, a_2)$ là tâm của hình tròn S_1, suy ra $lA - kA \notin \mathbb{R}^2_-$. Hơn thế nữa, với R_1 là bán kính của hình tròn S_1 thì $l(a_1 - R_1; a_2 - R_1) - k(a_1 - R_1; a_2 - R_1) \notin \mathbb{R}^2_-$ suy ra $LP(kS_1) \leq LP(lS_1)$ và $BP(kS_1) \leq BP(lS_1)$. Vậy $kS_1 \leq_l lS_1$, với $0 < k \leq l$.

(ii) Ta chứng minh tương tự như (i).

(iii) Dễ dàng chứng minh được nếu $S_1 \leq_l S_2$, ta có $S_1 + S_3 \leq_l S_2 + S_3$. Mặt khác, nếu $S_1 + S_3 \leq_l S_2 + S_3$, ta giả sử $S_1 \not\leq_l S_2$ nên tồn tại $x \in S_1$ và $y \in S_2$ sao cho $y - x \notin \mathbb{R}^2_+$, suy ra $(y+z) - (x+z) \notin \mathbb{R}^2_+$ với $z \in \mathbb{R}^2_+$. Khi đó $S_1 + S_3 \not\leq_l S_2 + S_3$ (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy phát biểu (iii) là đúng. ■

2.3. Bài toán 1 – median

Trong mục này, ta mô tả bài toán 1-median với trọng số đỉnh hình tròn. Cho một đồ thị cây $T(V,E)$, trong đó V là tập các đỉnh của đồ thị và E là tập các cạnh. Ta xác định mỗi đỉnh $v \in V$ với một trọng số đỉnh hình tròn (dương) S_v, tương tự, mỗi cạnh $e \in E$ ứng với độ dài $l(e)$. Với một điểm θ nằm trên đồ thị, ta kí hiệu $d(v,\theta)$ để chỉ độ dài đường đi từ đỉnh v đến điểm θ. Bài toán 1-median cổ điển đi tìm một điểm p sao cho tối thiểu hóa hàm mục tiêu: $F(\theta) = \sum_{v \in V} w_v.d(v,\theta)$, trong đó, w_v là trọng số đỉnh v. Đã có một số kết quả kinh điển cho bài toán này, có thể kể đến như: Hakimi (1965) chỉ ra tồn tại một đỉnh $v_0 \in V$ sao cho hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất, điều kiện cần và đủ của đỉnh 1-median (Kariv & Hakimi, 1979), thuật toán để giải bài toán (Goldman, 1971; Kariv & Hakimi, 1979).

Trong trường hợp bài toán 1-median có trọng số đỉnh hình tròn, ta tìm điểm θ để tối thiểu hóa hàm mục tiêu $F(\theta) = \sum_{v\in V} S_v.d(v,\theta)$. Do S_v là tập hợp nên, như kết quả ở phần trên, giá trị của hàm mục tiêu tại mỗi điểm θ là một tập hợp với $F(\theta) = \left\{\sum_{v\in V} x_v.d(v,\theta) : x_v \in A_v\right\}$. Với thứ tự $\leq_l$ như đã trình bày, ta tìm $\theta_0 \in T$ sao cho không tồn tại θ để $F(\theta) <_l F(\theta_0)$ (*). Ta nói một điểm θ_0 như vậy là một điểm hữu hiệu trên cây. Để tiện phát biểu, sau đây ta gọi bài toán 1-median với trọng số đỉnh hình tròn là MPC (1-Median Problem with Circular Vertex Weights).

3. TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM TỐI ƯU VÀ THUẬT TOÁN

Trong phần này, tính chất của điểm hữu hiệu trên đồ thị cây được nghiên cứu. Đầu tiên, ta nhớ lại rằng quan hệ so sánh mà ta đang xét là trên tập hợp, do đó có thể xảy ra trường hợp các hàm mục tiêu tại một số đỉnh không so sánh được với nhau. Như vậy, trong bài toán MPC, ta sẽ đặt mục tiêu tìm tất cả các đỉnh sao cho hàm mục tiêu tại các đỉnh đó thỏa điều kiện (*) và không so sánh được với nhau và đó sẽ là đỉnh hữu hiệu. Tuy nhiên, đến lúc này ta chưa thể khẳng định rằng chỉ có các đỉnh của đồ thị mới thỏa điều kiện này, ta sẽ xem xét cho các điểm trên đồ thị. Ngoài ra, còn một số tính chất quen thuộc của bài toán 1-median cổ điển cũng được nghiên cứu. Trước khi xem xét chi tiết, ta đặt $\tau(u)$ là tập hợp tất cả các cây con được tạo thành khi xóa điểm u trên đồ thị.

Mệnh đề 3.1 Nếu tồn tại một cây con $T_l \in \tau(u)$ sao cho $\frac{1}{2}W <_l W(T_l)$ với một đỉnh *u,* thì không có điểm hữu hiệu của MPC trong $T \setminus T_l$.

Chứng minh

Như trong chứng minh ta sẽ thấy rằng mệnh đề đúng với một điểm u bất kì trên đồ thị (điểm hoặc đỉnh), thậm chí với u là một đỉnh, chứng minh sẽ tổng quát hơn. Thật vậy, khi u là đỉnh, gọi $.n.$ là bậc của đỉnh u, khi đó ta xóa đỉnh u thì sẽ có n cây con được tạo thành, ta đặt là $\tau(u) = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$. Ta cũng gọi n đỉnh $u_1, \ldots, u_n$ tương ứng trên các cây con $T_1, \ldots, T_n$ là các đỉnh kề với đỉnh u trên đồ thị cây T. Theo giả thiết, $T_1 \in \tau(u)$ thỏa $\frac{1}{2}\mathrm{W} <_l \mathrm{W}(T_1)$, ta sẽ chứng minh rằng $F(u_1) <_l F(u)$.

Đặt $F_{T_k}(u_k) = \sum_{v\in T_k} \mathrm{w}_v.d(v,u_k), \forall k = \overline{1,n}.$ Khi đó:

$$F(u) = \sum_{k=1}^{n} F_{T_k}(u_k) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{w}(T_k).d(u_k,u),$$

$$F(u_1) = \sum_{k=1}^{n} F(u_k) + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{w}(T_k).\left(d(u_k,u) + d(u,u_1)\right) + \mathrm{w}(u).d(u,u_1).$$

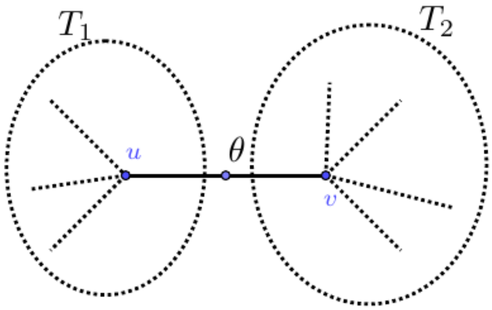
Bằng các phép biến đổi đơn giản, ta có:

$$F(u) - F(u_1) = \begin{pmatrix} \mathrm{w}(T_1) - \mathrm{w}(T_2) - \mathrm{w}(T_3) - ... \\ -\mathrm{w}(T_n) - \mathrm{w}(u) \end{pmatrix}.d(u,u_1).$$

Từ giả thiết, ta suy ra $F(u_1) <_l F(u)$. Tương tự, ta chứng minh được với mọi $v \notin T_1$ thì $F(v) >_l F(u_1)$, do đó ta có kết luận của mệnh đề. ■

Mệnh đề 3.2 *Cho hai đỉnh kề u, v trong cây T sao cho u là đỉnh hữu hiệu của MPC và v không phải là đỉnh hữu hiệu. Khi đó, mọi điểm nằm giữa u và v đều không phải là điểm hữu hiệu.*

Chứng minh



Hình 7. Chia cây T thành hai cây con T_1 và T_2

Theo định nghĩa, ta có $F(v) >_l F(u)$. Ta chia cây T thành hai cây con như hình bên dưới:

Ta có:

$$F(v) = F_{T_2}(v) + F_{T_1}(u) + w(T_1).d(u,v)$$

$$F(u) = F_{T_2}(v) + F_{T_1}(u) + w(T_2).d(u,v)$$

Vì $F(v) >_l F(u)$ và $d(u,v) \in \mathbb{R}^+$ nên $w(T_1) >_l w(T_2)$. (*)

Gọi θ là một điểm bất kì nằm giữa u, v. Khi đó, với các kí hiệu như trong chứng minh Mệnh đề 3.1, ta có:

$$F(\theta) = F_{T_2}(v) + \mathrm{w}(T_2).d(v,\theta) + F_{T_1}(u) + \mathrm{w}(T_1).d(u,\theta).$$

$$= F(v) + x\left[w(T_2) - w(T_1)\right], \text{ với } x = d(v,\theta).$$

Từ (*) suy ra $F(\theta) <_l F(v)$. Tương tự, ta chứng minh được: $F(u) <_l F(\theta)$.

Vậy $F(v) >_l F(\theta) >_l F(u)$. ■

Hệ quả 3.3 Nếu tồn tại điểm θ nằm giữa hai đỉnh liền kề u, u', trong đó, u và θ là hai điểm hữu hiệu thì u' cũng là điểm hữu hiệu.

Mệnh đề 3.4 *Nếu hai điểm θ và θ' là các điểm hữu hiệu, thì bất kỳ điểm nào nằm trên đường nối hai điểm đó cũng là điểm hữu hiệu.*

Chứng minh

Vì θ và θ' là hai điểm hữu hiệu nên ta có $F(\theta) \approx_l F(\theta')$ hoặc $F(\theta)$ và $F(\theta')$ không so sánh được với nhau. Khi đó, với ρ là một điểm bất kì nằm giữa θ và θ' và tính chất của $F(\rho)$ như đã nêu ở chứng minh mệnh đề 3.2, ta có ρ là điểm hữu hiệu. ■

Từ các tính chất vừa nêu, ta nhận xét rằng nếu chỉ tồn tại một đỉnh hữu hiệu thì tất cả các điểm còn lại của đồ thị đều không phải là điểm hữu hiệu, nếu có nhiều hơn một đỉnh hữu hiệu thì tất cả các điểm nằm giữa các đỉnh hữu hiệu đều là điểm hữu hiệu. Hiển nhiên không thể xảy ra trường hợp tồn tại điểm hữu hiệu mà không tồn tại đỉnh hữu hiệu.

Định lý 3.5 Cho một đỉnh v với $\tau(v) = \{T_1, T_2, ..., T_k\}$, nếu $\frac{1}{2}\mathrm{W} \not\leq_l \mathrm{W}(T_i)$ với mọi $i = 1, \ldots, k$, thì v là một đỉnh hữu hiệu của cây.

Chứng minh

Từ giả thiết $\frac{1}{2}\mathrm{W} \not\leq_l \mathrm{W}(T_i)$ suy ra $\frac{1}{2}\mathrm{W} <_l \mathrm{W}(T \setminus T_i)$. Khi đó, lặp lại chứng minh ở Mệnh đề 3.4, ta có $F(v) <_l F(v_i), \forall i = \overline{1,k}$, trong đó, v_i là đỉnh kề với v và thuộc cây T_i. Từ đó, ta suy ra v là đỉnh hữu hiệu của MPC. ■

Bây giờ ta sẽ đưa ra một thuật toán để giải quyết MPC trên cây T. Ý tưởng của thuật toán dựa vào các tính chất đã nêu, cụ thể là ta sẽ tìm ra tất cả các đỉnh hữu hiệu của MPC đã cho. Từ đó tập các điểm hữu hiệu sẽ là đồ thị cây con T' của cây T nối các đỉnh đã tìm được.

Thuật toán: Giải bài toán vị trí 1-median với trọng số đỉnh hình tròn

Input: Một ví dụ về bài toán 1-median trên cây với trọng số đỉnh hình tròn.

Lưu các lá của T trong Γ.

Đặt trọng số tại mỗi đỉnh v là S_v là hình tròn tâm $I_v(a_v, b_v)$ và bán kính R_v.

Đặt $D = \varnothing$ là tập tất cả các đỉnh hữu hiệu.

Tính $\frac{1}{2}\mathrm{W} = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} S_v$ *là hình tròn tâm* $I(a,b)$ *và bán kính* R.

while $\Gamma \neq \varnothing$ **do**

if $u \in \Gamma$ **then**

if $a_u - R_u < a - R$ và $b_u - R_u < b - R$ và $((a_u \leq a$ hoặc $b_u \leq b)$ hoặc

$$\begin{cases} a - a_u + \dfrac{a - a_u}{\sqrt{(a-a_u)^2 + (b-b_u)^2}}(R - R_u) \geq 0 \\ b - b_u + \dfrac{b - b_u}{\sqrt{(a-a_u)^2 + (b-b_u)^2}}(R - R_u) \geq 0 \end{cases}$$

then

Gán $\Gamma := \Gamma \setminus \{u\}$ và $S_z := S_z + S_u$ với z là đỉnh cha của u và xóa cạnh (z,u).

if z là lá **then**

$\Gamma := \Gamma \cup \{z\}$.

end if

else

Gán $D := D \cup \{u\}$ và $\Gamma := \Gamma \setminus \{u\}$.

end if

end if

end while

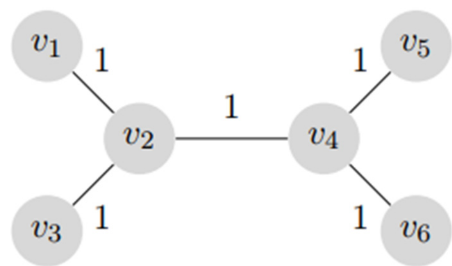
Output: Tập hợp D các đỉnh hữu hiệu.

Tiếp theo, ta sẽ xem xét độ phức tạp của thuật toán. Trong mỗi lần lặp lại, ta xử lý trên một đỉnh của cây, do đó có nhiều lần lặp lại tuyến tính. Trong mỗi vòng lặp, ta tính tổng của hai hình tròn tốn thời gian $O(1)$ và so sánh hàm mục tiêu với $\frac{1}{2}\mathrm{W}$ cũng cần thời gian $O(1)$. Do đó, độ phức tạp tổng thể là $O(n)$.

Định lý 3.6 Bài toán MPC trên cây với trọng số đỉnh là hình tròn có thể được giải quyết trong thời gian $O(n)$.

Thuật toán 2 được minh họa trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 2 Xét một ví dụ của MPC trên một cây T như trong Hình 8. Trọng số của đỉnh v_i được ký hiệu bởi S_i với $i = 1,\ldots,6$. Mô tả chi tiết thông qua hình ảnh liên quan đến các hình tròn S_i với $i = 1,\ldots,6$ cũng được thể hiện như sau:



Hình 8. Ví dụ về bài toán MPC

Trọng số của mỗi đỉnh được thể hiện như sau:

S_1:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1^2\},$$

S_2:

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 2^2\},$$

S_3:

$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1^2\},$$

S_4:

$$S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 2^2\},$$

S_5:

$$S_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 \le 1^2\right\},$$

S_6:

$$S_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-5)^2 + (y-3)^2 \le 1.5^2\right\}.$$

Đầu tiên, chúng ta tính được $\mathrm{W} = \sum_{i=1}^{6} S_i$ là hình tròn có tâm $I(20;18)$ và bán kính $R = 8.5$, suy ra $\frac{1}{2}\mathrm{W}$ là hình tròn có tâm $I'(10;9)$ và bán kính $R' = 4.25$. Ta bắt đầu với các lá v_1, v_3, v_5, v_6.

Với đỉnh v_1, ta có

$$a_1 - R_1 = 1 < 5.75 = a' - R',$$
$$b_1 - R_1 = 1 < 4.75 = b' - R'$$

và $a_1 = 2 < 10 = a'$

Suy ra $S_1 <_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó, ta thiết lập

$$S_2 := S_2 + S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-5)^2 + (y-6)^2 \le 3^2\right\}$$

và $\Gamma := \Gamma \setminus \{v_1\} = \{v_3, v_5, v_6\}$.

Với đỉnh v_3, ta cũng có thể kiểm tra được rằng $S_3 <_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó,

$$S_2 := S_2 + S_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-7)^2 + (y-9)^2 \le 4^2\right\}$$

và $\Gamma := (\Gamma \setminus \{v_3\}) \cup \{v_2\} = \{v_2, v_5, v_6\}$.

Với đỉnh v_2, ta có $b_2 - R_2 = 5 > 4.75 = b' - R'$ suy ra $S_2 \not<_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó, ta thiết lập

$$D := D \cup \{v_2\} = \{v_2\} \text{ và } \Gamma := \Gamma \setminus \{v_2\} = \{v_5, v_6\}.$$

Tương tự, với đỉnh v_5, ta kiểm tra được $S_5 <_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó, ta thiết lập

$$S_4 := S_4 + S_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-8)^2 + (y-6)^2 \le 3^2\right\}$$

và $\Gamma := \Gamma \setminus \{v_5\} = \{v_6\}$.

Với đỉnh v_6, ta kiểm tra được $S_6 <_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó, ta được

$$S_4 := S_4 + S_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-13)^2 + (y-9)^2 \le 4.5^2\right\}$$

và $\Gamma := (\Gamma \setminus \{v_6\}) \cup \{v_4\} = \{v_4\}$.

Với đỉnh v_4, ta kiểm tra được rằng $S_4 \not<_l \frac{1}{2}\mathrm{W}$. Do đó, $D = \{v_2, v_4\}$ và $\Gamma = \{\varnothing\}$.

Cuối cùng, ta được tập $D = \{v_2, v_4\}$ là các đỉnh hữu hiệu. Theo mệnh đề 3.3, đường nối $P(v_2, v_4)$ chứa các điểm hữu hiệu.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu vấn đề vị trí mạng cơ sở đơn lẻ với sự kết hợp để tối ưu hóa giá trị tập hợp. Các đỉnh trong đồ thị với trọng số đỉnh mang giá trị hình tròn dương được xem xét. Đối với vấn đề trên đồ thị cây, các kết quả của Goldman và Hamacher trong bối cảnh trọng số mang giá trị tập hợp được mở rộng. Thuộc tính này giúp phát triển hiệu quả thuật toán cho các vấn đề liên quan trên cây. Liên quan đến tối ưu hóa giá trị tập hợp, tối ưu hóa giá trị tổ hợp chắc chắn là một mô hình mới. Vì vậy, các ý tưởng về mô hình này trong khoa học vị trí có thể thúc đẩy các nghiên cứu sâu hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Agarwal, P. K., Flato, E., & Halperin, D. (2002). Polygon decomposition for efficient construction of Minkowski sums. *Computational Geometry*, *21*(1-2), 39-61.

De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmars, M., & Schwarzkopf, O. (1997). *Computational Geometry Algorithms and Applications*. Springer.

Goldman, A. J. (1971). Optimal center location in simple networks, *Transportation Science, 5(2)*, 539-560.

Günther, C., Köbis, E., & Popovici, N. (2019). On strictly minimal elements w.r.t preorder relations in set-valued optimization, *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, *1*(*3)*, 205 – 219.

Hakimi, S. L. (1965). Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. *Operations research*, *13*(3), 462-475.

Hamacher, H. W., Labbé, M., & Nickel, S. (1999). Multicriteria network location problems with sum objectives. *Networks, 33*(2), 79-92.

Kalcsics, J., Nickel, S., Pozo, M. A., Puerto, J., & Rodríguez-Chía, A. M. (2014). The multicriteria p-facility median location problem on networks. *European Journal of Operational Research*, *235*(3), 484-493.

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. II: The p-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*(3), 513-538.

Khan, A. A., Tammer, C., & Zlinescu, C. (2015). *Set-valued Optimization,* An introduction with Applications*.* Springer. Berlin.

Pasko, A., Okunev, O., & Savchenko, V. (2003). Minkowski sums of point sets defined by inequalities. *Computers & Mathematics with Applications*, *45*(10-11), 1479-1487.