Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/jvn.2017.011

SỰ HỘI TỤ THEO NGHĨA WIJSMAN VÀ ĐẶT CHỈNH TYKHONOV CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG THEO DÃY

Lâm Quốc Anh, Phạm Thị Vui và Trương Văn Trí
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận: 22/11/2016
Ngày chấp nhận: 28/04/2017

Title:
On the Wijsman convergence and Tykhonov well-posedness of equilibrium problems

Từ khóa:
Bài toán cân bằng, sự đặt chỉnh Tykhonov, sự hội tụ của dãy tập, sự hội tụ Wijsman, tính nửa liên tục trên

Keywords:
Convergence of sets, equilibrium problem, Tykhonov well-posedness, upper semicontinuity, Wijsman convergence

ABSTRACT

In this paper, a sequence of equilibrium problems in metric space is considered. Sufficient conditions for the sequence of approximating problems converging in the sense of Wijsman to the original problem are studied. In addition, concepts of sequentially (generalized) Tykhonov well-posedness under perturbations by a sequence of approximating problems are proposed, then sufficient conditions for such properties are established.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, dãy các bài toán cân bằng trong không gian metric được xem xét. Các điều kiện đủ cho sự hội tụ theo nghĩa Wijsman của dãy bài toán xấp xỉ về bài toán gốc được quan tâm nghiên cứu. Hơn nữa, các khái niệm về đặt chỉnh Tykhonov (mở rộng) theo dãy dưới dạng nhiễu bởi dãy các bài toán xấp xỉ được đề xuất, tiếp theo đó là việc thiết lập điều kiện đủ cho các dạng đặt chỉnh này.

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Phạm Thị Vui và Trương Văn Trí, 2017. Sự hội tụ theo nghĩa Wijsman và đặt chỉnh Tykhonov của bài toán cân bằng theo dãy. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 49a: 79-83.

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng lần đầu tiên được giới thiệu bởi H. Nikaido, K. Isoda vào năm 1955 nhằm mục đích tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác. Bài toán này là dạng tổng quát của nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hóa: bài toán tối ưu, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân,… Vì thế bài toán này được đông đảo các nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Một số vấn đề quan trọng về bài toán cân bằng đã và đang được quan tâm nghiên cứu bao gồm sự tồn tại nghiệm (Ansari *et al.*, 2001; Fu and Wan, 2002), tính ổn định nghiệm (Bianchi and Pini, 2003; Anh and Khanh, 2007, 2010), sự đặt chỉnh (Kimura *et al.*, 2008; Anh *et al.*, 2009, 2012, 2014) và các thuật toán tìm nghiệm (Iusem and Sosa, 2010, Quoc *et al.*, 2012; Bigi *et al.*, 2013; Anh *et al.*, 2015; Muu and Quy, 2015) cùng các tài liệu tham khảo trong đó.

Một trong những chủ đề quan trọng của tối ưu hóa, có vai trò làm cầu nối giữa tính ổn định và phương pháp giải nghiệm là sự đặt chỉnh nghiệm của các bài toán. Một trong những dạng đặt chỉnh quan trọng được mọi người quan tâm nghiên cứu là sự đặt chỉnh Tykhonov (Tykhonov, 1966) cho hầu hết các lớp bài toán trong tối ưu hóa bao gồm bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng.

Bên cạnh đó, sự hội tụ cũng chiếm vị trí trọng tâm khi nghiên cứu tính chất nghiệm của các bài toán trong tối ưu, sự hội tụ nghiệm có liên quan mật thiết đến tính ổn định và đặt chỉnh nghiệm của các bài toán và là công cụ chính để nghiên cứu tính xấp xỉ nghiệm trong tối ưu hóa. Trong thời gian gần đây, có nhiều công trình nghiên cứu về sự hội tụ nghiệm theo nghĩa Painlevé-Kuratowski và theo nghĩa Mosco cho các bài toán liên quan đến tối ưu như: bài toán tối ưu (Peng and Yang, 2014), bài toán bất đẳng thức biến phân (Fu *et al*, 2008), bài toán cân bằng (Khan *et al*, 2014). Bên cạnh các dạng hội tụ trên, sự hội tụ theo nghĩa Wijsman cũng có ý nghĩa rất quan trọng trong thực tế và có nhiều mối quan hệ với các dạng hội tụ khác như: hội tụ Painlevé-Kuratowski, hội tụ Mosco, hội tụ Hausdorff,… (Wijsman, 1964 and 1966). Tuy nhiên, theo như chúng tôi được biết cho đến nay chưa có bài báo nào nghiên cứu sự hội tụ Wijsman cho bài toán cân bằng.

Từ những quan sát trên, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu các điều kiện đủ cho sự hội tụ của dãy các bài toán cân bằng cũng như thiết lập điều kiện đặt chỉnh Tykhonov theo dãy của lớp bài toán đang xét. Nội dung bài báo được sắp xếp như sau: Mục 2 trình bày các khái niệm, tính chất liên quan đến sự hội tụ theo nghĩa Wijsman của dãy tập. Trong Mục 3, chúng tôi nghiên cứu sự hội tụ nghiệm theo nghĩa Wijsman của dãy các bài toán cân bằng. Mục 4 giới thiệu sự đặt chỉnh Tykhonov theo dãy và thiết lập các điều kiện đủ cho sự đặt chỉnh được đề xuất cho lớp bài toán cân bằng. Mục 5 đưa ra các nhận xét về kết quả đạt được của bài báo cũng như các hướng phát triển cho những kết quả của bài báo này.

2 MỘT SỐ KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Cho X, Y là các không gian metric.

Định nghĩa 2.1 (Aubin and Frankowska, 1990) Cho X, Y là các không gian metric, ánh xạ đa trị $F: X \to 2^Y$. Khi đó,

– F được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại $x_0 \in X$ nếu với bất kỳ tập mở U của Y thỏa mãn $F(x_0) \subset U$, tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $F(N) \subset U$.

– F được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại $x_0 \in X$ nếu với bất kỳ tập mở U của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

– F được gọi là *liên tục* tại $x_0 \in X$ nếu F vừa là nửa liên tục trên tại x_0 vừa là nửa liên tục dưới tại x_0.

– F được gọi là *liên tục trên tập* $A \subseteq X$ nếu F là liên tục tại mọi điểm $x_0 \in A$.

Mệnh đề sau đây có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu tính ổn định của bài toán cân bằng.

Mệnh đề 2.1 (Aubin and Frankowska, 1990) Cho X, Y là các không gian metric, ánh xạ đa trị $F: X \to 2^Y$. Khi đó,

(i) F là ánh xạ nửa liên tục dưới tại x_0 nếu và chỉ nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ và mọi điểm $y \in F(x_0)$ tồn tại một dãy $\{y_n\}$ với $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$.

(ii) Nếu $F(x_0)$ là compact thì F là ánh xạ nửa liên tục trên tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}$ bất kỳ hội tụ về x_0, mỗi dãy $\{y_n\}$ thỏa $y_n \in F(x_n)$ có một dãy con hội tụ về một điểm nào đó trong $F(x_0)$. Hơn nữa, nếu $F(x_0) = \{y_0\}$ là tập đơn phần tử thì dãy $\{y_n\}$ như trên phải hội tụ về y_0.

Phần tiếp theo sẽ trình bày các khái niệm liên quan đến khoảng cách và hội tụ.

Định nghĩa 2.2 Cho X là không gian metric và A là tập con của X. Khi đó *khoảng cách từ điểm $x \in X$ đến tập A* ký hiệu là $d(x, A)$, được xác định như sau:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}.$$

Chú ý: Nếu tập A là tập rỗng thì ta quy ước $d(x, A) = +\infty$.

Ta ký hiệu $\mathrm{CL}(X)$ là tập hợp tất cả tập con khác rỗng và đóng của X.

Định nghĩa 2.3 (Wijsman, 1966) Cho $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ là dãy các tập trong đó $A_n \in \mathrm{CL}(X)$. Khi đó, dãy $\{A_n\}$ được gọi là *hội tụ theo nghĩa Wijsman* đến tập $A \in \mathrm{CL}(X)$, ký hiệu là $A_n \overset{W}{\to} A$ hoặc $A = W - \lim A_n$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$ với mỗi $x \in X$.

Ví dụ 2.1 (Wijsman, 1966) Trong $\mathbb{R}^2$, xét dãy các tập $A_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2ny = 0\}$ và tập $A = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Khi đó, dãy tập $\{A_n\}$ hội tụ theo nghĩa Wijsman đến tập A.

Định nghĩa 2.4 *Dãy các hàm $\{f_n\}$ xác định trên X được gọi là hội tụ điểm đến hàm f xác định trên X nếu dãy $\{f_n(x)\}$ hội tụ điểm đến $\{f(x)\}$ với mọi $x \in X$, tức là $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x), \forall x \in X$.*

Định nghĩa 2.5 Dãy các hàm $\{f_n\}$ xác định trên X được gọi là *hội tụ đều* đến hàm f xác định trên X nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

3 SỰ HỘI TỤ WIJSMAN CỦA DÃY BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Từ mục này trở về sau, nếu không có giả thiết gì thêm, chúng ta sẽ xét X là không gian metric. Xét K là tập con khác rỗng của X. Cho song hàm cân bằng : $X \times X \to \mathbb{R}$, tức là $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in X$. Bài toán cân bằng vô hướng được phát biểu như sau :

(EP): Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho,

$f(\bar{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in K$.

Ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (EP) là S.

Trên thực tế, dữ liệu của bài toán thường được thu thập từ các phương pháp xấp xỉ như phương pháp đo đạc, phương pháp thống kê,… Vì thế, cả tập ràng buộc và hàm mục tiêu đều được xấp xỉ bởi dãy tập K_n và dãy hàm f_n, tương ứng và do đó việc nghiên cứu dãy các bài toán cân bằng xấp xỉ của bài toán gốc là cần thiết. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta xét bài toán cân bằng như sau:

(EP_n) Tìm $\bar{x} \in K_n$ sao cho,

$f_n(\bar{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in K_n$.

Với mỗi *n*, ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (EP_n) là S_n.

Định nghĩa 3.1 Dãy bài toán cân bằng (EP_n) được gọi là *hội tụ* đến bài toán cân bằng (EP) nếu $\liminf \mathrm{S}_n \subseteq S$.

Trong đó, $\liminf \mathrm{S}_n = \{ x \in X \mid$ tồn tại dãy $\{x_n\} \subset S_n$ sao cho $x = \lim_{n \to +\infty} x_n \}$.

Định lý 3.1 *Giả sử f là hàm liên tục, $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm f, dãy $\{K_n\}$ hội tụ theo nghĩa Wijsman đến tập K. Khi đó, dãy các bài toán cân bằng (EP_n) hội tụ đến bài toán cân bằng (EP).*

Chứng minh

Lấy $x \in \liminf \mathrm{S}_n$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{S}_n$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ đến x. Với bất kỳ $y \in K$, do $K = W - \lim K_n$, tồn tại dãy $\{y_n\}$, $y_n \in K_n$ sao cho $\{y_n\}$ hội tụ đến y. Ta sẽ chứng minh rằng $f_n(x_n, y_n) \to f(x, y)$. Thật vậy,

Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có

$$|f_n(x_n, y_n) - f(x, y)| = |f_n(x_n, y_n) - f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) - f(x, y)|$$

$$\leq |f_n(x_n, y_n) - f(x_n, y_n)| + |f(x_n, y_n) - f(x, y)|. \quad (3.1)$$

Do $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm f, $\{x_n\}$ hội tụ đến x, $\{y_n\}$ hội tụ đến y và do tính liên tục của f nên vế phải của (3.1) dần về 0 khi $n \to +\infty$. Vì thế, $f_n(x_n, y_n) \to f(x, y)$.

Hơn nữa, vì $x_n \in \mathrm{S}_n$ nên $f_n(x_n, y_n) \geq 0$ với mọi $y_n \in K_n$.

Từ đó suy ra, với mọi $y \in K, f(x, y) \geq 0$, tức là $x \in \mathrm{S}$. Vì vậy, $\liminf \mathrm{S}_n \subseteq \mathrm{S}$. Do đó dãy các bài toán cân bằng (EP_n) hội tụ đến bài toán cân bằng (EP).

4 SỰ ĐẶT CHỈNH TYKHONOV CHO DÃY BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Trong mục này chúng ta nghiên cứu sự đặt chỉnh Tykhonov của bài toán $\mathrm{EP}(K, f)$ được nhiễu bởi các bài toán xấp xỉ $\mathrm{EP}(K_n, f_n)$. Trước hết, chúng ta xét các tập con đặc biệt được sử dụng trong mục này như sau:

$$\mathcal{F}(X) = \{ f \mid f : X \times X \to \mathbb{R}, f(x,x) = 0, \forall x \in X \},$$

$$\mathcal{F}^c = \{ f \in \mathcal{F}(X) \mid f \text{ liên tục} \},$$

$$\mathcal{M}(X) = \left\{ (K, f) \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X) \;\middle|\; \begin{matrix} \exists \bar{x} \in K, f(\bar{x}, y) \geq 0 \\ , \forall y \in K \end{matrix} \right\}.$$

Để thuận tiện cho việc trình bày, khi biểu diễn họ bài toán cân bằng hay dãy bài toán xấp xỉ $\{ (\mathrm{EP}_\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X) \}$, ta kí hiệu (**EP**).

Với mỗi $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, ta ký hiệu tập nghiệm của (EP_φ) là $\mathrm{S}(\varphi)$. Khi đó, khi đó ánh xạ nghiệm S được xác định bởi $\varphi \mapsto \mathrm{S}(\varphi)$ là ánh xạ đa trị từ $\mathcal{M}(X)$ vào X.

Xét dãy $\{\varphi_n\} = \{(K_n, f_n)\} \subset \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X)$, ta nói dãy $\{\varphi_n\}$ là hội tụ đến $\varphi = (K, f) \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X)$ nếu K_n hội tụ về K theo nghĩa Wijsman và f_n hội tụ đều về f.

Định nghĩa 4.1 Với $\varphi \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X)$ cho trước. Giả sử dãy $\{\varphi_n\} \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X)$ hội tụ đến φ. Khi đó, dãy $\{x_n\}$, $x_n \in K_n$ được gọi là dãy xấp xỉ của (EP_φ) tương ứng với $\{\varphi_n\}$, nếu tồn tại dãy $\varepsilon_n \subset \mathbb{R}^+$ với $\varepsilon_n \to 0$ sao cho

$$f_n(x_n, y) + \varepsilon_n \geq 0, \forall y \in K_n.$$

Trong phần tiếp theo, với mỗi $\varphi = (K, f) \in \mathrm{CL}(X) \times \mathcal{F}(X)$ và $\varepsilon \in [0, +\infty)$, ta ký hiệu

$$\tilde{\mathrm{S}}(\varphi, \varepsilon) = \{ x \in K \mid f(x, y) + \varepsilon \geq 0, \forall y \in K \}.$$

Định nghĩa 4.2 Bài toán (**EP**) theo dãy được gọi là *đặt chỉnh Tykhonov mở rộng theo dãy* tại φ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

- Tập nghiệm $\mathrm{S}(\varphi)$ khác rỗng;
- Với bất kỳ dãy $\{\varphi_n\}$ hội tụ đến φ, mỗi dãy xấp xỉ của (EP_φ) tương ứng với $\{\varphi_n\}$ đều tồn tại dãy con hội tụ đến một phần tử nào đó trong $\mathrm{S}(\varphi)$.

Định nghĩa 4.3 Bài toán (**EP**) theo dãy được gọi là *đặt chỉnh Tykhonov theo dãy* tại φ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

- (EP_φ) có nghiệm duy nhất $\bar{x}$;

– Với bất kỳ dãy $\{\varphi_n\}$ hội tụ đến φ, mỗi dãy xấp xỉ của (EP_φ) tương ứng với $\{\varphi_n\}$ đều hội tụ đến $\bar{x}$.

Ta nói rằng (**EP**) là đặt chỉnh Tykhonov mở rộng theo dãy (tương ứng là đặt chỉnh Tykhonov theo dãy) trên một tập $A \subseteq \mathrm{CL}(X)\times\mathcal{F}(X)$ nếu nó là đặt chỉnh Tykhonov mở rộng theo dãy (tương ứng là đặt chỉnh Tykhonov theo dãy) tại mọi điểm của A.

Định lý 4.1 *Nếu X là compact thì* $\tilde{S}$ *là nửa liên tục trên tại* $(\varphi, 0)$.

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại tập mở N sao cho $\tilde{\mathrm{S}}(\varphi, 0) \subseteq N$ và tồn tại dãy $\{(\varphi_n, \varepsilon_n)\}$ hội tụ đến $(\varphi, 0)$ sao cho với mỗi n, tồn tại $x_n \in \tilde{\mathrm{S}}(\varphi_n, \varepsilon_n)\backslash N$. Ta có $x_n \in K_n$. Khi đó,

$$f_n(x_n, y) + \varepsilon_n \geq 0, \forall y \in K_n \quad (4.1)$$

Vì X compact, nên ta có thể giả sử rằng $x_n \to \bar{x}$ với $\bar{x}$ là điểm thuộc X.

Ta có $d(\bar{x}, K) = \lim_{n\to+\infty} d(\bar{x}, K_n) \leq \lim_{n\to+\infty} d(\bar{x}, x_n) = 0$.

Từ đó suy ra $d(\bar{x}, K) = 0$. Do K là tập đóng nên $\bar{x} \in K$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $\bar{x} \in \tilde{\mathrm{S}}(\varphi, 0) = \mathrm{S}(\varphi)$. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh $f(\bar{x}, y) \geq 0$, với mọi $y \in K$.

Ta có $d(y, K) = 0$, với mọi $y \in K$. Suy ra $\lim_{n\to+\infty} d(y, K_n) = 0$.

Với mọi n, $y_n \in K_n$, ta có $d(y, y_n) \leq \frac{1}{n}$.

Theo (4.1), ta có

$$f_n(x_n, y_n) + \varepsilon_n \geq 0.$$

Cho qua giới hạn khi $n \to +\infty$, ta được

$$f(\bar{x}, y) \geq 0.$$

Do y tùy ý, ta suy ra $\bar{x} \in \tilde{\mathrm{S}}(\varphi, 0) \subset N$, điều này dẫn đến mâu thuẫn với việc $x_n \notin N$, với mọi n. Vậy, $\tilde{\mathrm{S}}$ là nửa liên tục trên tại $(\varphi, 0)$.

Định lý 4.2 *Giả sử X là compact. Khi đó,* ($\boldsymbol{EP}$) *là đặt chỉnh Tykhonov mở rộng theo dãy trên* $\mathcal{M}(X) \cap (CL(X)\times\mathcal{F}^c)$. *Hơn nữa,* ($\boldsymbol{EP}$) *là đặt chỉnh Tykhonov theo dãy nếu tập nghiệm của nó là tập đơn phần tử.*

Chứng minh

Với $\varphi = (K, f) \in \mathcal{M}(X) \cap (\mathrm{CL}(X)\times\mathcal{F}^c)$ và $\varepsilon \in [0, +\infty)$. Theo Định lý 4.1, $\tilde{\mathrm{S}}$ là nửa liên tục trên tại $(\varphi, 0)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $\tilde{\mathrm{S}}(\varphi, 0) = \mathrm{S}(\varphi)$ là compact.

Giả sử dãy $\{x_n\} \subset \mathrm{S}(\varphi)$ và $x_n \to \bar{x}$. Bằng lập luận tương tự như chứng minh ở định lý trên, ta được $\bar{x} \in \mathrm{S}(\varphi)$. Do đó, $\mathrm{S}(\varphi)$ là đóng. Hơn nữa, do X compact nên $\mathrm{S}(\varphi)$ compact.

Mặt khác, $\tilde{\mathrm{S}}(\varphi, 0) = \mathrm{S}(\varphi)$ là compact và $\tilde{\mathrm{S}}$ là nửa liên tục trên tại $(\varphi, 0)$; áp dụng Mệnh đề 2.1 ta được $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in \mathrm{S}(\varphi)$. Do đó, (**EP**) là đặt chỉnh Tykhonov mở rộng theo dãy trên $\mathcal{M}(X) \cap (\mathrm{CL}(X)\times\mathcal{F}^c)$.

Hơn nữa, nếu tập nghiệm của nó là tập đơn phần tử $\mathrm{S}(\varphi) = \{x^*\}$ thì hiển nhiên $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x} = x^*$, nghĩa là (**EP**) là đặt chỉnh Tykhonov theo dãy.

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan tính nửa liên tục, tính compact và sự hội tụ của dãy hàm và dãy tập, chúng tôi đã thu được các kết quả về sự hội tụ theo nghĩa Wijsman của dãy bài toán xấp xỉ đến bài toán gốc. Bên cạnh đó, chúng tôi đề xuất khái niệm đặt chỉnh Tykhonov dưới dạng nhiễu bởi dãy các bài toán xấp xỉ và đã thiết lập được các điều kiện cho sự đặt chỉnh này.

Chúng tôi nhận thấy rằng, các kết quả đạt được trong bài báo này có thể được mở rộng cho trường hợp bài toán cân bằng vector hay bài toán cân bằng đa trị và đó sẽ là định hướng nghiên cứu, phát triển từ kết quả của bài báo này.

LỜI CẢM TẠ

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các cán bộ phản biện đã dành nhiều thời gian để đọc rất kỹ bản thảo và cho những góp ý quý báu giúp cho bài báo được hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2007. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 135: 271–284.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2010. Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems. Journal of Global Optimization. 46: 247–259.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., 2012. Well-posedness under relaxed semicontinuity for bilevel equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications. 153: 42–59.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., Yao, J.C., 2009. Well-posedness for vector quasiequilibria, Taiwanese Journal of Mathematics. 13: 713–737.

Ansari, Q.H., Yang, X.Q., Yao, J.C., 2001. Existence and duality of implicit vector variational problems. Numerical Functional Analysis and Optimization. 22: 815–829.

Aubin, J.P., Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser Boston Inc., Boston.

Bianchi, M., Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. Operations Research Letters. 31: 445–450.

Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M., 2013. Existence and solution methods for equilibria. European Journal of Operational Research. 227: 1–11.

Fang, Z.M., Li, S.J., Teo, K.L., 2008. Painleve´-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valued weak vector variational inequalities. Journal Inequality Application. 43519:1-14.

Fu, J.Y., Wan, A.H., 2002. Generalized vector equilibrium problems with set-valued mappings. Mathematical Methods of Operations Research. 56: 259–268.

Iusem, A.N., Sosa, W., 2010. On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization. 59: 1259–1274.

Kimura, K., Liou, Y.C., Wu, S.Y., Yao, J.C., 2008. Well-posedness for parametric vector equilibrium problems with applications. Journal of Industrial and Management Optimization. 4: 313–327.

Khan, M.A.A., Fukhar-ud-din, H., Khan, A.R, 2014. Mosco convergence results for common fixed point problems and generalized equilibrium problems in Banach spaces. Fixed Point Theory and Applications. 59:1-16.

Muu, L.D., Quy, N.V., 2015. On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems. Vietnam Journal of Mathematics. 43: 229–238.

Nikaido, H., Isoda, K., *1955.* Note on noncooperative convex games. *Pacific* Journal of Mathematics. 5: 807–815.

Peng, Z., Yang, Z., 2014. Painlevé-Kuratowski Convergences of the Solution Sets for Perturbed Vector Equilibrium Problems without Monotonicity. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. 30:845–858.

Quoc, T.D., Anh, P.N., Muu, L.D., 2012. Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 52: 139–159.

Rockafellar R. T., Wets, R.J., 1998. Variational analysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 735 pages.

Tykhonov, A.N., 1966. On the stability of the functional optimization problem. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 6: 28-33.

Wijsman, R.A., 1964. Convergence of sequence of convex sets, cone and functions. Bulletin of American Mathematical Society. 70: 186-188.

Wijsman, R.A., 1966. Convergence of sequence of convex sets, cone and functions II. Transactions of American Mathematical Society. 123: 32-45.