Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2020.079

BÀI TOÁN LIÊN THÔNG *P*-MEDIAN TRÊN ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ VÀ ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN ĐẦY ĐỦ

Nguyễn Ngọc Đăng Duy[1*] và Võ Nguyễn Minh Hiếu[2]
[1]*Sinh viên Sư phạm Toán học, Khóa 43, Trường Đại học Cần Thơ*
[1]*Sinh viên Sư phạm Toán học, Khóa 42, Trường Đại học Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Ngọc Đăng Duy (email: duy3300@gmail.com)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 31/03/2020
Ngày nhận bài sửa: 09/06/2020
Ngày duyệt đăng: 28/08/2020

Title:
Connected p-median problem on complete graphs and complete bipartite graphs

Từ khóa:
Bài toán p-median, đồ thị đầy đủ, đồ thị lưỡng phân đầy đủ, thuật toán thời gian tuyến tính

Keywords:
P-median problem, complete graph, complete partite graph, linear-time algorithm

ABSTRACT

In this paper, a connected p-median problem on complete graphs and complete bipartite graphs is mentioned. To solve this problem, several theorems and lemmas are given during research. Besides, linear-time algorithms are developed to solve the connected p-median problem on complete graphs and complete bipartite graphs.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, một bài toán vị trí liên quan đến các thành phần liên thông trên đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phân đầy đủ được đề cập. Để giải quyết bài toán này, một số định lí và bổ đề được đưa ra trong quá trình nghiên cứu. Bên cạnh đó, các thuật toán thời gian tuyến tính được đưa ra để giải bài toán liên thông p-median trên đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phân đầy đủ.

Trích dẫn: Nguyễn Ngọc Đăng Duy và Võ Nguyễn Minh Hiếu, 2020. Bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phân đầy đủ. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 56(4A): 26-32.

1 MỞ ĐẦU

Bài toán vị trí khởi nguồn từ bài toán nổi tiếng được đưa ra bởi nhà toán học Fermat (1607-1665) vào khoảng thế kỷ XVII, đó là tìm vị trí của một điểm mới trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ nó đến ba điểm cho trước là nhỏ nhất. Bài toán đó sau này đã được giải bởi Torricelli (Krarup and Vajda, 1997). Từ bài toán này, trường hợp đối với một tập gồm điểm đã được đưa ra và điểm làm tối thiểu hàm khoảng cách đến tất cả các điểm còn lại được gọi là điểm median trên mặt phẳng, và hàm cần làm tối thiểu gọi là hàm median (Kariv and Hakimi, 1979).

Bài toán vị trí nói trên đã được áp dụng vào các loại đồ thị đặc biệt như đồ thị cây, đồ thị có dạng mạng lưới,… tuy nhiên vì một lí do đặc biệt nào đó mà người ta cần tìm nhiều hơn một cơ sở mới trên mạng lưới đồ thị sao cho hàm khoảng cách từ các điểm có sẵn trên mặt phẳng đến tập hợp các điểm đó là nhỏ nhất, mặt khác các điểm này được đòi hỏi phải là các điểm liên thông, từ đây một lớp các bài toán đã được đưa ra nghiên cứu.

Nghiên cứu của Chang *et al*. (2015) về bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị khối, các tác giả chứng minh rằng bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị khối với độ dài tổng quát là *NP*-khó. Trong trường hợp đặc biệt, khi đồ thị khối có độ dài các cạnh bằng nhau thì tác giả cũng chỉ ra rằng bài toán liên thông *p*-median có thể giải trong thời gian tuyến tính.

Công trình nghiên cứu của Kang *et al*. (2016) về bài toán liên thông *p*-centdian trên đồ thị khối, các tác giả đã xem xét lại bài toán *p*-median liên thông với phương pháp giải đơn giản hóa và sau đó giải bài toán hai mục tiêu *p*-median và *p*-center (gọi tắt là *p*-centdian) trong thời gian O(n^2), trong đó *n* là số đỉnh của đồ thị khối.

Trong bài báo này, tiếp nối những kết quả của các tác giả trên, bài báo này đặt ra một vấn đề về bài toán vị trí liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phân đầy đủ.

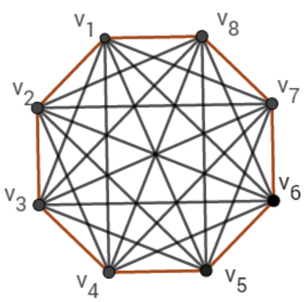
2 GIỚI THIỆU VỀ BÀI TOÁN

2.1 Một số khái niệm có liên quan

Theo Bondy and Murty (1976), đồ thị G được định nghĩa là một bộ phận hợp thành bởi ba thành phần $V(G), E(G), \phi(G)$ trong đó $V(G)$ là một tập không rỗng chứa các đỉnh của G, $E(G)$ là một tập chứa các cạnh của G, $E(G)$ rời nhau với $V(G)$, ϕ_G là một ánh xạ liên kết mỗi cạnh của G với một cặp đỉnh của G. Nếu ta gọi e là một cạnh của đồ thị G và u,v là hai đỉnh sao cho $\phi_G(e)=uv$ thì ta nói e là cạnh nối u với v. Khi đó u,v liên thuộc với nhau; u và v được gọi là các điểm nút của e. Một đồ thị được gọi là đồ thị đơn nếu nó không có cạnh nào có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau và không có hai cạnh nào nối cùng một cặp đỉnh.

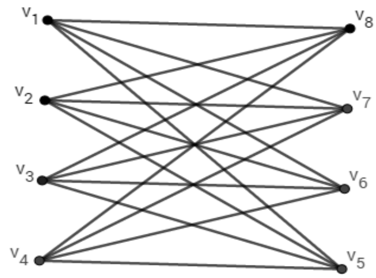
Hai đỉnh của một đồ thị được gọi là *kề nhau* nếu tồn tại một cạnh nối hai điểm đó

Một đồ thị được gọi là *đồ thị đầy đủ* (Hình 1) nếu nó là đồ thị đơn và hai đỉnh bất kỳ của đồ thị luôn kề nhau.



Hình 1: Đồ thị đầy đủ

Đồ thị lưỡng phân là một đồ thị mà trong đó tập hợp các đỉnh của nó có thể được chia thành hai tập con rời nhau sao cho hai đỉnh thuộc cùng một tập con thì không kề nhau. Đồ thị *lưỡng phân đầy đủ* (Hình 2) là một *đồ thị lưỡng phân* mà trong đó bất kì một đỉnh nào từ tập con này, đều kề với tất cả các đỉnh thuộc tập con kia.



Hình 2: Đồ thị lưỡng phân đầy đủ

Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v là dãy $x_0,x_1,...,x_n$ trong đó n là số nguyên dương, $x_0=u, x_n=v$ và $(x_i,x_{i+1})\in E(G), i=0,1,2,...,n-1$.

Trong bài báo này, ta chỉ đề cập đến các đồ thị đơn mà các cạnh của nó có độ dài đơn vị, nghĩa là $l(e)=1$ với mọi $e\in E(G)$ và khoảng cách giữa hai điểm u,v là độ dài đường đi độ dài ngắn nhất nối u và v.

Một tập hợp con S của $V(G)$ là liên thông nếu luôn có một đường đi nối hai đỉnh bất kỳ trong S.

Bài báo này đề cập đến một bài toán là tìm một tập hợp liên thông S_p gồm p đỉnh ($p<n$ với n là số đỉnh của đồ thị đầy đủ G), là tập con của $V(G)$ sao cho tổng khoảng cách có trọng số từ những đỉnh thuộc $\overline{S}_p=V(G)\backslash S_p$ đến S_p là nhỏ nhất , nghĩa là làm tối thiểu hàm mục tiêu:

$$F(S_p)=\sum_{v\in\overline{S_p}} w_v d(v,S_p)$$

với $d(v,S_p)=\min\{d(v,u)\mid u\in S_p\}$ và w_v là trọng số của đỉnh v.

3 BÀI TOÁN LIÊN THÔNG *P*-MEDIAN TRÊN ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ

Bây giờ ta xét bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ với trường hợp $p=1$. Khi đó, đây là bài toán 1-median cổ điển trên đồ thị đầy đủ với hàm mục tiêu là:

$$F(S_1) = \sum_{v \in \overline{S_1}} w_v d(v, S_1)$$

Ta cần tìm $S_1 = \{u\}$ sao cho $F(S_1)$ đạt min.

Do ta đang xét đồ thị đầy đủ với độ dài đơn vị nên khoảng cách giữa hai đỉnh phân biệt bất kỳ thuộc đồ thị đều bằng 1. Do đó hàm mục tiêu ta đang xét là hàm:

$$F(S_1) = \sum_{v \in \overline{S_1}} \mathrm{w}_v$$

Với mỗi tập $S \subset V$, ta đặt $w(S) = \sum_{v \in S} w_v$, khi đó $w(V) = \sum_{v \in V} w_v$ là một hằng số và $F(S_1) = F(\{u\}) = w(V) - w_u$. Dễ thấy $S_1 = \{u\}$ với u là đỉnh có trọng số lớn nhất trên đồ thị G sẽ làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là tập hợp liên thông $S_p = \left\{\arg\max_{v \in V(G)} \{\mathrm{w}_v\}\right\}$, trong đó hàm $\arg\max(\bullet)$ trả về đỉnh có trọng số lớn nhất.

Đối với trường hợp $p \geq 2$, bài toán tương ứng là bài toán tìm tập hợp gồm p đỉnh liên thông S_p sao cho hàm median sau đây đạt giá trị nhỏ nhất:

$$F(S_p) = \sum_{v \in \overline{S_p}} \mathrm{w}_v$$

Giả sử ta có S_p là tập hợp gồm p điểm lấy từ $V(G)$ sao cho hàm median $F(S_p)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 3.1: Đánh chỉ số các đỉnh của G theo thứ tự trọng số giảm dần, nghĩa là $\mathrm{w}_{v_1} \geq \mathrm{w}_{v_2} \geq \ldots \geq \mathrm{w}_{v_n}$ thì khi đó *p*-median liên thông của G là $S_p = \{v_1; v_2; \ldots; v_p\}$.

Chứng minh

Với mọi tập hợp $S \subset V(G)$ và $|S| = p$, ta luôn có:

$$F(S) - F(S_p) = w(S_p) - w(S) \geq 0$$

Bổ đề được chứng minh. ■

Theo kết quả có được ở **Bổ đề 3.1**, ta chứng minh được tập liên thông *p*-median của G là tập hợp p đỉnh có trọng số lớn nhất thuộc $V(G)$. Từ đây, ta xây dựng thuật toán tổ hợp để tìm tập hợp liên thông *p*-median S_p trên đồ thị đầy đủ G cho trước. Ý tưởng của thuật toán là xem xét điểm trung vị của một dãy các trọng số đỉnh cho trước và xét tập gồm các phần tử lớn hơn hoặc bằng điểm trung vị đó. Nếu ta thu được một tập có số phần tử lớn hơn *p*, khi đó ta tiếp tục tìm trung vị của dãy gồm các phần tử trong tập mới. Ngược lại, nếu số phần tử trong tập này nhỏ hơn *p*, ta tìm trung vị của tập còn lại để bổ sung các phần tử cho tập đang xét. Như vậy, mỗi lần lặp ta thu được số phần tử bằng một nửa số phần tử đang xét. Hơn nữa, thuật toán tìm trung vị của một dãy có độ phức tạp bằng độ dài của dãy đó (Hoare, 1961). Giả sử độ phức tạp của bài toán là *T(n)* với *n* là số đỉnh của *G*, khi đó,

$$T(\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}\left(\left[\frac{n}{2^i}\right]\right) \quad (*)$$

với *k* là số bước lặp của thuật toán thỏa $2^k \leq n$ và kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của phần tử *x*. Vì *T(c) = 1* với $c = 1$ nên từ biểu thức (*) suy ra *T(n)* là một hàm bậc nhất theo *n*. Nói một cách khác, thuật toán chạy trong thời gian tuyến tính.

Sau đây, chúng ta xem xét một thuật toán thời gian tuyến tính để tìm tập hợp $\Omega_p = \max(B, p)$ gồm p số lớn nhất trong một tập hợp B gồm n số $(p < n)$.

Thuật toán 3.2: Tìm p số lớn nhất trong một tập hợp B gồm n phần tử là số thực $(p < n)$

Input: Một tập hợp B gồm n phần tử là số. $\Omega_p = \varnothing$

While $|\Omega_p| < p$ **do**

med:= trung vị của B

$B^{<} := \{\mathrm{b} \in \mathrm{B} : \mathrm{b} < \mathrm{med}\}$

$B^{=} := \{\mathrm{b} \in \mathrm{B} : \mathrm{b} = \mathrm{med}\}$

$B^{>} = \{\mathrm{b} \in \mathrm{B} : \mathrm{b} > \mathrm{med}\}$

If $|B^{>}| + |\Omega_p| > \mathrm{p}$ **do**

Đặt $B = B^{>}$.

Else

If $|B^{>}| + |B^{=}| + |\Omega_p| \geq p$ **do** $\Omega_p := \Omega_p \cup B^{>}$ và chọn $p - |\Omega_p| - |B^{>}|$ phần tử trong $B^{=}$ để nối vào Ω_p.

Else

Đặt $\Omega_p := \Omega_p \cup (B^{=} \cup B^{>})$ và $B = B^{<}$

Endif

Endif

Endwhile

Output: Tập hợp Ω_p gồm p số lớn nhất lấy từ B.

Ví dụ 3.3: Tìm tập hợp Ω_p gồm 5 số lớn nhất lấy từ tập hợp $B = \{4,5,2,6,3,7,9,10\}$

Áp dụng **Thuật toán 3.2**, ta có kết quả như sau:

Vòng lặp số 1:

Ta có $|\Omega_p| = 0 < p = 5$ nên $med = 6$

$B^{<} = \{2,3,4,5\}; B^{=} = \{6\}; B^{>} = \{7,9,10\}$

Vì $|B^{>}| + |\Omega_p| = 3 < p = 5$ và $|B^{>}| + |B^{=}| + |\Omega_p| = 4 < p = 5$ nên

Đặt $\Omega_p := \Omega_p \cup (B^{=} \cup B^{>}) = \{6,7,9,10\}$ và $B = B^{<}$

Vòng lặp số 2:

Ta có $|\Omega_p| = 4 < p = 5$ nên $med = 4$

$B^{<} = \{2,3\}; B^{=} = \{4\}; B^{>} = \{5\}$

Vì $|B^{>}| + |\Omega_p| = 5 = p$ và $|B^{>}| + |B^{=}| + |\Omega_p| = 6 > p = 5$ nên

$\Omega_p := \Omega_p \cup B^{>} = \{6,7,9,10,5\}$ và chọn $p - |\Omega_p| - |B^{>}| = 0$ phần tử thuộc $B^{=}$ để nối vào Ω_p

Đến đây $|\Omega_p| = 5 = p$ nên **Thuật toán 3.2** dừng.

Vậy ta thu được tập hợp Ω_p cần tìm là $\Omega_p = \{6,7,9,10,5\}$.

Sau đây, bằng cách áp dụng **Thuật toán 3.2**, chúng tôi đề xuất một thuật toán để giải bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ.

Thuật toán 3.4: Giải bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ.

Input: Đồ thị đầy đủ G với n đỉnh

Đặt $V(G) = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ với tập trọng số tương ứng $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}.\Omega_p = \varnothing$.

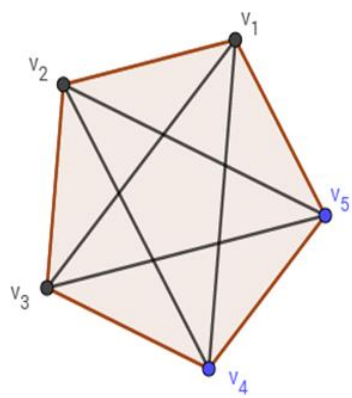
Áp dụng **Thuật toán 3.2** để tìm tập hợp Ω_p gồm *p* số lớn nhất lấy từ tập hợp B.

Output: Tập S_p gồm *p* đỉnh liên thông tương ứng với tập Ω_p.

Ví dụ 3.5: Cho đồ thị đầy đủ như Hình 3, với trọng số cho bởi Bảng 3. Ta giải bài toán với $p = 4$.

Bảng 3: Trọng số các đỉnh

i	1	2	3	4	5
w_{v_i}	4	6	8	7	2



Hình 3: Đồ thị đầy đủ K_5

Ta có $B = \{4,6,8,7,2\}.\Omega_p = \varnothing$.

Áp dụng **Thuật toán 3.2,** ta được:

$\Omega_p = \{4,6,7,8\}$.

Vậy $\Omega_p := \{4;6;7;8\}$ hay $S_p = \{v_1; v_2; v_4; v_3\}$.

Định lý 3.6: Bài toán liên thông p-median trên đồ thị đầy đủ có thể giải trong thời gian tuyến tính.

4 BÀI TOÁN LIÊN THÔNG *P*-MEDIAN TRÊN ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN ĐẦY ĐỦ

Bây giờ, ta xét bài toán liên thông p-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ.

Bài toán của chúng ta trong trường hợp này có thể được phát biểu như sau: Tìm tập hợp liên thông p-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ K sao cho hàm median sau đây đạt giá trị nhỏ nhất:

$$F(S_p) = \sum_{v \in \overline{S_p}} w_v d(v, S_p)$$

với $d(v, S_p) = \min\{d(v,u) \mid u \in S_p\}$, hay:

$$d(u,v) = \begin{cases} 2 & u, v \in V_i, \\ 1 & u \in V_i, v \in V_j, i \neq j. \end{cases}$$

Đối với trường hợp $p = 1$, bài toán trên cũng là bài toán 1-median cổ điển trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ, đó là tìm một đỉnh trên đồ thị này sao cho tổng khoảng cách từ các đỉnh còn lại thuộc đồ thị đến nó là nhỏ nhất.

Theo định nghĩa của đồ thị lưỡng phân đầy đủ, ta có thể chia tập hợp đỉnh của K thành hai tập rời nhau V_1 và V_2 sao cho hai đỉnh thuộc cùng một tập thì không kề nhau.

Đặt $u_1 = \arg\max_{v \in V_1}\{w_v\}$ và $u_2 = \arg\max_{v \in V_2}\{w_v\}$. Nếu $F(\{u_1\}) \geq F(\{u_2\})$ thì u_1 là điểm 1-median, ngược lại thì u_2 là điểm 1-median.

Bây giờ ta xét trường hợp $p = 2$, khi đó bài toán của chúng ta là tìm tập hợp liên thông 2-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ K sao cho hàm median

$$F(S_p) = \sum_{v \in \overline{S_p}} w_v d(v, S_p)$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì S_2 liên thông nên S_2 gồm hai đỉnh, trong đó có một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2.

Dễ thấy $d(v, S_p) = 1$ do S_p là tập hợp liên thông, do đó hàm median của chúng ta là hàm:

$$F(S_2) = \sum_{v \in \overline{S_2}} w_v = w(V) - w(S_2)$$

Ta xét mệnh đề sau:

Mệnh đề 4.7: Tập liên thông 2-median S_2 của K thỏa $F(S_2) \to \min$ gồm hai đỉnh là $\arg\max_{v \in V_1}\{w_v\}$ và $\arg\max_{v \in V_2}\{w_v\}$.

Chứng minh

Đặt $k_1 = \arg\max_{v \in V_1}\{w_v\}$, $k_2 = \arg\max_{v \in V_2}\{w_v\}$, khi đó $S_2 = \{k_1; k_2\}$

$\forall S_2' \subset V(K)$ và S_2' là tập liên thông thì khi đó $S_2' = \{u_1; u_2\}$ với $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$, ta luôn có:

$$F(S_2') - F(S_2) = w(S_2) - w(S_2')$$
$$= \left(w_{k_1} - w_{u_1}\right) + \left(w_{k_2} - w_{u_2}\right) \geq 0$$

Như vậy ta luôn có $F(S_2') \geq F(S_2)$ với mọi $S_2' \subset V(K)$. Mệnh đề được chứng minh.■

Như vậy với $p = 2$ thì tập liên thông p-median S_p là tập gồm 2 điểm là trọng số lớn nhất lần lượt nằm trong hai thành phần phân chia V_1 và V_2.

Bằng phép chứng minh tương tự như **Mệnh đề 4.7**, ta chứng minh được với $p > 2$, tập liên thông S_p là tập liên thông 2-median hợp với tập hợp gồm $p-2$ đỉnh nữa là các đỉnh có trọng số lớn nhất trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ K sau khi đã bỏ đi các đỉnh thuộc tập 2-median. Thật vậy, ta có chứng minh như sau:

Theo như **Mệnh đề 4.7**, ta có tập liên thông S_p với $p = 2$ chứa hai đỉnh có trọng số lớn nhất lần lượt nằm trên hai thành phần phân chia của đồ thị K. Với $p > 2$, ta xét tập liên thông S_p gồm hai đỉnh $\arg\max_{v\in V_1}\{w_v\}$, $\arg\max_{v\in V_2}\{w_v\}$ và $p-2$ đỉnh có trọng số lớn nhất trên đồ thị K, khi đó $\forall S\subset V(K)$, S liên thông và $|S|=p$, ta có:

$$F(S_p)-F(S)=\sum_{v\notin S_p} w_v-\sum_{v\notin S} w_v=\sum_{v\in S} w_v-\sum_{v\in S_p} w_v\le 0$$

Như vậy $F(S_p)\le F(S)$ với mọi tập liên thông $S\subset V(K)$ và $|S|=p$ ■

Từ đây ta sẽ đi xây dựng thuật toán thời gian tuyến tính để giải bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ K. Ý tưởng của thuật toán này là sử dụng **Thuật toán 3.2** để tìm ra đỉnh có trọng số lớn nhất lần lượt nằm trên hai thành phần phân chia, và sau đó, ta thêm các đỉnh có trọng số lớn hơn median của các đỉnh còn lại để thêm vào tập S_p cho đến khi ta có p đỉnh thuộc S_p.

Thuật toán 4.8: Giải bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ K.

Input: Đồ thị lưỡng phân đầy đủ K với $V(K)=V_1\cup V_2; V_1\cap V_2=\varnothing$ và $|V(K)|=|V_1|+|V_2|=n$, $\Omega=\varnothing$.

Gọi $\Omega_1=\max(V_1,1)$ là tập hợp chứa 1 đỉnh có trọng số lớn nhất trong V_1

Áp dụng **Thuật toán 3.2** để tìm Ω_1

Gọi $\Omega_1'=\max(V_2,1)$ là tập hợp chứa 1 đỉnh có trọng số lớn nhất trong V_2

Áp dụng **Thuật toán 3.2** để tìm Ω_1'

$\Omega:=\Omega_1\cup\Omega_1'$

Đặt $B=\{V_1\cup V_2\}\setminus\{\Omega\}$

Áp dụng **Thuật toán 3.2** để tìm tập hợp $\Omega_{p-2}=\max(B,p-2)$ gồm $p-2$ đỉnh có trọng số lớn nhất lấy từ B.

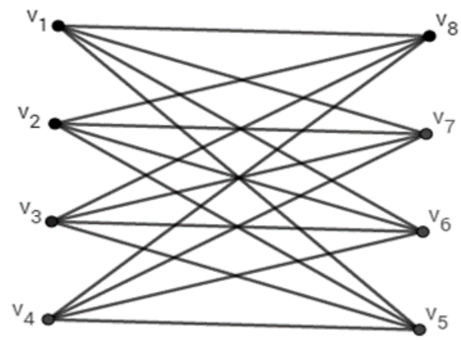
Đặt $\Omega:=\Omega\cup\Omega_{p-2}$

Output: Tập S_p gồm *p* đỉnh liên thông tương ứng với tập Ω.

Ví dụ 4.9: Cho đồ thị lưỡng phân đầy đủ như trong **Hình 4** và trọng số cho bởi **Bảng 4**. Ta giải bài toán với $p=5$.

Bảng 4: Trọng số các đỉnh

i	1	2	3	4	5	6	7	8
w_{v_i}	1	5	2	8	6	9	3	4



Hình 4: Đồ thị lưỡng phân đầy đủ

Đồ thị lưỡng phân đầy đủ đã cho có $V_1=\{v_1;v_2;v_3;v_4\}$ và $V_2=\{v_5;v_6;v_7;v_8\}$.

$\Omega=\varnothing$.

Đặt $\Omega_1=\max(V_1,1)$, áp dụng **Thuật toán 3.2** với $B:=V_1$, ta thu được $\Omega_1=\{8\}$

Đặt $\Omega_1'=\max(V_2,1)$, áp dụng **Thuật toán 3.2** với $B:=V_2$, ta thu được $\Omega'_1=\{9\}$

$\Omega:=\Omega_1\cup\Omega_1'$

Đặt $B:=\{V_1\cup V_2\}\setminus\{\Omega\}=\{1;5;2;6;3;4\}$

Tiếp tục áp dụng **Thuật toán 3.2** với tập hợp B để tìm tập hợp Ω_{p-2} gồm $p-2$ đỉnh có trọng số lớn nhất trong B, ta có được $\Omega_{p-2}=\{4;5;6\}$

Đặt $\Omega:=\Omega\cup\Omega_{p-2}$

Vậy $\Omega=\{4;5;6;8;9\}$ và do đó $S_p=\{v_8;v_2;v_5;v_4;v_6\}$.

Định lí 4.10: Bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị lưỡng phân đầy đủ có thể giải trong thời gian tuyến tính.

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các thuật toán thời gian tuyến tính đã được đưa ra để giải bài toán liên thông *p*-median trên đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phân đầy đủ. Trong các bài báo kế tiếp chúng ta có thể nghiên cứu tìm một thuật toán thời gian tuyến tính để giải bài toán liên thông trên các dạng đồ thị khác, tiêu biểu là đồ thị có nhiều hơn hai thành phần phân chia, đồ thị đa lớp, các loại đồ thị có trọng số dương/âm

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bondy, J.A. , and Murty, U.S.R. , 1976. Graph theory with applications. The Macmillan Press Ltd. Great Britain, 264 pages.

Chang, S.C., Yen, W.C.K., Wang, Y.L., and Liu, J.J., 2015. The connected *p*-median problem on block graphs. Springer – Verlag.

Hoare, C.A.R., 1961. Algorithm 65: Find . Communications of the ACM, 4(7): 321–322.

Kang, L., Zhou, J. and Shan, E., 2018 Algorithms for connected p-centdian problem on block graphs. J Comb Optim, 36(1): 252–263.

Kariv, O., and Hakimi, S.L., 1979. An algorithmic approach to network location problems, II. The *p*-medians. SIAM Journal on Applied Mathematics, 37(3): 539-560.

Krarup, J., and Vajda, S., 1997. On Torricelli's geometrical solution to a problem of Fermat IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry, 8(3): 215–224.