Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.038

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ MẠNH

Lâm Quốc Anh[1*], Nguyễn Hữu Nghĩa[2], Nguyễn Cao Phong[3], Lê Phương Thảo[1], Đỗ Thị Kim Thoản[1] và Phạm Thị Vui[1]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây*
[3]*Phòng Quản lý đào tạo, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Quốc Anh (email: quocanh@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 13/08/2017
Ngày nhận bài sửa: 03/10/2017
Ngày duyệt đăng: 27/04/2018

Title:
An application of nonlinear scalarization to solve the strong vector equilibrium problem

Từ khóa:
Bài toán cân bằng vectơ mạnh, bài toán phụ, phép chiếu mêtric, phép vô hướng hóa phi tuyến, thuật toán chiếu lặp

Keywords:
Auxiliary problem, metric projection, nonlinear scalarization, projection iterative algorithm, strong vector equilibrium problem

ABSTRACT

In this paper, a strong vector equilibrium problem (SVEP) which objective function given by a sum of two funtions is considered. By using nonlinear scalarization and metric projection, a projection iterative algorithm for solving SVEP is built. To fulfil it, an auxiliary problem (AP) for SVEP is investigated. Moreover, some properties of objective function given by a sum of two funtions and the relationship between two problems, SVEP and AP, are studied. And then, a projection iterative algorithm for SVEP is proposed. Results obtained in this paper generalize the corresponding ones of Wang and Li (Wang and Li, 2015).

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán cân bằng vector mạnh với hàm mục tiêu được cho dưới dạng tổng của hai hàm được nghiên cứu. Phép vô hướng hóa phi tuyến và phép chiếu metric được áp dụng nhằm xây dựng thuật toán chiếu lặp để tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh (SVEP). Để xây dựng thuật toán giải đó, trước hết bài toán phụ (AP) liên kết với bài toán SVEP được thiết lập. Hơn nữa, các tính chất cho hàm mục tiêu dạng tổng cùng với mối quan hệ của hai bài toán trên cũng được nghiên cứu đến. Từ đó, thuật toán chiếu lặp cho bài toán SVEP đã được đề xuất. Các kết quả đạt được trong bài báo này là một mở rộng kết quả tương ứng của Wang và Li (2015).

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Nguyễn Hữu Nghĩa, Nguyễn Cao Phong, Lê Phương Thảo, Đỗ Thị Kim Thoản và Phạm Thị Vui, 2018. Ứng dụng phương pháp vô hướng hóa phi tuyến giải bài toán cân bằng vectơ mạnh. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(3A): 47-52.

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng được giới thiệu lần đầu tiên bởi Blum và Oettli vào năm 1994 (Blum và Oettli, 1994), kể từ đó nó đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Bài toán cân bằng đóng vai trò lớn trong lý thuyết tối ưu, vì nó là dạng tổng quát của nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hóa như: bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm yên, bài toán cân bằng Nash,… Một số chủ đề quan trọng về bài toán cân bằng đã và đang được quan tâm nghiên cứu bao gồm sự tồn tại nghiệm (Ansari *et al.*, 2001; Fu và Wan, 2002), tính ổn định nghiệm (Bianchi và Pini, 2003; Anh và Khanh, 2007), sự đặt chỉnh (Kimura *et al.*, 2008; Anh *et al.*, 2009) và các thuật toán tìm nghiệm (Iusem và Sosa, 2003, 2010; Quoc *et al.*, 2012; Bigi *et al.*, 2013; Anh *et al.*, 2015; Muu và Quy, 2015) cùng các tài liệu tham khảo trong đó.

Sau đây, mô hình bài toán cân bằng cho cả dạng vô hướng và dạng vectơ được giới thiệu lại. Cho E là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con khác rỗng của E. Cho song hàm cân bằng nhận giá trị thực $g : X \times X \to \mathbb{R}$, tức là $g(x,x) = 0$ với mọi $x \in X$. Bài toán cân bằng vô hướng được phát biểu như sau:

(EP): Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho,

$g(\bar{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in X$.

Bài toán cân bằng vô hướng đã được mở rộng thành bài toán cân bằng vectơ cho cả hai dạng mạnh và yếu, cụ thể như sau:

Cho Z là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z, (tức là, C là tập con đóng của Z và thỏa mãn các tính chất sau: $\forall c, c' \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \lambda c \in C,\ c + c' \in C, C \cap (-C) = \{0\}$). Xét song hàm cân bằng nhận giá trị vectơ $f: X \times X \to Z$. Bài toán cân bằng vectơ mạnh được phát biểu như sau:

(SVEP): Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho với mọi $y \in X$, $f(\bar{x}, y) \in C$.

Hàm vô hướng hóa phi tuyến được giới thiệu lần đầu trong bài báo Gerstewitz (Tammer), 1983. Ngay sau đó, nó được sử dụng rộng rãi và được mở rộng, tổng quát hóa, đặc biệt hóa thành nhiều dạng khác nhau nhằm đáp ứng yêu cầu nghiên cứu cho những trường hợp cụ thể. Đây là công cụ hữu hiệu nhằm đưa bài toán vectơ mạnh về bài toán vô hướng, từ đó dễ dàng khai thác và sử dụng triệt để được các tính chất nổi trội của bài toán vô hướng, đồng thời cũng tránh được một số hạn chế khi xử lý trực tiếp trên bài toán vectơ.

Thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng vô hướng được đề cập ở công trình của Iusem và Sosa (2003), và sau đó, nhiều kết quả nghiên cứu nhằm cải tiến các kết quả đã có cũng như mở rộng cho các trường hợp tổng quát của bài toán ban đầu đã được công bố trong thời gian gần đây (Wang và Li, 2015). Như chúng ta được biết, bài toán cân bằng với hàm mục tiêu dạng tổng có rất nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế, nhưng đến nay chỉ có các công trình nghiên cứu về điều kiện tồn tại cho lớp bài toán này (Kassay và Miholca, 2015 và các tài liệu tham khảo trong đó) và chưa có bài báo nào xem xét đến thuật toán chiếu lặp, một thuật toán rất hữu hiệu (Isem và Sosa, 2003), cho trường hợp quan trọng này.

Từ những quan sát trên, trong bài báo này các tính chất của hàm tổng được tập trung nghiên cứu; bên cạnh đó hàm vô hướng hóa được áp dụng để thiết lập bài toán phụ liên kết với bài toán cân bằng vectơ mạnh với hàm mục tiêu ở dạng tổng; đồng thời mối liên hệ về tập nghiệm của hai bài toán trên được quan tâm xem xét một cách chi tiết; từ đó đề xuất thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh với hàm mục tiêu ở dạng tổng. Nội dung bài báo được sắp xếp theo bố cục như sau: Mục 2 trình bày các khái niệm, tính chất liên quan mà sẽ sử dụng trong các phần sau. Trong Mục 3, các tính chất của hàm tổng được thiết lập, hàm vô hướng hóa được sử dụng nhằm xây dựng bài toán phụ. Mối quan hệ giữa bài toán phụ và bài toán ban đầu được xem xét. Đồng thời, thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh với hàm mục tiêu ở dạng tổng được đề xuất. Mục 4 đưa ra các nhận xét về kết quả đạt được của bài báo cũng như các hướng phát triển cho những kết quả của bài báo này.

2 MỘT SỐ KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Cho H là không gian Hilbert thực được trang bị tích vô hướng $\langle \cdot,\cdot \rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$. Cho K là tập con đóng, lồi, khác rỗng của H. Với bất kỳ $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử trong K, mà ta ký hiệu $P_K(x)$, sao cho $\|x - P_K(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in K$. Khi đó, $P_K(x)$ chính phần tử trong K gần x nhất, và được gọi là hình chiếu mêtric của x lên K. Nó được đặc trưng bởi tính chất $\langle P_K(x) - y, P_K(x) - x \rangle \leq 0$, $\forall y \in K$.

Định nghĩa 1 (Tanaka, 1997) Cho E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $g : X \to Z$ được gọi là

(i)*C-nửa liên tục dưới* (viết tắt là *C-lsc*) tại $x_0 \in X$ nếu với bất kỳ lân cận V của 0 trong Z, tồn tại lân cận U của 0 trong E sao cho $g(x) \in g(x_0) + V + C, \forall\, x \in U \cap X$;

(ii)*C-nửa liên tục trên* (viết tắt là *C-usc*) tại $x_0 \in X$ nếu với bất kỳ lân cận V của 0 trong Z, tồn tại lân cận U của 0 trong E sao cho $g(x) \in g(x_0) + V - C, \forall\, x \in U \cap X$;

(iii)C-nửa liên tục dưới (tương ứng C-nửa liên tục trên) trong X nếu nó là C-nửa liên tục dưới (tương ứng C-nửa liên tục trên) tại mỗi điểm $x \in X$;

(iv)C- liên tục trong X nếu nó vừa là C-nửa liên tục trên vừa là C-nửa liên tục dưới trên X.

Định nghĩa 2 (Tanaka, 1997) Cho E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $g : X \to Z$ được gọi là (i)nửa liên tục dưới (viết tắt là lsc) trên X nếu với bất kỳ $z \in Z$, tập $L(z) = \{x \in X \mid g(x) \in z - C\}$ đóng trong X;

(ii)nửa liên tục trên (viết tắt là usc) trên X nếu với bất kỳ $z \in Z$, tập $L(z) = \{x \in X \mid g(x) \in z + C\}$ đóng trong X;

Định nghĩa 3 (Tanaka, 1997) Cho E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con lồi, khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $h : X \to Z$ được gọi là

(i)C-lồi nếu với bất kỳ $u_1, u_2 \in X$ và với bất kỳ $t \in [0,1]$, ta có $h(tu_1 + (1-t)u_2) \in th(u_1) + (1-t)h(u_2) - C$;

(ii)C-tựa lồi nếu với bất kỳ $z \in Z$, tập $\{u \in X \mid h(u) \in z - C\}$ lồi;

(iii)C-tựa lồi ngặt nếu với bất kỳ $u_1, u_2 \in X$ và với bất kỳ $t \in [0,1]$, ta có $h(tu_1 + (1-t)u_2) \in h(u_1) - C$ hoặc $h(tu_1 + (1-t)u_2) \in h(u_2) - C$.

Định nghĩa 4 (Fu và Wan, 2002) Cho E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con lồi, khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $f : X \times X \to Z$ được gọi là

(i)C-đơn điệu nếu với bất kỳ $x, y \in X$, ta có $f(x,y) + f(y,x) \in -C$;

(ii)C-giả đơn điệu nếu với bất kỳ $x, y \in X$, ta có $f(x,y) \in C \Rightarrow f(y,x) \in -C$;

(iii)C-giả đơn điệu mạnh nếu với bất kỳ $x, y \in X$, ta có $f(x,y) \notin -C \Rightarrow f(y,x) \in -C\backslash\{0\}$.

Định nghĩa 5 Cho E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con lồi, khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $f : X \times X \to Z$ được gọi là C-*giả đối xứng* nếu với bất kỳ $x, y \in X$, ta có $f(x,y) \in -C \Rightarrow f(y,x) \in -C$.

Bổ đề 1 (Iusem và Sosa, 2003) Cho Y là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Với mỗi $y \in Y$, xét tập con đóng $C(y)$ của $\mathbb{R}^n$. Giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn

(i)Bao lồi $co\{x_1, \ldots, x_p\}$ của tập hữu hạn các phần tử $\{x_1, \ldots, x_p\}$ của Y chứa trong $\cup_{i=1}^{p} C(x_i)$;

(ii)$\overline{coY}$, bao đóng của bao lồi của Y, là compact.

Khi đó, $\cap_{y \in Y} C(y) \neq \emptyset$.

Phần tiếp theo giới thiệu hàm vô hướng hóa phi tuyến cùng các tính chất của nó. Cho Z là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, $C \subseteq Z$ là nón có đỉnh, đóng, lồi với phần trong khác rỗng. Lấy $e \in \text{int}C$. Hàm vô hướng hóa phi tuyến $\xi_e : Z \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\xi_e(z) = min\{t \in \mathbb{R} | z \in te - C\}$.

Bổ đề sau đây liệt kê một số tính chất quan trọng của hàm vô hướng hóa phi tuyến.

Bổ đề 2 (Gerstewitz (Tammer), 1983) Với mỗi $r \in \mathbb{R}$ và $z \in Z$, các phát biểu sau là đúng

(i)$\xi_e(z) < r \Leftrightarrow z \in re - intC$;

(ii)$\xi_e(z) \leq r \Leftrightarrow z \in re - C$;

(iii)$\xi_e(z) = r \Leftrightarrow z \in re - \partial C$ với ∂C là biên của C;

(iv)ξ_e liên tục;

(v)ξ_e có tính cộng tính dưới, tức là với bất kỳ $z_1, z_2 \in Z$ ta có $\xi_e(z_1 + z_2) \leq \xi_e(z_1) + \xi_e(z_2)$;

(vi)ξ_e thuần nhất với hệ số dương, tức là với bất kỳ $z \in Z$ và $\mu > 0$ ta có $\xi_e(\mu z) = \mu \xi_e(z)$.

Định lý 1 (Wang và Li, 2015) Giả sử E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực lồi địa phương, X là tập con khác rỗng, lồi, compact của E, và C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Giả sử song hàm $f: X \times X \to Z$ thỏa mãn các tính chất sau:

(i)f là C- liên tục.

(ii)$f(x,x) \in C$ với bất kỳ $x \in X$;

(iii)với mỗi $x \in X$, $f(x,y)$ là C-tựa lồi ngặt theo biến y.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $f(\bar{x}, y) \in C, \forall y \in X$.

Định lý 2 (Wang và Li, 2015) Giả sử E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con khác rỗng, lồi, compact của E, và C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Giả sử song hàm $f : X \times X \to Z$ thỏa mãn với mỗi $x \in X$, $f(x,x) = 0$ và $f(x,y)$ là C-lồi theo biến y. Nếu tồn tại tập mở $U \subseteq E$ và $\bar{x} \in X \cap U$ sao cho $f(\bar{x}, y) \in C, \forall y \in X \cap U$ thì $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh.

3 THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ MẠNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN

Mục này sẽ trình bày một số tính chất liên quan đến hàm mục tiêu dạng tổng. Tiếp theo đó là phần giới thiệu bài toán phụ liên kết với bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh mà chúng ta đang quan tâm. Bằng cách sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến mà ta chuyển được bài toán dạng vectơ về dạng vô hướng (bài toán phụ). Nối tiếp sau đó là các kết quả về mối liên quan giữa nghiệm của hai bài toán trên. Và cuối cùng là việc đề xuất thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh.

Trong phần tiếp theo, nếu không giả thiết gì thêm thì ta sẽ sử dụng các ký hiệu và giả thiết như sau:

Trong không gian Euclide n-chiều, $\mathbb{R}^n$, cho X là tập con đóng lồi khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, Z là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực lồi địa phương, C là nón có đỉnh, đóng, lồi với phần trong khác rỗng. Lấy tùy ý $e \in \text{int}C$. Cho song hàm nhận giá trị vectơ $f: X \times X \to Z$ trong đó f có dạng tổng $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ với $g, h : X \times X \to Z$. Các song hàm g và h thỏa mãn các điều kiện (P1)-(P3) sau đây

(P1): g và h là C-liên tục trong X;

(P2): $g(x,x) = 0$ và $h(x,x) = 0$ với mọi $x \in X$;

(P3): với mỗi $x \in X$, $g(x,\cdot)$ và $h(x,\cdot)$ là các C-lồi trong X.

Ta xét bài toán phụ liên kết với bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh như sau :

(AP) Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho $\bar{x} \in \cap_{y \in X} L_{f(y)}$,

ở đây $L_{f(y)}$ được xác định bởi

$L_{f(y)} = \{x \in X \mid \xi_e[g(y,x)] + \xi_e[h(y,x)] \leq 0\}$, với mỗi $y \in X$.

Bổ đề sau đây trình bày các tính chất liên quan tập $L_{f(y)}$ của bài toán phụ (AP). Các tính chất này phục vụ cho việc thiết lập thuật toán trong phần sau:

Bổ đề 3 Các phát biểu sau là đúng

(i) Nếu $\bar{x} \in \cap_{y \in X} L_{f(y)}$, thì $f(y,x) \in -C$ với mọi $y \in X$.

(ii) Với mỗi $y \in X$, tập $L_{f(y)}$ là đóng, lồi, khác rỗng.

Chứng minh

(i) Giả sử $\bar{x} \in \cap_{y \in X} L_{f(y)}$. Khi đó, $\xi_e[g(y,x)] + \xi_e[h(y,x)] \leq 0$ với mọi $y \in X$.

Vì ξ_e là hàm cộng tính dưới nên ta có

$$\xi_e[f(y,x)] = \xi_e\big[g(y,x) + h(y,x)\big] \leq \xi_e[g(y,x)] + \xi_e[h(y,x)]\big].$$

Do đó, $\xi_e[f(y,x)] \leq 0$ với mọi $y \in X$. Theo tính chất của hàm vô hướng hóa ξ_e, ta nhận được $f(y,x) \in -C$ với mọi $y \in X$.

(ii) Với $y \in X$, ta có $\xi_e[f(y,y)] = \xi_e(0) = 0$. Do đó, $y \in L_{f(y)}$. Vậy, $L_{f(y)} \neq \emptyset$.

Tiếp theo, vì g và h là C-liên tục, nên $\xi_e \circ g$ và $\xi_e \circ h$ liên tục. Hơn nữa, X đóng, do vậy $L_{f(y)}$ đóng.

Cuối cùng, với bất kỳ $x_1, x_2 \in L_{f(y)}$ và bất kỳ $t \in [0,1]$, theo giả thiết (P3) ta có $g\,(x,.)$ và $h\,(x,.)$ là C-lồi. Do đó, $g(y, tx_1 + (1-t)x_2) = tg(y,x_1) + (1-t)g(y,x_2) - c_1$ và $h(y, tx_1 + (1-t)x_2) = th(y,x_1) + (1-t)h(y,x_2) - c_2$ với $c_1, c_2 \in C$. Đặt $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Do ξ_e cộng tính dưới và thuần nhất với hệ số dương, ta được

$$\begin{aligned}
\xi_e[g(y,x)] + \xi_e[h(y,x)] &= \xi_e[g(y, tx_1 + (1-t)x_2)] \\
&\quad + \xi_e[h(y, tx_1 + (1-t)x_2)]
\end{aligned}$$

$$=\xi_e[tg(y,x_1) + (1-t)g(y,x_2) - c_1] + \xi_e[th(y,x_1) + (1-t)h(y,x_2) - c_2]$$

$$\begin{aligned}
&\leq t\xi_e[g(y,x_1) + (1-t)\xi_e[g(y,x_2)] + \xi_e(-c_1)] \\
&\quad + t\xi_e[h(y,x_1)] + (1-t)\xi_e[h(y,x_2)] + \xi_e(-c_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t\xi_e[g(y,x_1)] + (1-t)\xi_e[g(y,x_2)] \\
&\quad + t\xi_e[h(y,x_1)] + (1-t)\xi_e[h(y,x_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t[\xi_e \circ g(y,x_1) + \xi_e \circ h(y,x_1)] + (1-t)[\xi_e \\
&\quad \circ g(y,x_2) + \xi_e \circ h(y,x_2)]
\end{aligned}$$

≤ 0 (vì $x_1, x_2 \in L_{f(y)}$).

Vì thế $x \in L_{f(y)}$. Do vậy, $L_{f(y)}$ lồi.

Tiếp theo là thiết lập một số tính chất liên quan đến hàm tổng f. Việc kiểm chứng các tính chất này được thực hiện khá dễ dàng, nhờ dựa trên tính chất các hàm thành phần và các khái niệm liên quan. Các tính chất này dùng trong các phần tiếp theo nhằm thiết lập thuật toán giải bài toán cân bằng vectơ mạnh.

Bổ đề 4 Giả sử E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con lồi, khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Các ánh xạ $g;\ h: X \longrightarrow Z$ và $f = g + h$. Khi đó, các phát biểu sau thỏa mãn

(i) Nếu g và h là C-liên tục thì f cũng là C-liên tục;

(ii) Nếu g và h là C-lồi thì f cũng là C-lồi;

(iii) Nếu g và h là C-tựa lồi ngặt thì f cũng là C-tựa lồi ngặt.

Như vậy, các tính chất C-liên tục, C-lồi và C-tựa lồi của các hàm thành phần được bảo toàn qua hàm tổng. Tuy nhiên, đối với tính chất C-giả đơn điệu, ta cần giả thiết mạnh hơn, cụ thể là hàm thành phần là C-giả đơn điệu mạnh và C-giả đơn điệu.

Bổ đề 5 Giả sử E, Z là các không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, X là tập con lồi, khác rỗng của E, C là nón có đỉnh, đóng, lồi trong Z. Ánh xạ $g: X \times X \longrightarrow Z$ là C-giả đơn điệu và $h: X \times X \longrightarrow Z$ là C-giả đơn điệu mạnh, C-giả đối xứng. Khi đó, $f = g + h$ là C-giả đơn điệu.

Các kết quả sau đây cho biết mối quan giữa nghiệm của bài toán AP và bài toán $SVEP$.

Định lý 3 Nếu $\bar{x} \in X$ là nghiệm của (AP) thì $\bar{x}$ là nghiệm của $(SVEP)$.

Chứng minh

Giả sử $\bar{x} \in X$ là nghiệm của (AP). Khi đó, ta có $\bar{x} \in \cap_{y \in X} L_{f(y)}$. Do đó, $\xi_e[g(y,\bar{x})] + \xi_e[h(y,\bar{x})] \leq 0$ với mọi $y \in X$. Vì thế $f(y,\bar{x}) \in -C$ với mọi $y \in X$.

Với mỗi $y \in X$ và $t \in (0,1)$, đặt $x_t = ty + (1-t)\bar{x}$. Vì X lồi nên ta được $x_t \in X$. Và vì thế ta cũng có $f(x_t,\bar{x}) \in -C$.

Mặt khác, vì $g(x,.)$ và $h(x,.)$ là C-lồi. Ta được $f(x_t, ty+(1-t)\bar{x}) \in tf(x_t,y) + (1-t)f(x_t,\bar{x}) - C$. Do vậy, $tf(x_t,y) + (1-t)f(x_t,\bar{x}) \in f(x_t,x_t) + C = 0 + C = C$. Theo tính lồi của nón C, ta nhận được

$$tf(x_t,y) \in -(1-t)f(x_t,\bar{x}) + C \subseteq C + C \subseteq C.$$

Vì thế $f(x_t,y) \in C$. Hơn nữa, do g và h là các C-liên tục, ta được f là C-nửa liên tục trên. Từ đó, ta có f là nửa liên tục trên. Vì thế tập $\{x_t \in X \mid f(x_t,y) \in C\}$ đóng. Do đó, ta được $f(\bar{x},y) \in C$. Vì vậy, $\bar{x}$ là nghiệm của $(SVEP)$.

Định lý sau cho kết quả về bao hàm ngược lại của định lý trên.

Định lý 4 Giả sử g là C-giả đơn điệu và h là C-giả đơn điệu mạnh, C-giả đối xứng. Khi đó, nếu $\bar{x} \in X$ là nghiệm của $(SVEP)$ thì $\bar{x}$ là nghiệm của (AP).

Chứng minh

Giả sử $\bar{x} \in X$ là nghiệm của $(SVEP)$. Khi đó, với mỗi $y \in X$, ta có $f(\bar{x},y) \in C$. Do đó, $g(\bar{x},y) + h(\bar{x},y) \in C$. Nên

$$g(\bar{x},y) \in C - h(\bar{x},y). \qquad (1)$$

Ta xét hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $-h(\bar{x},y) \in C$

Khi đó, $h(\bar{x},y) \in -C$. Do đó, $\xi_e[h(y,\bar{x})] \leq 0$.

Hơn nữa, từ (1) ta có $g(\bar{x},y) \in C - h(\bar{x},y) \subseteq C + C \subseteq C$. Khi đó, $\xi_e[g(y,\bar{x})] = 0$. Vì vậy, $\xi_e[h(y,\bar{x})] + \xi_e[g(y,\bar{x})] \leq 0$. Tức là $\bar{x}$ là nghiệm của (AP).

Trường hợp 2: $-h(\bar{x},y) \notin C$

Khi đó, $h(\bar{x},y) \notin -C$. Vì h *là* C-giả đơn điệu mạnh. Điều này dẫn đến $h(y,\bar{x}) \in -C \setminus \{0\} \subseteq -C$. Do đó, ta có $\xi_e[h(y,\bar{x})] \leq 0$. Hơn nữa, ta được $-h(\bar{x},y) \in C$, mâu thuẫn. Vậy định lý đã được chứng minh.

Từ các Định lý 1, 3 và 4 ta thu được kết quả sau đây.

Định lý 5 Giả sử X là bị chặn; các ánh xạ g và h thỏa mãn các điều kiện (P1)-(P3), đồng thời thoản mãn các điều kiện sau:

(i) g là C-giả đơn điệu và h là C-giả đơn điệu mạnh, C-giả đối xứng;

(ii) với mỗi $x \in X$, $g(x,y)$ và $h(x,y)$ là các C-tựa lồi ngặt theo biến y.

Khi đó, tập nghiệm của bài toán AP khác rỗng.

Trong phần tiếp theo, thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh được đề xuất. Thuật toán chiếu lặp này dựa vào hai công cụ chính đó là phép chiếu metric và kỹ thuật hàm vô hướng hóa phi tuyến. Theo kết quả đã được chứng minh ở phần trên, ta có tập $L_{f(y)}$ là đóng, lồi, khác rỗng với mỗi $y \in X$. Như ta đã biết, trong không gian Hilbert, ảnh của mỗi điểm x_m qua phép chiếu metric $P_{L_{f(y_m)}}$ là tồn tại và duy nhất. Hơn nữa, ảnh qua phép chiếu này được xác định một cách tường minh qua công thức hiển của phép chiếu. Chính vì vậy, thuật toán sau đây là xác định tốt.

Thuật toán

Bước khởi tạo: chọn $x_0 \in X$. Đặt $\rho_0 = \|x_0\|$. Gán $m = 0$.

Bước 1: Tìm $X_m = \{x \in X \mid \rho_0 = \|x\| \leq \rho_{m+1}\}$.

Bước 2: Tìm $y_m \in X_m$ sao cho

$$max_{y \in X_m} \xi_e[f(y,x_m)] \leq \xi_e[g(y_m,x_m)] + \xi_e[h(y_m,x_m)] + \varepsilon_m.$$

Bước 3: Tính x_{m+1} với

$$x_{m+1} = x_m + \lambda_m \left(P_{L_{f(y_m)}}(x_m) - x_m\right).$$

Bước 4: Tính ρ_{m+1} với

$$\rho_{m+1} = \max\{\rho_m, \|x_{m+1}\|\}.$$

Bước 5: Gán $m = m+1$, và quay lại Bước 1.

Ở đây, $P_{L_{f(y_m)}}(.)$ ký hiệu cho phép chiếu metric lên $L_{f(y_m)} = \{x \in X \mid \xi_e[g(y_m,x)] + \xi_e[h(y_m,x)] \leq 0\}$; $\{\varepsilon_m\}$, $\{\lambda_m\}$ là các dãy số thực thỏa mãn $\varepsilon_m \geq 0$, $\lim_{m\to} \varepsilon_m = 0$, và $\{\lambda_m\} \subseteq [\alpha, 1]$ với $\alpha \in (0,1)$ nào đó.

Chú ý

(i) Trong các kết quả trên, nếu $g = 0$ hoặc $h = 0$ thì $f(x,y)$ trở thành $h(x,y)$ hoặc $g(x,y)$. Hơn nữa, để ý rằng $\xi_e(0) = 0$ vì $0 \in -\partial C$. Do đó, các kết quả thu được ở trên là sự mở rộng của các kết quả tương ứng của Wang và Li (2015).

(ii) Hàm mục tiêu f trong bài báo này có dạng tổng của hai hàm, $f = g + h$. Bằng phương pháp tương tự, các kết quả trên có thể mở rộng được cho hàm mục tiêu có dạng tổng của hữu hạn các hàm, $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng phép vô hướng hóa phi tuyến và phép chiếu metric, bài toán phụ cho bài toán cân bằng vectơ mạnh được xây dựng. Thông qua việc thiết lập các tính chất cho hàm mục tiêu dạng tổng cùng với việc nghiên cứu mối quan hệ của hai bài toán trên, thuật toán chiếu lặp tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ mạnh cho trường hàm mục tiêu của bài toán có dạng tổng được đề xuất. Kết quả thu được trong bài báo này là sự mở rộng kết quả tương ứng trong Wang và Li (2015).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2007. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 135(2): 271-284.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M. and J.C., Yao, 2009. Well-posedness for vector quasiequilibria. Taiwanese Journal of Mathematics. 13: 713-737.

Ansari, Q.H., Yang, X.Q. and Yao, J.C., 2001. Existence and duality of implicit vector variational problems. Numerical Functional Analysis and Optimization. 22(7-8): 815-829.

Bianchi, M. and Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. Operations Research Letters. 31(6): 445-450.

Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M. and Passacantando, M., 2013. Existence and solution methods for equilibria. European Journal of Operational Research. 227(1): 1-11.

Blum, E. and Oettli, W.,1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. The Mathematics Student. 63(1): 123-145.

Fu, J.Y. and Wan, A.H., 2002. Generalized vector equilibrium problems with set-valued mappings. Mathematical Methods of Operations Research. 56(2): 259-268.

Gerstewitz (Tammer), C., 1983. Nichtkonvexe dualitat in der vektaroptimierung, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Leuna-Mersebung. 25: 357-364.

Iusem, A.N. and Sosa W., 2003. Iterative algorithms for equilibrium problems. Optimization. 52(3): 301-316.

Iusem, A.N. and Sosa, W., 2010. On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization. 59(8): 1259-1274.

Kassay, G. and Miholca, M., 2015. Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions. Journal of Global Optimization. 63(1): 195-211.

Kimura, K., Liou, Y.C., Wu, S.Y. and Yao, J.C., 2008. Well-posedness for parametric vector equilibrium problems with applications. Journal of Industrial and Management Optimization. 4(2): 313-327.

Muu, L.D. and Quy, N.V., 2015. On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems. Vietnam Journal of Mathematics. 43(2): 229-238.

Quoc, T.D., Anh, P.N. and Muu, L.D., 2012. Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 52(1): 139-159.

Tanaka, T., 1997. Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points. Applied Mathematics and Optimization. 36(3):313-322.

Wang, S.H. and Li, Q.Y., 2015. A projection iterative algorithm for strong vector equilibrium problem. Optimization. 64(10): 2049-2063