

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
AGRÓNOMOS Y DE MONTES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA RURAL

TESIS DOCTORAL

**Análisis multifractal de series de datos pluviométricos en
Andalucía**

Amanda Penélope García Marín

Directores: Dr. Francisco José Jiménez Hornero
Dr. Jose Luís Ayuso Muñoz

Córdoba, Septiembre de 2007

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRÓNOMOS
Y DE MONTES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA RURAL

**ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE SERIES DE DATOS
PLUVIOMÉTRICOS EN ANDALUCÍA**

Tesis Doctoral presentada por Amanda Penélope García Marín, en satisfacción de los requisitos necesarios para optar al grado de Doctor Ingeniero de Montes, y dirigida por los Dres. Francisco José Jiménez Hornero y Jose Luís Ayuso Muñoz, de la Universidad de Córdoba.

Los Directores:

La doctoranda:

Fdo.: Dr. Fco. José Jiménez Hornero

Fdo.: Amanda P. García Marín

Fdo.: Dr. Jose Luís Ayuso Muñoz

Córdoba, Septiembre de 2007

A mis padres

Agradecimientos

Cuando llegan momentos como este en el que se decide poner punto y seguido a un trabajo de muchos años, es inevitable mirar hacia atrás para hacer memoria de todos y cada uno de los pasos que se han dado en el camino recorrido. Como en todas las cosas de la vida, a veces se dan pasos en falso y otras muchas se camina con paso firme, pero siempre se procura caminar acompañado. El camino que yo he recorrido para llegar hasta aquí no habría sido posible sin la compañía de mis dos amigos y directores de tesis. Sin Francisco Jiménez estoy segura de que aun estaría perdida en una encrucijada y sin aliento para seguir adelante. Sin el apoyo incondicional de Jose Luís Ayuso sé que no habría llegado hasta aquí. Les agradezco a los dos su compañía y su esfuerzo en este viaje.

A veces mientras caminas siempre hay quien piensa que has perdido el rumbo y que no llegarás a buen puerto, pero afortunadamente, siempre hay personas que confían en ti y que te recuerdan el sentido de tu viaje. A todos los que siempre han confiado en mí aun existiendo momentos en los que casi pierden la fe, gracias. A personas que como Jose Antonio Cobacho siempre me han ayudado incondicionalmente, gracias. Mi más sincero agradecimiento a Manuel de Castro y a Raquel Romera del grupo de investigación MOMAC de la Universidad de Castilla la Mancha, pues gracias a los datos suministrados ha sido posible realizar una parte importante de este trabajo de investigación.

En el discurrir de un viaje siempre hay personas que habrían querido verte, pero a las que por falta de tiempo no has podido visitar. Gracias a mis padres por esperarme, por entenderme y por soportar mis ausencias.

Hay tantas cosas para recordar de un buen viaje... sin embargo, al final el recuerdo más importante lo ocupa la persona con la que compartiste los mejores y los peores momentos. Yo he tenido el mejor de los compañeros de viaje. Sin duda, con él recorrería el mundo entero. César, gracias por decidir acompañarme, gracias por darle formato a mi vida.

“Trabajando duro espero algún día hacer algo bien.
Todavía no lo he hecho, pero ando tras eso, y peleando...”

Vincent van Gogh (3 Enero 1883)

Índice

Resumen	IX
1 Introducción.....	1
2 Fundamentos teóricos	5
2.1 Multifractalidad.....	5
2.1.1 Fractales	5
2.1.2 Multifractales	7
2.1.3 Caracterización de procesos multifractales.....	9
2.1.3.1 El escalado de momentos estadísticos	9
2.1.3.2 Función de codimensión	11
2.1.3.3 Relación entre $k(q)$ y $c(\gamma)$	12
2.1.3.4 Propiedades de la función de codimensión: procesos conservativos y no conservativos.....	14
2.1.4 Multifractales Universales.	15
2.1.4.1 Cálculo de los parámetros multifractales universales.....	16
2.2 Criticalidad autoorganizada.	18
2.2.1 Los sistemas complejos.....	18
2.2.2 Leyes potenciales y criticalidad.	21
2.2.3 Análisis de agrupación temporal de eventos.....	22
2.2.3.1 Factores de Fano y Allan	22
2.2.3.2 Análisis espectral	24
3 Datos de lluvia.....	27
3.1 Localidades seleccionadas	27
3.2 Series completas de datos de lluvia	31
3.3 Series de datos máximos de precipitación	33

4	Aplicación y resultados	39
4.1	Descripción de varios regímenes temporales de lluvia en Andalucía mediante la multifractalidad y la teoría de la criticalidad autoorganizada (SOC).....	39
4.1.1	Determinación del tamaño de los eventos de lluvia.....	39
4.1.2	Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad.....	42
4.1.3	Análisis de la función exponente escaladora de momentos.....	45
4.1.3.1	Análisis de datos horarios de lluvia.....	46
4.1.3.2	Análisis de datos diarios de lluvia.....	50
4.1.4	Agrupación temporal de la lluvia.....	53
4.1.4.1	Factores de Fano y Allan.....	53
4.1.4.2	Análisis espectral.....	55
4.1.5	Conclusiones	60
4.2	El análisis multifractal como herramienta para validar un modelo de lluvia.....	62
4.2.1	El modelo PROMES	63
4.2.2	Eventos de precipitación	64
4.2.3	Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad.....	73
4.2.4	Análisis de la función exponente escaladora de momentos.....	80
4.2.5	Agrupación de los eventos de lluvia en el tiempo	86
4.2.6	Conclusiones	92
4.3	Aplicaciones del formalismo multifractal de turbulencia	94
4.3.1	Análisis de la serie histórica de precipitación horaria en Córdoba	95
4.3.1.1	El comportamiento de escala de la precipitación horaria	95
4.3.1.2	El modelo Multifractal Universal.....	97
4.3.1.3	Conclusiones	101
4.3.2	Análisis de la serie diaria histórica de horas sin lluvia en Córdoba	101
4.3.2.1	Análisis del comportamiento de escala	102
4.3.2.2	El formalismo multifractal de turbulencia	103
4.3.2.3	Conclusiones	106

4.4	Multifractalidad y relaciones Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF)	108
4.4.1	Las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF)	109
4.4.2	Análisis regional de frecuencias (AR)	111
4.4.2.1	El método del índice de avenida	111
4.4.2.2	Los Momentos Lineales	113
4.4.2.3	Pasos a seguir en el Análisis Regional de Frecuencias	114
4.4.3	Resultados	115
4.4.3.1	Análisis Regional de las precipitaciones máximas en las capitales de Andalucía.....	115
4.4.3.2	Análisis Regional Intraestación (ARI).....	124
4.4.3.3	Análisis Local de frecuencias (AL).....	128
4.4.3.4	Multifractalidad y curvas IDF.....	131
4.4.4	Conclusiones	142
5	Conclusiones generales.....	143
6	Referencias.....	145
	Lista de símbolos	153
	Apéndice 1	157

Índice de Figuras

1 Introducción

1.1. Ilustración del modelo de pila de arena (Bak, 1997)	2
--	---

2 Teoría

2.1. Tipos de fractales (adaptada de de Lima, 1998)	6
2.2. Forma de la función exponente escaladora de momentos.....	10
2.3. Forma de la función de codimensión	12
2.4. Relación entre la función exponente escaladora de momentos y la función de codimensión	13
2.5. Propiedades de la función de codimensión	14
2.6. Ley de Gutenberg-Richter (adaptada de Bak, 1997).....	19
2.7. Variación mensual de los precios de algodón (Mandelbrot, 1963) (adaptada de Bak, 1997)	19
2.8. La precipitación como ejemplo de fractal (adaptada de de Lima, 1998)	20

3 Datos de lluvia

3.1. Mapa de situación de las localidades seleccionadas	27
3.2. Precipitaciones medias mensuales para el período 1971-2000 (Fuente: INM). Elaboración propia.....	29
3.3. Número medio mensual de días de lluvia superior o igual a 1 mm. Período 1971-2000 (Fuente: INM). Elaboración propia.....	30
3.4. Series de datos de lluvia horaria para cada localidad. Elaboración propia	31
3.5. Series de datos de lluvia diaria para cada localidad. Elaboración propia	32

4 Aplicación y resultados

4.1. Definición de evento de lluvia	40
4.2. Número de eventos de una cantidad de lluvia (mm) determinada.....	42
4.3. Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad de los eventos de lluvia obtenidos a partir de datos horarios.....	43
4.4. Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad de los eventos de lluvia obtenidos a partir de datos diarios.....	45

4.5. Curvas de momentos de orden mayor y menor que 1 (datos horarios).....	47
4.6. Función exponente escaladora de momentos (datos horarios)	49
4.7. Curvas de momentos de orden mayor y menor que 1 (datos diarios)	51
4.8. Función exponente escaladora de momentos (datos diarios).....	52
4.9. Factores de Allan y Fano (datos horarios).....	54
4.10. Periodogramas para $N_w = 32768$ (datos horarios).....	57
4.11. Periodogramas para varios valores de N_w (datos diarios)	59
4.12. Distribución en el tiempo del tamaño de evento de lluvia normalizado.....	66
4.13. Distribución del número de eventos de lluvia de un determinado tamaño.....	67
4.14. Distribución en el tiempo de la duración normalizada del evento de lluvia.....	70
4.15. Distribución del número de eventos de lluvia de una determinada duración.....	71
4.16. Distribución del número de eventos secos de una determinada duración.....	73
4.17. Ajustes del número de eventos de lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	74
4.18. Ajustes de la duración de los eventos de lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	77
4.19. Ajustes de la duración de los períodos sin lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	79
4.20. Curvas de momentos para Almería y Córdoba: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	81
4.21. Curvas de momentos para Huelva y Málaga: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	83
4.22. Función exponente escaladora de momentos: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética	85
4.23. Periodogramas obtenidos con series de datos reales de lluvia	88
4.24. Periodogramas obtenidos con series de datos sintéticos de lluvia	89
4.25. Factor de Fano para las series (a) reales y (b) sintéticas de precipitación.....	91

ÍNDICE DE FIGURAS

4.26. Curvas de momentos de orden (a) mayor y (b) menor que 1. Córdoba, datos horarios	96
4.27. Función exponente empírica escaladora de momentos. Córdoba, datos horarios	97
4.28. Técnica del momento de traza doble para $q = 2$	98
4.29. Variación de $\log K(q,\eta) $ frente a $\log(\eta)$ para diversos valores de q. Serie de datos horarios de lluvia	98
4.30. Espectro de energía de la serie de datos horarios de lluvia para Córdoba	99
4.31. Función exponente (empírica y teórica) escaladora de momentos. Serie de datos horarios de lluvia.....	100
4.32. Curvas de momentos para la serie diaria de horas sin lluvia.....	102
4.33. Función exponente empírica escaladora de momentos. Serie diaria de horas sin lluvia	103
4.34. Variación de $\log K(q,\eta) $ frente a $\log(\eta)$ para diversos valores de q. Serie diaria de horas sin lluvia	104
4.35. Espectro de energía de la serie diaria de horas secas	105
4.36. Función exponente (empírica y teórica) escaladora de momentos. Serie diaria de horas secas	105
4.37. Obtención de los parámetros de escala para la lluvia horaria en Málaga.....	133
4.38. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis regional.....	135
4.39. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis intraestación.	136
4.40. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis local de frecuencias.....	137
4.41. Comparación de las pendientes de las curvas IDF con el valor de la singularidad máxima (0,75) obtenida en el análisis multifractal	139
4.42. Variación de la intensidad media de lluvia con el período de retorno para las curvas ajustadas.....	141

Índice de Tablas

3 Datos de lluvia

3.1. Localización y clima de las estaciones seleccionadas	28
3.2. Longitud de las series de datos en las diversas estaciones.....	33
3.3. Series de datos máximos de lluvia para Córdoba	34
3.4. Series de datos máximos de lluvia para Sevilla.....	35
3.5. Series de datos máximos de lluvia para Almería.....	35
3.6. Series de datos máximos de lluvia para Huelva.....	36
3.7. Series de datos máximos de lluvia para Cádiz.....	36
3.8. Series de datos máximos de lluvia para Málaga	37
3.9. Series de datos máximos de lluvia para Jaén.....	37
3.10. Series de datos máximos de lluvia para Granada.....	38

4 Aplicación y resultados

4.1. Características de los eventos de lluvia	41
4.2. Resultados del análisis de los factores de Fano y Allan	55
4.3. Valores característicos de los periodogramas calculados	56
4.4. Características del tamaño de evento de lluvia.....	65
4.5. Características de la duración del evento de lluvia.....	68
4.6. Características de la duración de los eventos secos.....	72
4.7. Resultados de los periodogramas para cada localidad considerando datos reales y sintéticos de lluvia	87
4.8. Registros en cada estación	116
4.9. Valores críticos de discordancia. (Hosking y Wallis, 1997 § 3).....	117
4.10. Valores de discordancia para las estaciones andaluzas.....	117
4.11. Valores de discordancia para las estaciones andaluzas para 2 horas y una vez excluida Sevilla.....	118
4.12. Valores del estadístico H para Andalucía	119
4.13. Valor del estadístico H para Andalucía Occidental y Oriental	120
4.14. Valor del estadístico Z^{DIST} para Andalucía Oriental	121
4.15. Valor RMSE para las funciones en estudio	122
4.16. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Almería.....	123

ÍNDICE DE TABLAS

4.17. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Granada.....	123
4.18. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Málaga.	124
4.19. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Jaén.	124
4.20. Valores de discordancia para las estaciones de las ocho regiones de estudio	125
4.21. Valores de discordancia para las estaciones de la región Sevilla.....	126
4.22. Valor de homogeneidad para cada una de las regiones de estudio	126
4.23. Valor del estadístico Z^{DIST} para Málaga	127
4.24. Valor RMSE para las funciones en estudio	127
4.25. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante ARI. Málaga.....	128
4.26. Valores de los parámetros α y β para cada serie analizada en Málaga.....	130
4.27. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AL. Málaga.	131
4.28. Modelos de curvas IDF utilizados	133
4.29. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis regional	135
4.30. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis intraestación.....	136
4.31. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis local	137
4.32. Parámetros de la curva IDF de cuatro parámetros. Todos los análisis.....	138
4.33. Diferencias entre la singularidad máxima y las pendientes de las curvas IDF.....	139
4.34. Valor absoluto de la diferencia entre las pendientes de las curvas y el valor del momento crítico	141

Resumen

Esta tesis doctoral analiza series temporales de datos de precipitación usando las teorías de la Criticalidad Autoorganizada y de la Multifractalidad. Para ello, se seleccionan diversas localidades situadas en Andalucía.

En la primera de las aplicaciones se estudia la influencia de la resolución temporal de los datos de lluvia en los resultados obtenidos al aplicar las citadas teorías. Para ello se trabaja con datos de precipitación horaria y diaria, buscando por un lado diferencias entre los resultados obtenidos con ambas resoluciones, y por otro, la posible influencia en los resultados de la forma de precipitación más característica de cada lugar. Como segunda aplicación, se analiza el potencial uso de ambas teorías para validar modelos de lluvia, para lo que se selecciona un modelo climático regional y el modelo Multifractal Universal. Finalmente se evalúa el posible uso de la multifractalidad a la hora de discriminar, tanto el mejor método de análisis de frecuencias para la precipitación, como el modelo de curva Intensidad-Duración-Frecuencia más adecuado para una determinada localidad.

Para todo ello en la presente tesis se describen los fundamentos teóricos de las teorías usadas, las características climáticas más relevantes de las localidades andaluzas seleccionadas, los resultados obtenidos tras las diversas aplicaciones y las conclusiones más relevantes de todos los análisis llevados a cabo.

1 Introducción

Uno de los procesos más importantes en hidrología es la precipitación, que tiene lugar de muy diversas formas, todas ellas resultado de interacciones entre la atmósfera y el agua presente en la superficie terrestre. La forma y la cantidad de precipitación dependen de múltiples factores climáticos, como el viento, la temperatura y la presión atmosférica, entre otros. Por todo ello, la precipitación exhibe una alta variabilidad tanto en el tiempo como en el espacio. Así, la precipitación puede oscilar desde pequeñas células asociadas a fenómenos de tipo convectivo, hasta áreas más extensas afectadas por sistemas frontales. Las primeras se extienden sobre pequeñas áreas de entre 1 y 10 km² y suelen tener pequeñas duraciones, mientras que las segundas cubren áreas más extensas, del orden de 10⁴ km² y pueden durar incluso varios días (de Lima, 1998).

De esta forma el modelado y la predicción de la naturaleza variable de la precipitación es uno de los objetivos fundamentales de muchas investigaciones llevadas a cabo en los últimos años. La mayor parte de los estudios se han orientado hacia el entendimiento de todos los mecanismos físicos que generan la lluvia y a la incorporación de su dinámica en los modelos estocásticos de precipitación. La alta variabilidad de la lluvia ha inducido al estudio de sus diferentes escalas de forma independiente, lo que desemboca en un uso restringido de los citados modelos.

Sin embargo, la mezcla de escalas es frecuente en hidrología, donde suele trabajarse con datos pertenecientes a pequeñas escalas temporales para obtener estimaciones correspondientes a escalas temporales más elevadas. Modelos y teorías desarrolladas en laboratorio se aplican a escalas superiores, y modelos de gran escala se utilizan a veces para hacer predicciones de pequeña escala. Por lo tanto, se extrapola información entre diversas escalas, lo que hace necesario conocer si un determinado fenómeno se mantiene al aumentar o disminuir su dimensión de estudio.

Las teorías de escala se basan en que un proceso exhibe un mismo comportamiento a diferentes escalas de estudio (siempre dentro de un rango determinado de escalas), es decir, se caracteriza por no tener una escala característica. La teoría de los fractales, y su posterior evolución hacia la teoría de los multifractales, estudia matemáticamente esta invarianza de escala, y se utiliza para describir fenómenos muy complejos con simples leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Los multifractales describen procesos para los que se necesitan múltiples exponentes de escala. En el caso de la lluvia, la teoría fractal solo serviría para analizar su ocurrencia. Sin

1 INTRODUCCIÓN

embargo, al ser la lluvia un proceso no lineal muy variable en un amplio intervalo de escalas temporales, se hace necesario el uso de la teoría multifractal. Esta última teoría permite estudiar procesos no lineales que exhiben diferentes niveles de intensidad.

La multifractalidad como teoría para completar la descripción de las series temporales de lluvia, ha sido una teoría ampliamente estudiada en las últimas décadas (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Ladoy *et al.*, 1993; Fraedrich y Larnder, 1993; Over y Gupta, 1994; Svensson *et al.*, 1996; Tessier *et al.*, 1993, 1996; de Lima y Grasman, 1999; Kiely e Ivanova, 1999; Sivakumar, 2001; Veneziano y Furcolo, 2002; Labat *et al.*, 2002; Olsson y Burlando, 2002; Kantelhardt *et al.*, 2006; Garcia-Marin *et al.*, In press). Los sistemas o procesos multifractales poseen una serie de peculiaridades relacionadas con sus eventos extremos que componen las principales características de los sistemas críticamente autoorganizados (del inglés *self-organized criticality*, en adelante SOC).

La teoría de la criticidad autoorganizada, introducida por Bak *et al.* (1987) trata de explicar la forma de evolucionar de determinados sistemas complejos que pueden incluso llegar a tener un comportamiento catastrófico y que, sin embargo, siguen leyes muy simples. Son sistemas que evolucionan hacia estados energéticamente estables pasando por estadios críticamente inestables en los que, perturbaciones o eventos de cualquier tamaño, liberan la energía sobrante.

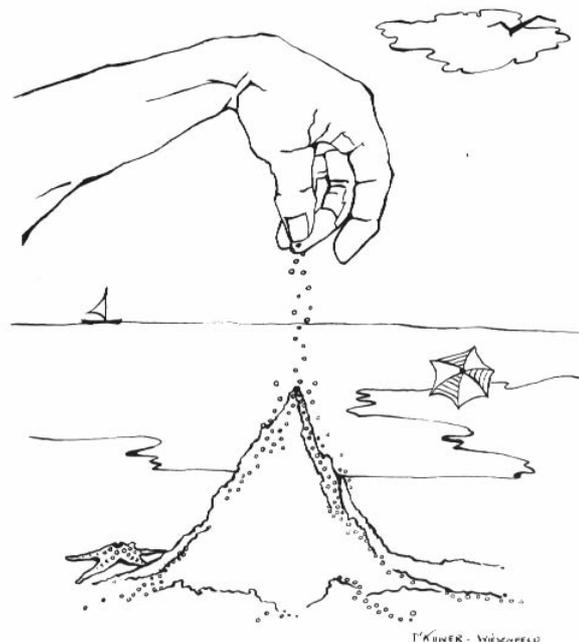


Figura 1.1 Ilustración del modelo de pila de arena (Bak, 1997)

El modelo de la pila de arena (figura 1.1) ilustra de forma clara el concepto de criticalidad autoorganizada. Se parte de una pequeña montaña de arena a la que se van agregando granos de arena de forma lenta y aleatoria. En el momento inicial, la pila será bastante plana, y a medida que se añaden los granos, se producirán en ella una serie de deslizamientos que tenderán a reorganizarla. Al añadir nuevos granos, la montaña crece hasta alcanzar una pendiente crítica. En ese punto, la adición de otros granos puede provocar desde pequeñas avalanchas hasta grandes deslizamientos. Independientemente de la dimensión del evento, todos tienen la misma finalidad y se producen de la misma manera: el sistema exhibe invarianza de escala.

El comportamiento SOC se ha observado en fenómenos naturales muy diversos: terremotos, deslizamientos, incendios forestales, erupciones volcánicas... La complejidad del fenómeno de la precipitación puede también describirse mediante esta teoría, como demuestran muchos trabajos. Autores como Andrade *et al.* (1998), Peters y Christensen (2002), Peters *et al.* (2002), Cowpertwait *et al.* (2002), Telesca *et al.* (2004), Arakawa (2006), Bove *et al.* (2006), Peters y Christensen (2006), Peters y Neelin (2006) y Garcia-Marin *et al.*, (in press) han identificado un comportamiento SOC al analizar la lluvia tanto desde el punto de vista de su cantidad como de su duración. Esta teoría se ha utilizado incluso a la hora de validar datos de lluvia generados por diversos modelos climáticos (Pelino *et al.*, 2006; Garcia-Marin *et al.*, in press).

Tanto la aplicación de la teoría de la multifractalidad como de la criticalidad autoorganizada a todos los aspectos relacionados con la precipitación, permiten aumentar el conocimiento de este fenómeno tan variable, de forma que se puedan mejorar sus aplicaciones en hidrología, como es el caso de las curvas intensidad-duración-frecuencia (IDF). El estudio de estas relaciones y su análisis multifractal puede encontrarse en múltiples trabajos (e.g. Veneziano y Furcolo, 2002, Veneziano *et al.*, 2006, Langousis y Veneziano, 2007).

El objetivo de la presente tesis es la aplicación de las citadas teorías a series históricas de datos de precipitación existentes en diversas localidades situadas en Andalucía. Por un lado, se pretende analizar la influencia de la resolución temporal de los datos de lluvia en su posible invarianza de escala, buscando diferencias entre las diversas localidades analizadas y su potencial relación con la forma de precipitación predominante en cada una de ellas.

La necesidad de trabajar en hidrología con series temporales de lluvia de la mayor longitud y resolución temporal posible, hace necesario el uso de modelos que

1 INTRODUCCIÓN

generen datos sintéticos de precipitación. Se pretende analizar en esta tesis el uso de la multifractalidad y de la teoría SOC como herramientas para validar modelos de lluvia. Para ello se trabajará por una parte con el modelo Multifractal Universal, desarrollado por Schertzer y Lovejoy, 1987, y por otro con un modelo climático regional.

En hidrología se suelen usar diversos modelos paramétricos IDF para obtener datos de lluvia de una determinada duración y frecuencia de ocurrencia. Por ello, se establece como último objetivo de este trabajo el estudio del posible uso de la multifractalidad como herramienta para discriminar el mejor modelo IDF para una determinada localidad.

La presente tesis se estructura en seis capítulos. En el capítulo 2 se desarrollan los conceptos teóricos de la multifractalidad y de la teoría SOC usados en los análisis realizados con posterioridad. En el capítulo 3 se resumen las características de los datos de lluvia analizados. Los resultados obtenidos se muestran en el capítulo 4, mientras que el capítulo 5 resume las conclusiones generales a las que se llega a partir de los resultados obtenidos. El capítulo 6 recoge la bibliografía citada en el texto.

2 Fundamentos teóricos

2.1 Multifractalidad

La característica principal de la teoría de los fractales es la invarianza de escala, término que indica que determinados rasgos de un sistema son independientes de la escala con la que se analizan. Por lo tanto, esta teoría es aplicable a sistemas que carecen de una escala característica.

La invarianza de escala de un sistema puede estudiarse mediante el uso de leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Las propiedades estadísticas de estos sistemas para diferentes escalas vienen dadas por simples coeficientes.

La teoría de los fractales debe estudiarse bajo condiciones adimensionales, pues con ella se buscan y analizan características independientes del tamaño físico del objeto o del sistema de estudio.

2.1.1 Fractales

La palabra fractal (del latín *fractus*, roto, irregular) fue introducida por Mandelbrot (1975, 1977) para hacer referencia a objetos demasiado irregulares como para ser descritos según la geometría tradicional. La geometría fractal (Mandelbrot, 1977; 1982) es una extensión de la geometría clásica y engloba la descripción, la clasificación y el análisis de subespacios geoméricamente ‘complicados’. Generalmente, la estructura y organización de un conjunto fractal no hace posible especificar donde se sitúa cada punto que lo compone. Por ello debe definirse alguna relación entre las diversas estructuras observadas en el mismo para varios niveles de resolución (e.g. Barnsley, 1993). Esta relación se formula cuantitativamente mediante el concepto de *dimensión fractal*, que describe el comportamiento de escala de las estructuras fractales.

Al igual que sucede con los objetos fractales, los procesos y sistemas invariantes de escala, no poseen una escala que los caracterice (al menos para un intervalo de escalas elevado). Teniendo esto en cuenta, un proceso fractal es aquel en el que el mismo proceso elemental tiene lugar a distintas escalas. Para el intervalo de escalas analizadas, los estadísticos del proceso siguen leyes potenciales caracterizadas por

sus exponentes. La relación entre los estadísticos para las diferentes escalas consistirá simplemente en cocientes de escala.

Independientemente de que se hable de objetos, sistemas o procesos, puede distinguirse entre fractales determinísticos y fractales aleatorios (e.g. Falconer, 1990; Hastings y Sugihara, 1993):

- a. Fractales determinísticos. Se construyen mediante reglas determinísticas y se clasifican como uniescalares y multiescalares. Un fractal uniescalar se obtiene dividiendo un objeto simple, definido en R^n , en N piezas idénticas, siendo cada pieza una copia del objeto original reducido por el mismo factor $r < 1$. Cada una de esas piezas vuelve a dividirse en N partes, que se ordenan de igual forma en que lo estaban las partes procedentes del objeto original. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos el fractal.

En un fractal multiescalar, el objeto primario se divide también en N partes, que esta vez no son idénticas. Se trata de reducciones del objeto original por diversos factores $r_j < 1$, variando j desde 1 hasta N .

- b. Fractales aleatorios. Presentan aleatoriedad en cada fase de su construcción. No tienen auto-similitud entre las partes que los componen. Esta apariencia no uniforme es la que los hace útiles a la hora de describir determinados fenómenos naturales (por ejemplo, las líneas de costas, las curvas de nivel, las nubes...). Cuando para construir un fractal han de producirse infinitos pasos aleatorios, debe recurrirse a la teoría de la probabilidad (Falconer, 1990)

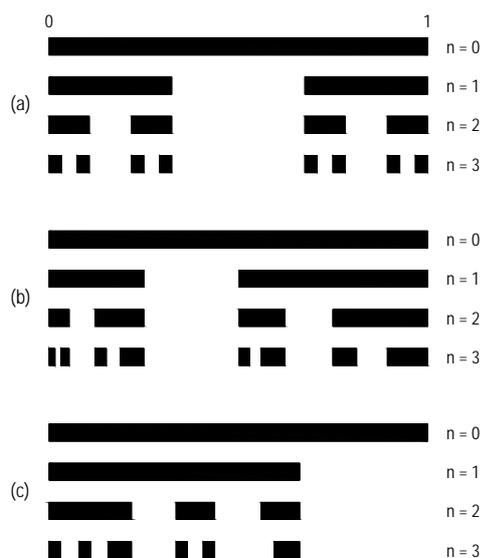


Figura 2.1. Tipos de fractales (adaptado de de Lima, 1998)

La figura 2.1 muestra la construcción de los tipos de fractales descritos, sobre el ejemplo clásico propuesto por Georg Cantor en 1883. En el primer caso (2.1 (a)), se divide la parte inicial en tres partes iguales y se borra la intermedia, repitiendo este proceso indefinidamente sobre las partes que permanecen. En la figura 2.1 (b) (fractal determinístico multiescalar), la parte inicial se divide en dos intervalos de longitudes diferentes, obtenidos con factores de reducción $r_1 = 0,25$ y $r_2 = 0,5$. La tercera parte de la figura (2.1 (c)) muestra la generación de un fractal aleatorio, donde cada parte de las que se forman en cada uno de los pasos, se divide en tres iguales, de las que algunas son seleccionadas para ser eliminadas.

2.1.2 Multifractales

La caracterización cuantitativa de los fractales se realiza mediante un índice de escala conocido como *dimensión fractal*, donde la escala de medida δ es un parámetro muy importante. Supongamos un objeto de tamaño L definido en un espacio unidimensional. Se llamará *razón de escala* al cociente $\lambda=L/\delta$. Considérese ahora un conjunto A definido en un espacio D -dimensional. N_λ será el número de cubos que no se solapan de lado λ^{-1} , necesarios para cubrir la parte del espacio D -dimensional que contiene al conjunto de interés, y cumplirá la siguiente relación potencial

$$N_\lambda \approx \lambda^D \quad (2.1)$$

lo que implica que N_λ es proporcional a λ^D cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Si $N_{\lambda,A}$ es el número de cubos de lado λ^{-1} sin solapamiento, necesarios para completar el conjunto A , se satisface la relación

$$N_{\lambda,A} \approx \lambda^{D_A} \quad (2.2)$$

donde D_A es la dimensión fractal del conjunto. El conjunto A será fractal si D_A no es un número entero. La dimensión refleja la velocidad a la que varían las irregularidades de un conjunto cuando $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ (e.g. Falconer, 1990).

Relacionada con el concepto de dimensión fractal, se define la codimensión fractal c , que vendrá dada por

$$c = D - D_A \quad (2.3)$$

siendo D la dimensión del espacio en el que se incluye el conjunto A .

En la naturaleza existen determinados procesos geofísicos y sistemas que no pueden estudiarse como conjuntos simples, ya que se caracterizan por diferentes niveles de intensidad, y no pueden describirse simplemente en función de, por ejemplo, su ocurrencia o no ocurrencia. Debe recurrirse para ello a la teoría multifractal que facilita el estudio de procesos no lineales que presentan diferentes niveles de intensidad. En lugar de trabajar con una escala simple (como en el caso de los (mono)fractales), se utiliza el concepto de escala múltiple. El término ‘multifractal’ fue introducido por Frish y Parisi (1985), para hacer referencia a medidas caracterizadas por un conjunto infinito de índices de escala o dimensiones fractales.

El comportamiento de un sistema multifractal puede ser análogo al comportamiento de tipo cascada que se observa en el fenómeno de la turbulencia. Por ello, para describir las propiedades de los multifractales se suele utilizar el concepto de cascada (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987, 1988, 1989; Lovejoy y Schertzer, 1990a, 1990b). El fenómeno de cascada de la turbulencia se utiliza para investigar y simular la intermitencia y la invarianza de escala. Se basa en la tendencia de la turbulencia a concentrarse localmente a medida que disminuye la escala. Esto da lugar al aumento de la heterogeneidad con la disminución de la escala. La turbulencia puede estimarse en función de la energía que se transfiere a las escalas menores. Las características fundamentales de un fenómeno tipo cascada son la invarianza de escala y la conservación de flujos desde las escalas mayores a las más pequeñas.

En el proceso de desarrollo de una cascada, la estructura de partida queda dividida en subestructuras cada vez más pequeñas de longitud característica δ . Un factor aleatorio es el que determina la porción de energía que se transfiere de la estructura matriz a cada una de sus partes. El mecanismo de redistribución de flujo se repite en cada paso de generación de la cascada. Después de n pasos (n iteraciones del proceso multiplicativo) en un espacio de dimensión D , habrá un número λ^D de subestructuras con una longitud y densidad de flujo de energía características.

Los diferentes tipos de cascadas y su comportamiento estadístico dan lugar a la siguiente clasificación de los multifractales (e.g. de Lima, 1998):

- a. Desnudos y vestidos (del inglés *bare and dressed*). Los primeros se obtienen teóricamente tras un número finito de pasos, en los que la cascada se desarrolla desde las escalas mayores a las más pequeñas. Los segundos se

obtienen experimentalmente a partir de un proceso físico considerando valores medios (temporales o espaciales) para una determinada resolución.

- b. Fuertes y débiles (del inglés *hard and soft*). En los multifractales duros los momentos estadísticos de mayor orden divergen debido a la presencia de picos o singularidades muy elevados. En los multifractales blandos las fluctuaciones de esos picos son suficientemente pequeñas para que no ocurra la divergencia de momentos.
- c. Microcanónicos y canónicos (del inglés *microcanonical and canonical*). Una cascada se considera microcanónica cuando el flujo de energía se conserva de forma exacta a cada paso. Será canónica cuando se produce una conservación media (Mandelbrot, 1974).
- d. Calmados y salvajes (del inglés *calm and wild*). Las singularidades o picos que no alteran la conservación de energía en un proceso microcanónico se conocen como calmadas. Aquellas que sí lo hacen, como salvajes.

2.1.3 Caracterización de procesos multifractales

2.1.3.1 El escalado de momentos estadísticos

El método más ampliamente usado para identificar la multifractalidad de un proceso (Sivakumar, 2001) es el método del escalado de momentos estadísticos (del inglés *statistical moments scaling method*) (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Over y Gupta, 1994). Para llevarlo a cabo, debe partirse de una serie temporal de registros del proceso que se desea analizar. Dicha serie ha de dividirse en intervalos de diferentes resoluciones temporales entre los que no podrá existir solapamiento. El cociente entre el mayor intervalo (longitud de la serie estudiada) y un intervalo cualquiera, se conoce como razón de escala λ (e.g. Svensson *et al.*, 1996). De esta forma se consigue escalar el tiempo de forma que la duración de la escala de interés más larga sería igual a 1 (e.g. de Lima y Grasman, 1999).

La intensidad media del proceso en un intervalo de tiempo i y para un valor λ de razón de escala, viene dada por $R(\lambda, i)$. Este valor de intensidad ha de normalizarse por la media conjunta de las intensidades medias obtenidas para $\lambda=1$. Dicho valor coincide con la intensidad media de la muestra y se denota por $\langle R(1, i) \rangle$. De esta forma, la intensidad media adimensional del proceso para un intervalo i , viene dada por $\varepsilon_\lambda = \varepsilon(\lambda, i) = R(\lambda, i) / \langle R(1, i) \rangle$. Como resultado, $\langle \varepsilon(\lambda, i) \rangle = 1$. Los paréntesis

usados para calcular la media conjunta, equivalen a $\langle \cdot \rangle = \left\{ \frac{1}{N_\lambda} \sum_{j=1}^{N_\lambda} \right\}$, siendo N_λ el número de intervalos de tiempo en los que se divide la serie temporal para un determinado valor de λ .

El escalado de los momentos del proceso analizado se describe mediante la función exponente $K(q)$ que satisface (e.g. Shertzer y Lovejoy, 1987; Lovejoy y Schertzer, 1990a):

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2.4)$$

donde $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ es el q-ésimo momento conjunto del proceso para una resolución λ .

Representando en un diagrama doblemente logarítmico los valores de $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ como función de λ , podrá distinguirse una zona de apariencia aproximadamente lineal cuya pendiente es una estimación del valor de $K(q)$. Repitiendo este procedimiento para diferentes valores de q , se puede estimar la función $K(q)$ completa.

La función exponente empírica escaladora de momentos $K(q)$, puede considerarse como una función característica del comportamiento fractal de un proceso (e.g. Svensson *et al.*, 1996) y su forma general se muestra en la figura 2.2.

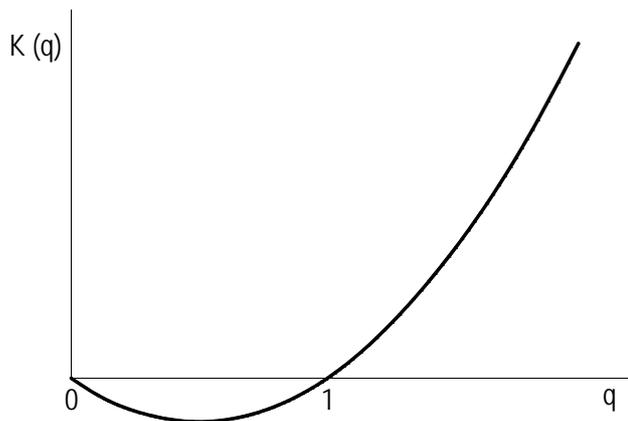


Figura 2.2. Forma de la función exponente escaladora de momentos

Si la representación de $K(q)$ frente a q es básicamente una línea recta, el proceso será monofractal. Sin embargo, si la representación es una función convexa, se estaría frente a un proceso multifractal (Parisi y Frisch, 1985).

A partir de la figura 2.2 pueden observarse varias características. Si el proceso multifractal es trivial, se tendrá $K(0)=0$, y teniendo en cuenta la condición

conservativa $\langle \varepsilon(\lambda, i) \rangle = 1$ anteriormente descrita, se cumple $K(1) = 0$. Por otro lado, la otra opción posible en la forma de la función $K(q)$ es aquella en la que $K(0) = -c$, siendo c la codimensión del proceso.

Otras características de la función $K(q)$ son aquellas relacionadas con sus derivadas primera y segunda, y conocidas como transiciones de fase multifractales. Dichas transiciones de fase pueden ser de primer (derivada primera) y de segundo orden (derivada segunda). Los mecanismos estadísticos responsables de estas transiciones de fase son la divergencia de momentos para las transiciones de primer orden, y el uso de muestras de datos finitas para las de segundo orden.

Los valores críticos de la curva $K(q)$ asociados a la divergencia de momentos para $q > q_D$ son el momento crítico q_D , y el valor de la pendiente a la curva en dicho punto, γ_D . En relación al límite de datos muestrales, aparecen los valores críticos q_s y su valor correspondiente γ_s .

2.1.3.2 Función de codimensión

Para caracterizar un proceso con infinitos niveles de intensidad es necesario conocer la dimensión fractal de la mayor parte de esos niveles. Cada dimensión fractal caracteriza al grupo de datos asociado a un orden de singularidad γ de la intensidad del proceso a diferentes escalas. Se define por lo tanto la función de dimensión fractal $D(\gamma)$, que representa los valores de la dimensión fractal D como función de la singularidad γ . Relacionada con esta función, se define la función de codimensión fractal $c(\gamma)$:

$$c(\gamma) = D - D(\gamma) \quad (2.5)$$

donde D es la dimensión fractal del espacio en el que se desarrolla el proceso.

En términos de probabilidad, y para un intervalo de valores sin escala característica, se cumple la siguiente relación al caracterizar estadísticamente un proceso multifractal (Schertzer y Lovejoy, 1987; Lovejoy y Schertzer, 1990a):

$$P(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2.6)$$

siendo ε_λ la intensidad media adimensional observada para una resolución λ . Según esta ecuación, la función de codimensión será el exponente que describe el escalado de la distribución de probabilidad de la intensidad del proceso. Es una función independiente de la resolución, proporciona un valor de exponente estadístico para

cada escala del proceso analizado (para cada orden de singularidad γ) e indica como los histogramas de dicho proceso varían con la resolución. Tal y como se muestra en la figura 2.3, la codimensión es una función creciente con γ y debe ser cóncava.

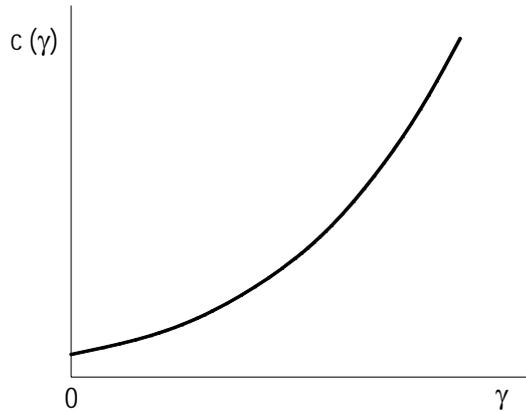


Figura 2.3. Forma de la función de codimensión

2.1.3.3 Relación entre $k(q)$ y $c(\gamma)$

La relación entre la función exponente escaladora de momentos, $K(q)$, y la función de codimensión fractal, $c(\gamma)$, es del tipo transformada de Legendre (Frisch y Parisi, 1985) y viene dada por:

$$K(q) = \max_{\gamma} \{q\gamma - c(\gamma)\} \quad (2.7)$$

Para el cálculo de $c(\gamma)$ puede escribirse:

$$c(\gamma) = \max_q \{\gamma q - K(q)\} \quad (2.8)$$

que se conoce como transformada inversa de Legendre.

Para la ecuación (2.7) la singularidad γ es la que maximiza $\{q\gamma - c(\gamma)\}$ y viene dada por la solución de $c'(\gamma q) = q$. De forma similar, para la ecuación (2.8), el valor del momento que hace máxima la expresión $\{\gamma q - K(q)\}$ es $K'(q_{\gamma}) = \gamma$.

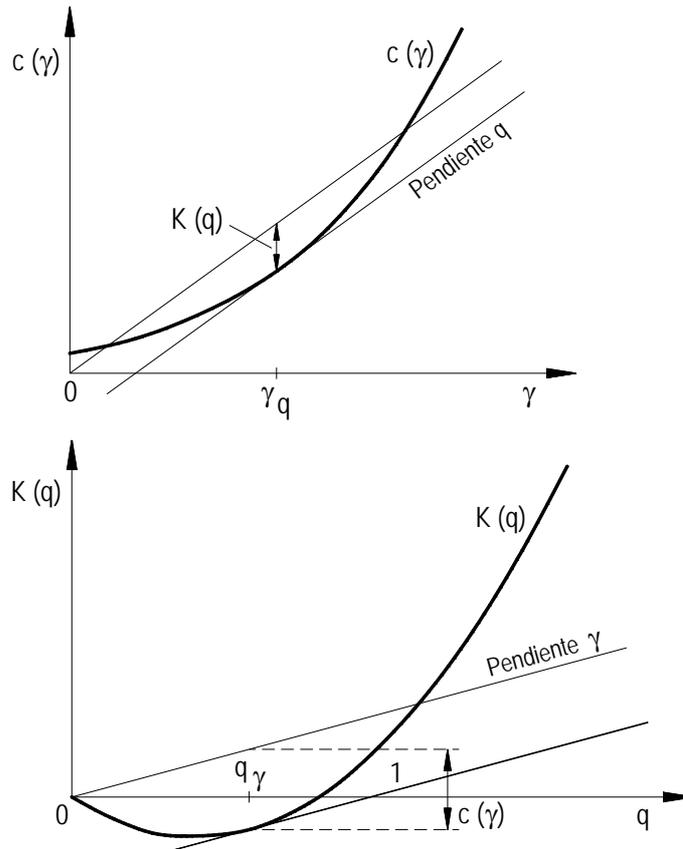


Figura 2.4. Relación entre la función exponente escaladora de momentos y la función de codimensión

La figura 2.4 muestra gráficamente las relaciones dadas en las ecuaciones (2.7) y (2.8). Así, la distancia máxima entre la línea $q\gamma$ y la curva $c(\gamma)$, proporciona el valor de $k(q)$ (Figura 2.4 (a)). De la misma forma, la distancia entre la línea γq y la curva $k(q)$, permite obtener el valor de $c(\gamma)$. Puede establecerse por lo tanto la siguiente correspondencia entre momentos y órdenes de singularidad:

$$q = c'(\gamma) = dc(\gamma)/d\gamma \quad (2.9)$$

$$\gamma = K'(q) = dK(q)/dq \quad (2.10)$$

Si las singularidades γ están limitadas por un valor máximo γ_{max} , la ecuación (2.8) solo es válida para un intervalo finito de valores de γ . Esto implica que la función $K(q)$ adopta forma lineal para $q > q_{max}$. El momento crítico viene dado por $q_{max} = c'(\gamma_{max})$ y la función $K(q)$ vendría dada por

$$K(q) = q\gamma_{max} - c(\gamma_{max}) \quad (2.11)$$

2.1.3.4 Propiedades de la función de codimensión: procesos conservativos y no conservativos

La figura 2.5 muestra algunas de las propiedades de la función de codimensión. De las ecuaciones (2.6) y (2.7), y para $q=1$, se obtiene $\langle \varepsilon_\lambda \rangle \sim \lambda^{\gamma_1 - c(\gamma_1)}$, siendo γ_1 el valor de singularidad correspondiente a la media del proceso. Esta relación implica que para que $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$, debe cumplirse $\gamma_1 = c(\gamma_1)$. Según todo lo anterior, y siguiendo la ecuación (2.9), $c'(\gamma_1) = 1$.

Llamando C_1 al valor de singularidad γ_1 , y en función de lo que se acaba de comentar, puede hacerse la siguiente clasificación (Figura 2.5):

- a. Procesos conservativos. Son aquellos en los que la función de codimensión satisface la relación $C_1 = c(C_1)$ y es tangente a la bisectriz en ese punto ($c'(C_1) = 1$). Por lo tanto, C_1 es la codimensión de la media del proceso. Para un proceso conservativo el valor medio de la variable analizada se mantiene constante para cualquier valor de λ .
- b. Procesos no conservativos. Las densidades del proceso se obtienen al multiplicar la densidad conservativa ε_λ por el factor λ^{-H} , siendo H una medida del grado de no-conservación. Para procesos conservativos $H = 0$. Para procesos no conservativos $\varepsilon_\lambda = \lambda^{\gamma - H}$, es decir, las singularidades están desplazadas un valor $-H$. Por lo tanto, la función de codimensión para un proceso no conservativo está desplazada un valor H respecto a la de un proceso conservativo. De esta forma, $c(C_1 - H) = C_1$ y $c'(C_1 - H) = 1$.

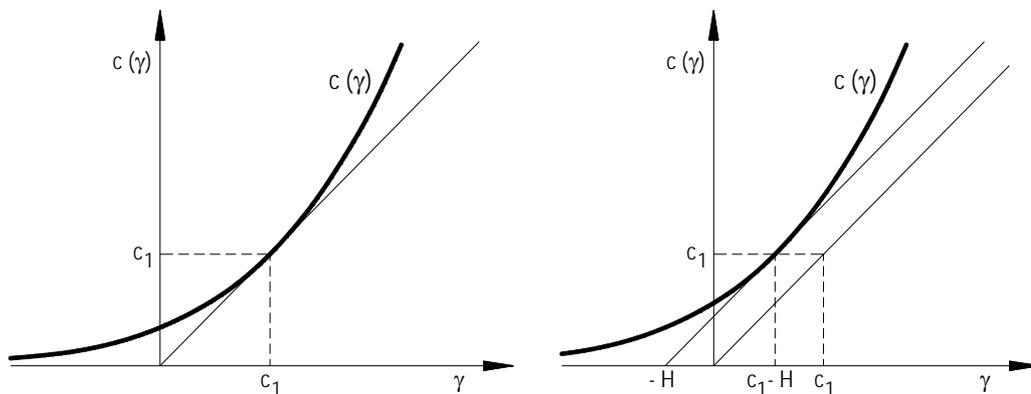


Figura 2.5. Propiedades de la función de codimensión

2.1.4 Multifractales Universales

Como ya se ha comentado en apartados anteriores, los procesos multifractales se pueden caracterizar desde el punto de vista estadístico mediante las funciones $c(\gamma)$ y $K(q)$, que deben ser convexas al menos hasta determinados órdenes críticos de singularidad. Solo con esta restricción se necesitaría un número infinito de parámetros para describir dichas funciones mediante cualquier modelo. Para minimizar este problema, se recurre al concepto de *Universalidad*, que se define como la presencia del mismo comportamiento dinámico en diferentes procesos, y que puede caracterizarse solo con una serie de parámetros relevantes.

La universalidad de procesos multifractales aleatorios ha sido ampliamente discutida (e.g. Mandelbrot, 1974; Schertzer y Lovejoy, 1987; Mandelbrot, 1989; Lovejoy y Schertzer, 1990a; Mandelbrot, 1991; Schertzer y Lovejoy, 1991b, 1993; Schertzer *et al.*, 1995; Schertzer y Lovejoy, 1997).

El modelo Multifractal Universal, propuesto por Schertzer y Lovejoy (1987), asume como generador de multifractales, a una variable aleatoria que sigue una distribución extrema exponencial de Lévy. De esta forma, las expresiones *universales* del modelo

teórico para $q \left(= \frac{dc}{d\gamma} \right) \geq 0$ y $\alpha \in [0, 2]$ son las que siguen:

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} & \text{para } \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp \left(\frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$K(q) - qH = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) & \text{para } \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

El parámetro α' debe satisfacer:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad \text{para } \alpha \neq 1 \quad (2.14)$$

Los parámetros H , C_1 y α de las ecuaciones (2.12) y (2.13), son los parámetros fundamentales necesarios para caracterizar las funciones escaladoras teóricas $c(\gamma)$ y $K(q)$, es decir, las propiedades estadísticas de los procesos multifractales.

Se conocen como parámetros multifractales universales:

- Parámetro H . Caracteriza la desviación respecto al estado conservativo del proceso ($\langle \varepsilon_\lambda \rangle = \lambda^{-H}$). Para procesos conservativos $H = 0$.
- Parámetro C_I . Da idea de la dispersión de la media del proceso. Su valor corresponde al de la codimensión de la singularidad de la media, $C_1 = c(C_I - H)$ y está comprendido entre 0 y d , siendo d la dimensión del soporte geométrico del proceso, i.e. 1 para las series temporales de datos.
- Parámetro α . Es el índice de Lévy (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987, 1989, 1992,1993) e indica el grado de singularidad, lo que equivale a cuantificar la desviación respecto a la monofractalidad. Su valor está comprendido en el intervalo $[0,2]$.

2.1.4.1 Cálculo de los parámetros multifractales universales

Existen diferentes métodos para obtener los parámetros H , C_I y α del modelo multifractal universal. La estimación de los parámetros C_I y α puede hacerse aplicando la técnica del momento de traza doble (DTM, del inglés *Double Trace Moment*) (e.g. Lavallé *et al.*, 1993). Según este método, la intensidad ε_λ asociada a la menor resolución Λ , ha de elevarse primero a la potencia η , variando la resolución hasta el índice de escala λ y calculando la q -ésima potencia, haciendo el promedio para todos los datos disponibles. La función exponente escaladora de momentos de traza doble $K(q, \eta)$, se obtiene de:

$$\left\langle \left(\varepsilon_\lambda^\eta \right)_\lambda^q \right\rangle = \lambda^{K(q, \eta)} \quad (2.15)$$

Así, $K(q, \eta)$ puede determinarse para valores específicos de q y de η , como la pendiente de la parte lineal obtenida al representar en un gráfico doblemente logarítmico $\left\langle \left(\varepsilon_\lambda^\eta \right)_\lambda^q \right\rangle$ frente a λ . La función $K(q, 1)$, obtenida para $\eta = 1$, y la función exponente escaladora de momentos $K(q)$, son la misma. $K(q, \eta)$ se relaciona con $K(q, 1) \equiv K(q)$ mediante la expresión $K(q, \eta) = K(q\eta, 1) - qK(\eta, 1)$. Mediante esta última expresión y considerando $H = 0$, se obtiene de la ecuación (2.13) que la función $K(q, \eta)$ tiene una dependencia simple de η ,

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (2.16)$$

De esta forma, el parámetro α se puede estimar como la pendiente de la regresión lineal ajustada al representar el $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para valores concretos de q (e.g. Tessier *et al.*, 1996). La estimación de C_1 se realiza considerando que $K(q, 1)$ es la interceptación de la regresión lineal con $\log(\eta) = 0$. Así, según la ecuación (2.13) y para $\alpha \neq 1$,

$$C_1 = (\alpha - 1)K(q, 1)/(q^\alpha - q) \quad (2.17)$$

Alternativamente, el parámetro C_1 puede calcularse según la expresión $C_1 = [dK(q)/dq]_{q=1}$.

El parámetro H mide el grado de no-conservación de un proceso multifractal, y para estimarlo se puede utilizar el exponente de escala del espectro de energía del proceso. Así, si el espectro de energía de las intensidades ε_λ sigue la forma

$$E(\omega) \approx \omega^{-\beta} \quad (2.18)$$

donde ω es el número de onda, $E(\omega)$ la energía y β es el exponente espectral, el valor absoluto de este exponente se puede relacionar con el parámetro H y con la función $K(q)$ mediante (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1993)

$$\beta = 1 - K(2) + 2H \quad (2.19)$$

El hecho de que se utilice el valor de $K(2)$ es debido a que los espectros de energía son estadísticos de segundo orden. El espectro de energía se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, que es un momento de segundo orden del proceso.

A partir de la ecuación (2.19) el parámetro H puede calcularse usando tanto el valor teórico como el empírico de $K(2)$. Con los valores de α y C_1 , y una vez obtenidos β y $K(2)$, el valor de H viene dado por (Lavallée *et al.*, 1993)

$$H = 0.5(\beta - 1 + K(2)) = 0.5(\beta - 1 + C_1(2^\alpha - 2)/(\alpha - 1)) \quad (2.20)$$

El parámetro H puede obtenerse también a partir de las propiedades geométricas de la función empírica de codimensión $c(\gamma)$, donde γ es el orden de singularidad (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1992; Tessier *et al.*, 1993). Las funciones exponentes teóricas $K(q)$ y $c(\gamma)$ están relacionadas siguiendo transformaciones de Legendre (ecuaciones (2.7) y (2.8)), que relacionan puntos en la función de codimensión $c(\gamma)$ con tangentes en la función $K(q)$ y viceversa. La correspondencia entre momentos y órdenes de singularidad viene dada por las ecuaciones (2.9) y (2.10). Para un proceso

conservativo, la función teórica de codimensión satisface $C_1 = c(C_1)$ y es tangente a la bisectriz, $c(\gamma) = \gamma$, para $\gamma = C_1$. Por lo tanto, $c'(C_1) = 1$. Cuando el proceso no es conservativo, la función teórica de codimensión está separada un valor H respecto al caso conservativo, por lo que en este caso $C_1 = c(C_1 - H)$ y $c'(C_1 - H) = 1$ (ver apartado 2.1.3.4.).

2.2 Criticalidad autoorganizada

La criticalidad autoorganizada (del inglés *self-organized criticality*), en adelante SOC, es un concepto introducido por Bak *et al.* (1987) y básicamente implica una nueva forma de entender diversos fenómenos de la naturaleza. Sirve para explicar algunos patrones complejos, como estructuras fractales y eventos catastróficos.

En la naturaleza, el comportamiento complejo de un sistema formado por varios componentes, implica su evolución hacia un estado ‘crítico’, donde pequeñas alteraciones pueden desencadenar una serie de eventos de cualquier tamaño, conocidos como avalanchas. La mayoría de los cambios se producen mediante eventos catastróficos y sin la intervención de ningún agente externo. El estado del sistema se establece simplemente por las interacciones entre los elementos individuales que lo componen: el estado crítico es autoorganizado.

2.2.1 Los sistemas complejos

Todos los fenómenos naturales, desde los de mayor a los de menor escala, deben tener explicación a través de las leyes de la física. Pero no todos los fenómenos presentan la misma complejidad. La superficie de la tierra, por ejemplo, está compuesta por montañas, islas, volcanes,... que aparecen formando espacios diferentes a lo largo del tiempo y del espacio, y que tienen además sus propias características dinámicas. Esa gran variabilidad es la que define a esos sistemas como complejos, y existe en todas las escalas a las que se observan. Debido a su naturaleza compuesta, los sistemas complejos pueden mostrar un comportamiento catastrófico, y cada una de sus partes puede afectar a las contiguas mediante efecto dominó.

Un ejemplo significativo de este tipo de sistemas son los terremotos, en los que se libera una gran cantidad de energía. El número de terremotos de una determinada magnitud sigue una distribución conocida como ley de Gutenberg-Richter (figura

2.6). La representación de esta ley en escala doblemente logarítmica es una línea recta. Según esta ley, un terremoto de magnitud 6 es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 5, y uno de magnitud 4 diez veces más fuerte que uno de magnitud 3. De la misma forma, cada vez que hay 10^x terremotos de una magnitud L , hay 10^{x-1} terremotos de una magnitud $L+1$. Puede concluirse que los grandes terremotos siguen la misma ley que los pequeños: la dinámica de un sistema complejo, sigue una ley de extrema simplicidad.

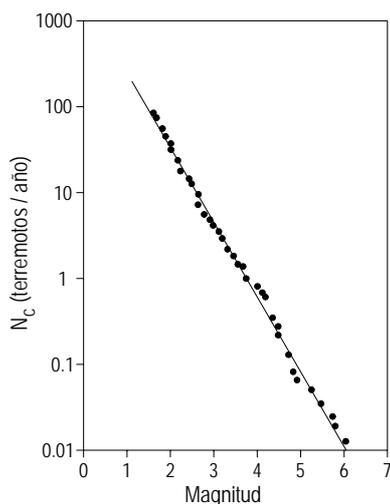


Figura 2.6. Ley de Gutenberg-Richter (adaptada de Bak, 1997)

Patrones de comportamiento similares, pueden encontrarse en otros sistemas complejos de muy diversa índole. En economía, por ejemplo, existe una distribución conocida como distribución de Lèvy, que muestra el patrón de la probabilidad de que se produzcan pequeñas y grandes variaciones en los precios de productos como el algodón (Mandelbrot, 1963). La variación de los precios sigue una ley potencial independiente de la escala, sin un tamaño típico para las variaciones (figura 2.7).

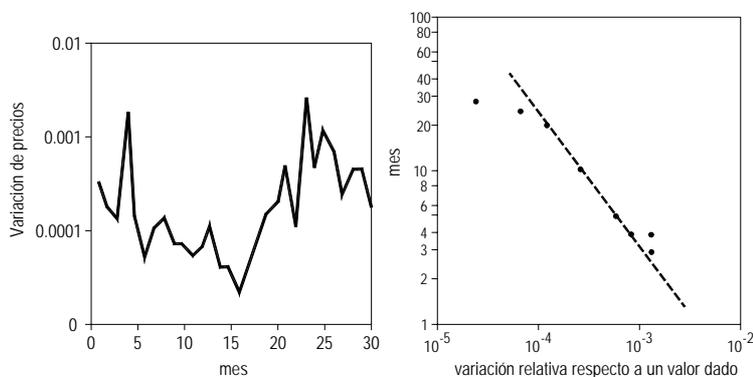


Figura 2.7. Variación mensual de los precios de algodón (Mandelbrot, 1963)
(adaptada de Bak, 1997)

Una vez observado este comportamiento independiente de la escala en diversos sistemas, surgió el concepto de fractal, que como ya se ha comentado fue introducido por Mandelbrot. La geometría fractal está presente en muchas partes de la naturaleza. Las cordilleras están compuestas por montañas de distinto tamaño, sin que exista un tamaño típico. Existen nubes de todos los tamaños. El universo está formado por galaxias, grupos de galaxias, grupos de grupos de galaxias... No existe un tamaño característico para ninguna de esas estructuras.

Si se observa la variación en el tiempo de alguna característica de un sistema, y no solo su estructura geométrica, podrá detectarse un comportamiento fractal en el tiempo. Un ejemplo de este tipo de fractal extraído de la naturaleza, se muestra en la figura 2.8, donde aparece una serie temporal de precipitaciones diarias. En ella puede distinguirse entre días secos y días con lluvia, mientras que una secuencia continua de días lluviosos determinaría un período lluvioso. Estos períodos lluviosos, con diferentes intensidades de lluvia, definen los conjuntos fractales en el eje temporal.

La variación de tamaños, o de intensidades de un proceso en el tiempo, se conoce como ruido $1/f$, y se ha observado en sistemas de diversa índole. En ellos, la señal del proceso aparece como una superposición de pulsos de todos los tamaños. La señal es mayor para los pulsos de menor frecuencia: la fuerza o intensidad del proceso es inversamente proporcional a la frecuencia (de ahí su nombre). Se ha determinado numéricamente que el ruido $1/f$ es un fenómeno determinístico críticamente autoorganizado que emerge de forma natural en sistemas dinámicos disipativos con varios grados de libertad (Christensen *et al.*, 1992).

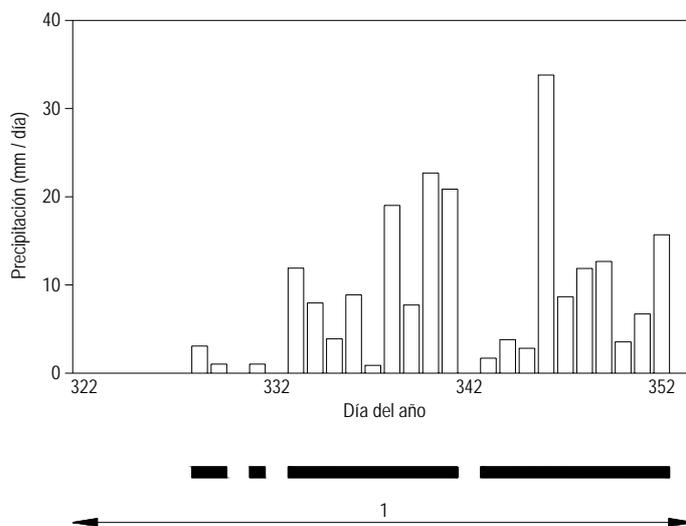


Figura 2.8. La precipitación como ejemplo de fractal (adaptada de de Lima, 1998)

2.2.2 Leyes potenciales y criticalidad

Cuando al representar la intensidad de un proceso en un gráfico doblemente logarítmico se obtiene una línea recta, matemáticamente se habla de ley potencial. Formalmente, una ley potencial (e.g. Bak, 1997) implica que una cantidad n (por ejemplo, número de terremotos) se puede expresar como una potencia de otra cantidad x (por ejemplo energía liberada por cada terremoto):

$$n(x) \propto x^{-\tau} \quad (2.21)$$

Tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\log n(x) \propto -\tau \log x \quad (2.22)$$

siendo τ la pendiente en un gráfico doblemente logarítmico. Si un conjunto de datos sigue una ley potencial, no existe una escala típica para los eventos estudiados y prevalece la invarianza de escala. Esto implica que el cociente entre las frecuencias de eventos de tamaño x y kx , no depende del tamaño,

$$\frac{n(x)}{n(kx)} = k^\tau \quad (2.23)$$

Para analizar $n(x)$ suele utilizarse una función de distribución empírica de probabilidad (e.g. Lovejoy y Schertzer, 1995; Fraedrich y Larnder, 1993; Tessier *et al.*, 1996; Svensson *et al.*, 1996; Sivakumar, 2001). Andrade *et al.* (1998) recomiendan el uso de la función de distribución acumulada $\bar{N}(x)$:

$$\bar{N}(x) = \Pr(X > x) = \int_x^{Max} n(x) dx \quad (2.24)$$

donde Max es el evento máximo detectado en el conjunto de datos analizado. El resultado de la ecuación anterior viene dado por:

$$\bar{N}(x) \propto \frac{1}{\tau-1} x^{1-\tau} \left[1 - \left(\frac{x}{Max} \right)^{\tau-1} \right] \quad (2.25)$$

Finalmente, dividiendo la ecuación (2.25) entre x , se obtiene la función que ha de utilizarse para estudiar el ajuste de los datos:

$$N(x) = \frac{\bar{N}(x)}{x} \propto \frac{1}{\tau-1} x^{-\tau} \left[1 - \left(\frac{x}{Max} \right)^{\tau-1} \right] \quad (2.26)$$

Si la serie de eventos analizada se ajusta según la ecuación (2.26), el proceso analizado sería un proceso SOC, lo que implicaría que los eventos mayores o catastróficos en su caso, se producen como consecuencia de la misma dinámica que produce los eventos ordinarios y más frecuentes. Sin embargo, aunque dentro de los sistemas SOC se da un mayor número de eventos pequeños, la mayoría de los cambios del sistema se asocian con los eventos catastróficos, de ahí que la ecuación (2.26) deba ajustarse a los eventos extremos estudiados dentro de la serie que forma el sistema. La criticalidad autoorganizada puede entenderse como la justificación teórica de las catástrofes (Bak, 1997).

2.2.3 Análisis de agrupación temporal de eventos

Los sistemas críticamente autoorganizados alcanzan el estado críticamente estable mediante fluctuaciones temporales de sus eventos caracterizadas por la energía que liberan. Para detectar la presencia de agrupación de eventos en una serie temporal, se pueden utilizar diversos métodos, entre los que destacan el cálculo de los factores de Fano y Allan, y el análisis espectral. Ambos métodos estiman el valor del exponente fractal α del proceso de estudio.

2.2.3.1 Factores de Fano y Allan

Según autores como Telesca *et al.* (2004) si se asume que una secuencia de eventos es el resultado de un proceso puntual definido por el conjunto de tiempos de ocurrencia, se pueden utilizar medidas estadísticas como el factor de Fano, $FF(t)$, y el de Allan, $FA(t)$, para caracterizar dicho proceso.

Un proceso puntual es un proceso estocástico que describe la ocurrencia o posición de eventos discretos en el eje de tiempos. Cuando a cada ocurrencia se le puede asignar una intensidad, el proceso se llama proceso puntual. En un proceso puntual continuo en el tiempo, los eventos pueden ocurrir en cualquier lugar del eje de tiempos. En un proceso puntual en tiempo discreto, la ocurrencia de eventos se produce a incrementos igualmente espaciados. El proceso puntual en tiempo continuo más simple es el proceso de tipo Poisson. En un proceso de este tipo, los tiempos entre eventos son independientes y se distribuyen exponencialmente, y el número de eventos en un intervalo de tiempo es independiente y sigue una distribución tipo Poisson. Las marcas asociadas con cada evento pueden ser de dos tipos: cantidades instantáneas aleatorias (modelo de ruido blanco de Poisson) o

pulsos rectangulares (modelo de pulsos rectangulares de Poisson). Los pulsos se caracterizan por intensidades y duraciones aleatorias, y son independientes unos de otros. Estos modelos tienen una estructura dependiente de la escala.

Para calcular los factores de Fano y Allan, hay que contabilizar el número de eventos, $S_z(t)$, incluidos en cada intervalo z de longitud t en los que se divide el eje de tiempos en el que existen registros del proceso de estudio. Así, la varianza normalizada o Factor de Fano, $FF(t)$ (e.g. Lowen y Teich, 1995; Thurner *et al.*, 1997; Lowen *et al.*, 2001), definido por la ecuación (2.27), donde $\langle \rangle$ denota el valor esperado, es una manera fácil de describir la correlación en una secuencia de eventos,

$$FF(t) = \frac{\langle S_z^2(t) \rangle - \langle S_z(t) \rangle^2}{\langle S_z(t) \rangle} \quad (2.27)$$

Fano en 1947 utilizó este factor para caracterizar las fluctuaciones estadísticas del número de iones generados por partículas individuales cargadas rápidamente. Este factor indica el grado de agrupación en un proceso puntual, siempre en relación a un proceso puntual homogéneo de Poisson para el que $FF(t) = 1$ para todo t . Según Lowen y Teich (1995), el $FF(t)$ para un proceso puntual y un intervalo de tiempo t elevado, puede expresarse de la siguiente forma para $0 < \alpha_{FF} < 1$:

$$FF(t) = 1 + \left(\frac{t}{t_F} \right)^{\alpha_{FF}} \quad (2.28)$$

siendo t_F el tiempo que marca el límite inferior para un comportamiento de escala significativo. El parámetro α_{FF} se considera un estimador del exponente fractal α de la ley potencial para el espectro de densidad de un proceso con propiedades de escala:

$$E(f) \propto f^{-\alpha} \quad (2.29)$$

siendo f la frecuencia (e.g. Lowen y Teich, 1995; Lowen *et al.*, 2001).

Entre otras limitaciones, el factor de Fano no es adecuado como medida de exponentes fractales mayores que 1 (Lowen y Teich, 1996; Lowen *et al.*, 2001). Por este motivo, se aconseja el uso de otra medida libre de limitaciones, como la varianza de onda normalizada o factor de Allan, $FA(t)$, (Lowen y Teich, 1996),

$$FA(t) = \frac{\langle (S_{z+1}(t) - S_z(t))^2 \rangle}{2\langle S_z(t) \rangle} \quad (2.30)$$

El numerador de la ecuación anterior se conoce como la varianza de Allan y fue introducido por Allan (1966) para describir la estabilidad de relojes atómicos. Al igual que el factor de Fano, el factor de Allan es una medida del grado de agrupación de un proceso puntual en comparación con un proceso homogéneo de tipo Poisson, para el que $FA(t) = 1$. La relación entre los factores de Fano y de Allan para cualquier proceso puntual viene dada por (Scharf *et al.*, 1995),

$$FA(t) = 2FF(t) - FF(2t) \quad (2.31)$$

Para un proceso puntual y un valor suficientemente alto de t , el factor $FA(t)$ puede expresarse según la siguiente ley potencial:

$$FA(t) = 1 + \left(\frac{t}{t_A} \right)^{\alpha_{AF}} \quad (2.32)$$

donde t_A se define de la misma forma que t_F para el factor de Fano. La ecuación (2.32) puede usarse para estimar el exponente fractal α para el intervalo $0 < \alpha_{FA} < 3$ (e.g. Lowen y Teich, 1996; Lowen *et al.*, 2001).

2.2.3.2 Análisis espectral

Los métodos espectrales para el estudio de series temporales, también se conocen como métodos de transformada de Fourier (Press *et al.*, 1989; Hastings y Sugihara, 1993). La idea de estos métodos se basa en que un proceso físico puede describirse tanto en el dominio tiempo (como los valores de una determinada cantidad como una función del tiempo) como en el dominio de la frecuencia (donde el proceso queda definido conociendo su amplitud como función de la frecuencia). Ambas representaciones de un proceso quedan descritas con las ecuaciones de la transformada de Fourier.

El análisis espectral se utiliza para estudiar propiedades estadísticas de series temporales de datos. Proporciona una descripción intuitiva de las series basada en la frecuencia, e indica determinadas características como memoria, presencia de variaciones de alta frecuencia y comportamientos cíclicos (e.g. McLeod y Hipel, 1995). Este tipo de análisis es útil para detectar la periodicidad de secuencias de eventos. Si un proceso contiene partes periódicas, las frecuencias de esas partes exhiben un número elevado y marcado de picos en el espectro. Esto implica que existe una elevada varianza para esas frecuencias (Press *et al.*, 1989). Los métodos

de análisis espectral cuentan con un cierto grado de versatilidad ya que no es necesario asumir la distribución normal (e.g. Mcleod y Hipel, 1995).

A continuación se describen dos de los métodos de análisis espectral más ampliamente utilizados.

a. Periodogramas

Un periodograma es una estimación de la densidad de potencia espectral de un proceso puntual, y sirve para estimar el valor del exponente fractal α de un proceso (e.g. Lowen *et al.*, 2001; Telesca *et al.*, 2005). Muestra como varía la potencia o energía de un proceso en función de la frecuencia, en una serie temporal.

Para obtener un periodograma, el período total de observación de un proceso se divide en un número N_w de ventanas que no se solapen, de longitud T_w . Posteriormente se contabiliza el número de eventos existentes dentro de cada ventana. Una vez calculado el número de eventos, a la secuencia obtenida se le aplica la transformada discreta de Fourier, y los coeficientes calculados se elevan al cuadrado. Para poder aplicar la transformada rápida de Fourier, el número N_w de ventanas debe ser potencia de dos (e.g. Telesca *et al.*, 2005).

Según autores como Lowen *et al.* (2001), para procesos puntuales con propiedades de escala, el periodograma muestra un comportamiento que sigue una ley potencial que varía con la frecuencia según $E(f) \propto f^{-\alpha_{PG}}$. Según Thurner *et al.* (1997), el valor del exponente α_{PG} es un indicador de la presencia de agrupación en el proceso. Si el proceso puntual es Poissoniano, los tiempos de ocurrencia no están correlacionados y el periodograma es prácticamente plano ($\alpha_{PG} \approx 0$) para cualquier frecuencia. Sin embargo, si $\alpha_{PG} \neq 0$, el proceso puntual presenta propiedades de escala y puede asumirse un comportamiento (multi)fractal (e.g. Sivakumar, 2001). A diferencia de los factores de Fano y Allan descritos anteriormente, α_{PG} puede tener cualquier valor, por lo que el periodograma puede usarse para estimar cualquier valor de α .

b. Espectro de potencia

El espectro de potencia es una herramienta muy usada en investigaciones fractales de series temporales (e.g. Ladoy *et al.*, 1991, 1993; Fraedrich y Larnder, 1993; Olsson, 1995). El comportamiento escalado de un proceso se detecta en el comportamiento

tipo ley potencial en su espectro de energía (e.g. Mandelbrot, 1982; Schertzer y Lovejoy, 1985, 1987; Lovejoy y Schertzer, 1995):

$$E(\omega) \approx \omega^{-\beta} \quad (2.33)$$

donde ω es el número de onda o la frecuencia, $E(\omega)$ es la energía y β es el exponente espectral. La zona del espectro que se ajuste a la ecuación (2.33), determina el régimen de escala del proceso. La ausencia de una escala temporal característica indicaría la posibilidad del comportamiento multifractal del proceso. Este tipo de comportamiento potencial solo ocurre para un intervalo de números de onda y no suele observarse cuando se trabaja con muestras pequeñas.

3 Datos de lluvia

3.1 Localidades seleccionadas

Para el desarrollo esta tesis se contado con datos de precipitación horaria para las ocho capitales de Andalucía. Sin embargo, para todos los análisis que se llevan a cabo a lo largo de las tres primeras secciones del capítulo 4, se utilizan datos de precipitación correspondientes a cuatro localidades situadas en Andalucía: Huelva, Córdoba, Málaga y Almería (figura 3.1).



Figura 3.1. Mapa de situación de las localidades seleccionadas

La elección de estas cuatro localidades para el desarrollo del presente estudio se debe a su diferente emplazamiento geográfico (tabla 3.1) dentro de Andalucía y a sus posibles diferencias en cuanto a clima, características que las hacen más atractivas a la hora de buscar diferencias entre los resultados que se obtengan en los diversos análisis. En Andalucía pueden distinguirse tres patrones diferentes que influyen en la precipitación (Vanderlinden, 2001):

- Patrón Atlántico. La situación sinóptica que contribuye a este patrón consiste en una depresión que se sitúa al norte o noroeste de la península. Suele ir asociado a vientos del oeste que aportan aire húmedo del

Atlántico con frentes de lluvia, ocasionando importantes precipitaciones en la costa atlántica y la meseta. Su influencia se deja sentir sobre todo en el norte de la parte occidental de Andalucía, de noviembre a marzo.

- Patrón Sur. La situación sinóptica que contribuye a este patrón consiste en una depresión que se sitúa cerca del Cabo de San Vicente, el Golfo de Cádiz o el estrecho de Gibraltar. Esta depresión origina un flujo de aire húmedo del Atlántico que entra por el sur de la península, tanto por la costa atlántica como por la costa mediterránea. Este patrón desaparece en los meses de julio y agosto y de él depende en gran medida la precipitación anual del sur de la península.
- Patrón Levante. La situación sinóptica que contribuye a este patrón consiste en una depresión que se sitúa al sur de la península y que puede ser reforzada por un centro de alta presión al norte. Esta situación causa fuertes corrientes en dirección oeste, cargadas con aire extremadamente húmedo del mediterráneo. Estas masas de aire húmedo son forzadas a ascender por la orografía. Este patrón desaparece en julio y agosto y sus consecuencias se manifiestan en la parte oriental de Andalucía.

Según estos patrones generales, Huelva y Córdoba estarían enmarcadas dentro del patrón Atlántico, Almería dentro del Levante y Málaga dentro del patrón Sur. Combinando estos patrones generales junto con la orografía, además de otros factores, podrían establecerse diferencias y similitudes en cuanto a la forma de llover en cada localidad (Vanderlinden, 2001).

Tabla 3.1. Localización y clima de las estaciones seleccionadas

Localidad	Latitud (°N)	Longitud (°W)	Altitud (m)	Clima	Tª media anual (°C)
Almería	36,84	2,39	20	Mediterráneo (semidesértico)	18,7
Huelva	37,28	6,91	19	Oceanic	18,1
Córdoba	37,84	4,85	91	Mediterráneo (continental)	17,6
Málaga	36,67	4,49	7	Mediterráneo	18,0

Como puede verse en la tabla (3.1) cada una de las localidades puede considerarse representativa de los diferentes climas que coexisten dentro de Andalucía. Sin

embargo, a pesar de las diferencias que puedan existir, el patrón general de lluvias es similar en todas ellas, y está caracterizado por la existencia de frentes principalmente de Octubre a Mayo, y por lluvias de tipo convectivo normalmente concentradas al final del verano y principios del otoño. La precipitación es prácticamente inapreciable en julio y agosto. Según datos suministrados por el Instituto Nacional de Meteorología (INM) Almería es la localidad más seca, con una precipitación media anual de 196 mm. Le siguen Huelva con 490 mm, Málaga con 524, y Córdoba con 536 mm. Según estos datos de precipitaciones medias anuales, todas las localidades han de considerarse semiáridas si se sigue la clasificación propuesta por Strahler y Strahler (1978). Según estos mismos autores, las zonas que reciben cantidades inferiores a 100 mm de precipitación se denominan desiertos, por lo que Almería es la localidad más próxima a esta calificación.

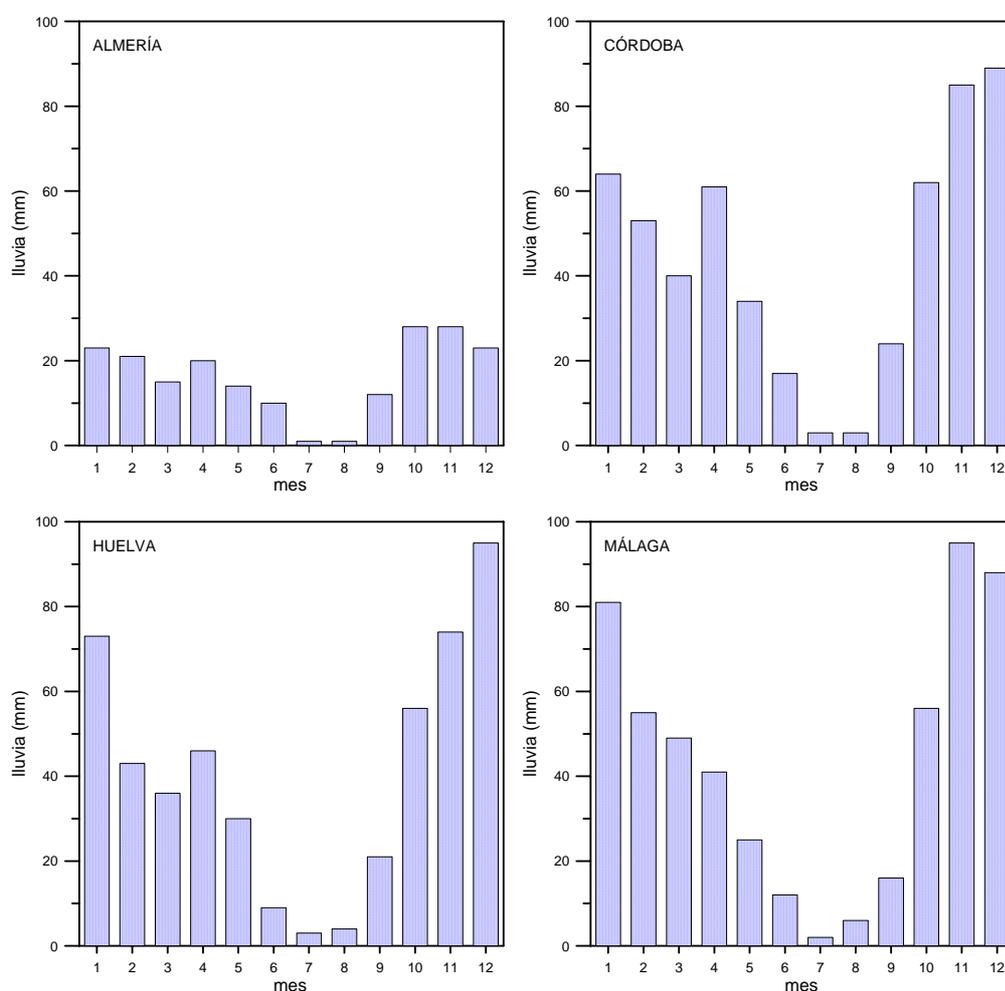


Figura 3.2. Precipitaciones medias mensuales para el período 1971-2000 (Fuente: INM). Elaboración propia

La figura 3.2 muestra las precipitaciones medias mensuales para las cuatro localidades, a partir de datos suministrados por el Instituto Nacional de Meteorología

3 DATOS DE LLUVIA

para el período 1971-2000. En ella puede verse como, con diferencia, Almería es el lugar donde se registra una menor cantidad de lluvia a lo largo de todo el año, si bien el patrón de lluvias es similar al del resto de localidades. En todas ellas, las precipitaciones medias mensuales más elevadas tienen lugar durante los meses finales del año. Las más bajas, se dan durante los meses de julio y agosto.

La localidad donde se da el mayor número medio de días de lluvia superior o igual a 1 mm (figura 3.3) es Córdoba (con 56 días al año). Le siguen Huelva con 50 días, Málaga con 43 días y Almería con 26 días. Por meses, los de menos días de lluvia son julio y agosto, que salvo para Córdoba, exhiben un valor nulo de la variable en cuestión. El otoño y la primavera son las estaciones donde se concentra el mayor número de días de lluvia para todas las localidades, aumentando al entrar el otoño y disminuyendo a medida que se acerca el verano. Esta tendencia se observa también en Almería, aunque en esta localidad, el número medio de días de lluvia es prácticamente constante para todos los meses.

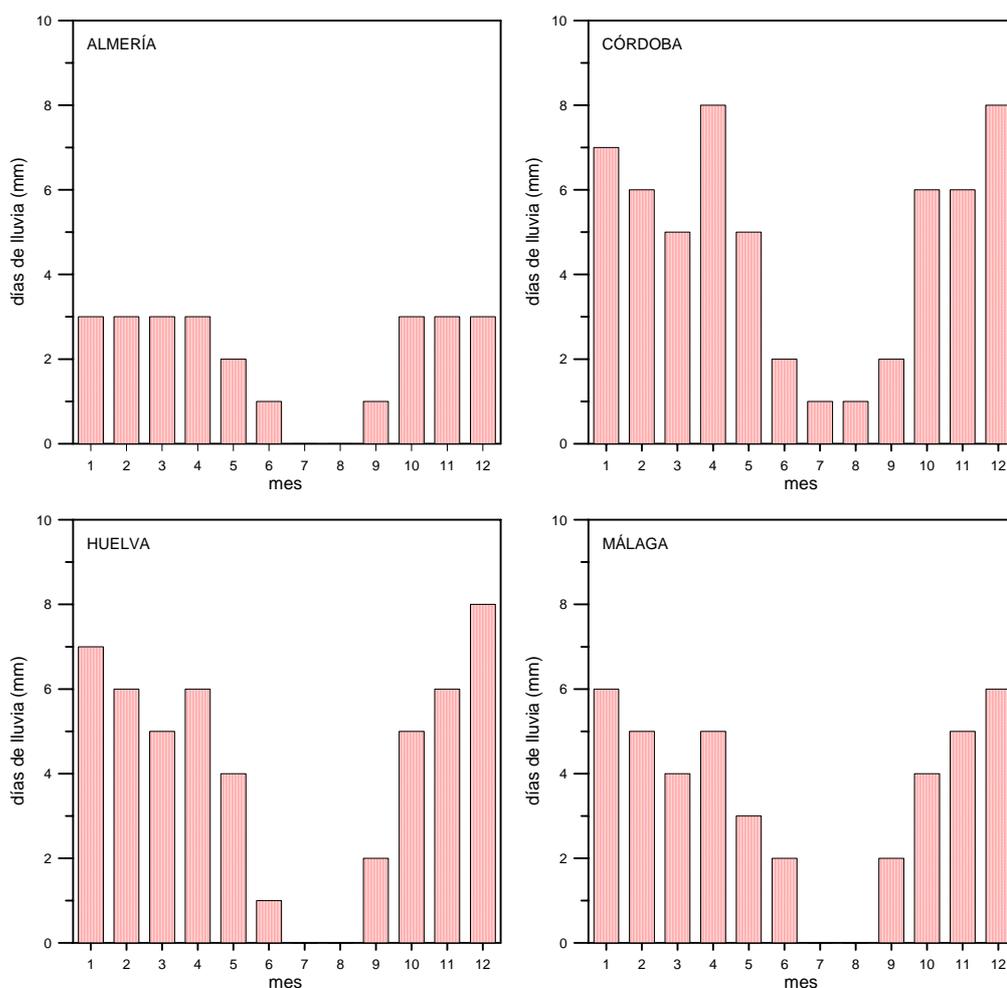


Figura 3.3. Número medio mensual de días de lluvia superior o igual a 1 mm. Período 1971-2000 (Fuente: INM). Elaboración propia

3.2 Series completas de datos de lluvia

El Instituto Nacional de Meteorología dispone de estaciones meteorológicas dispersas por todo el territorio peninsular. Para las localidades seleccionadas, dichas estaciones son Almería (Aeropuerto), Córdoba (Aeropuerto), Málaga (Aeropuerto) y Huelva (Ronda Este).

En cada estación se cuenta con datos de precipitación horaria registrada con pluviógrafos tipo Helmann con abertura horizontal de 200 cm² y situados a una altura de 1,2 m. La resolución de dichos aparatos de medida es de 0,1 mm, lo que implica que cualquier cantidad de lluvia inferior a esta cantidad, no queda registrada.

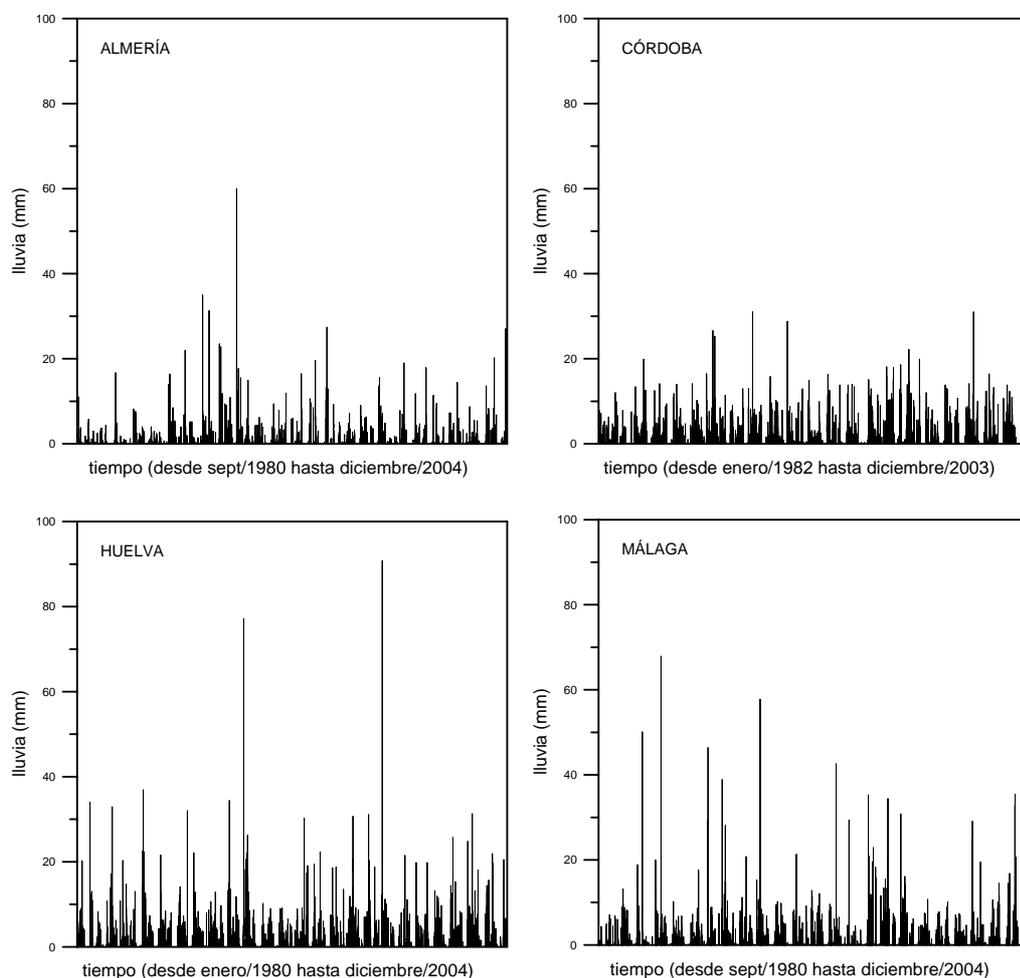


Figura 3.4. Series de datos de lluvia horaria para cada localidad (Fuente: INM). Elaboración propia

Las series de datos de lluvia horaria tienen longitud diferente para cada estación (figura 3.4). Así, para Córdoba se dispone de datos comprendidos entre enero de 1982 y diciembre de 2003; para Almería y Málaga la serie abarca desde septiembre

3 DATOS DE LLUVIA

de 1980 hasta diciembre de 2004. La serie de datos horarios para Huelva abarca desde enero de 1980 hasta diciembre de 2004. El porcentaje de horas sin lluvia en cada una de estas series es del 98,05% para Almería, del 95,08% para Córdoba, del 96,05% para Huelva y del 96,67% para Málaga. El valor medio anual de precipitación es de 189 mm en Almería, seguida de 444,82 mm en Málaga, 524,25 mm en Huelva y 619,37 en Córdoba.

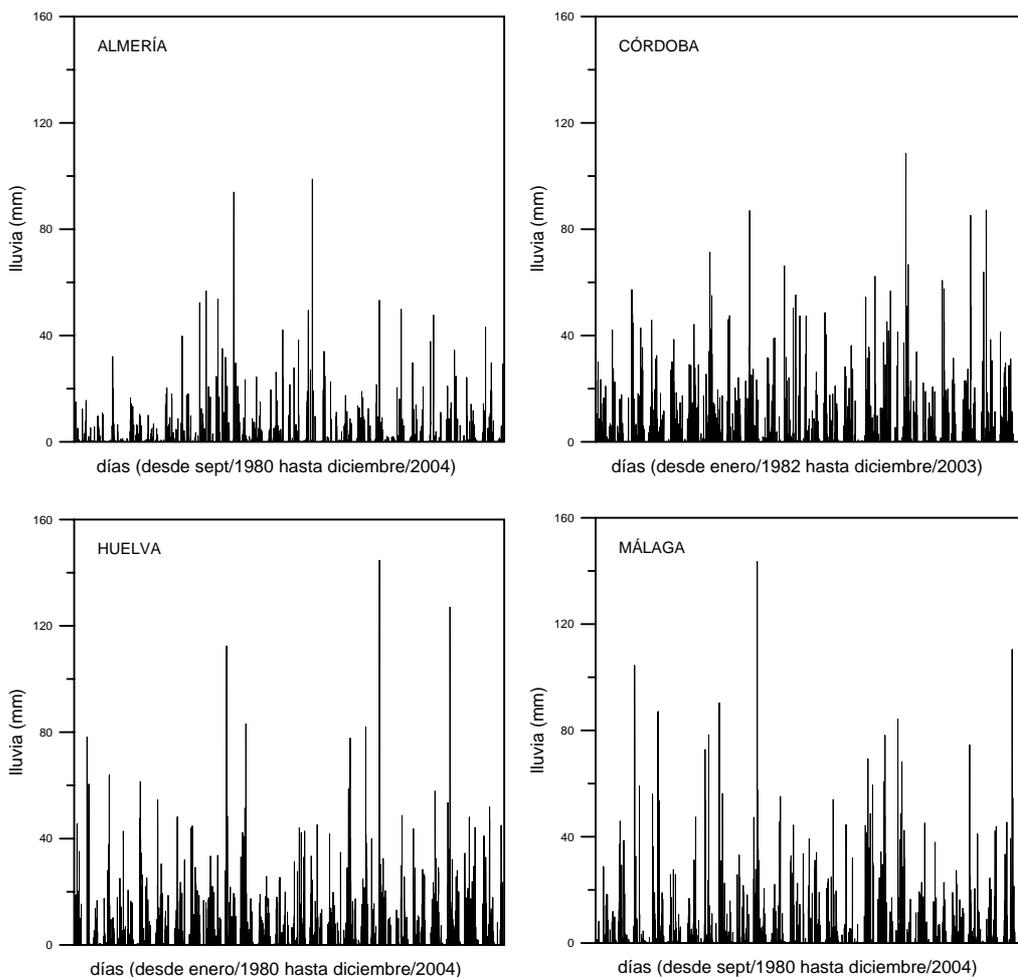


Figura 3.5. Series de datos de lluvia diaria para cada localidad. Elaboración propia

Cada una de las series de precipitación horaria descritas cuenta con 24 datos de de registros para cada uno de los días de la serie temporal. En aquellas horas en las que la precipitación supere o iguale 0,1 mm, habrá registro. En caso contrario, la precipitación registrada será cero. Partiendo de estas series de datos horarios, se pueden construir series de cualquier otra resolución inferior. Así, si para cada día se suman las cantidades de lluvia horarias comprendidas entre las 0 y las 24 horas, se

obtiene la serie de datos diarios de precipitación en cada una de las localidades elegidas (figura 3.5).

3.3. Series de datos máximos de precipitación

Para muchos cálculos hidrológicos se hace necesario trabajar con series de datos máximos de precipitación. Dichas series se obtienen a partir de las series de datos completas para distintas duraciones. Así, si se dispone por ejemplo de una serie de datos horarios de lluvia y se pretende obtener la serie de datos máximos anuales para esa misma duración, deberá buscarse el dato máximo de entre todos los disponibles cada año. La serie de datos máximos tendrá tantos datos como años completos disponibles existan.

A partir de las series de datos horarios se pueden obtener las series de datos máximos para duraciones que varían desde 1 hora hasta, normalmente, 24 horas. Para algunas estaciones meteorológicas se cuenta también con series de datos de mayor resolución, por lo que también pueden obtenerse las series de máximos para duraciones inferiores a 1 hora. Otras estaciones, si bien no disponen de estos datos de mayor resolución, cuentan con los datos máximos diarios para duraciones inferiores a una hora. Este es el caso de las ocho estaciones meteorológicas que el INM tiene ubicadas en las ocho capitales andaluzas.

Tabla 3.2. Longitud de las series de datos en las diversas estaciones

Estación	Longitud Serie (años)
Córdoba	1982/2004
Sevilla	1980/2004
Cádiz	1982/2004
Huelva	1980/2004
Málaga	1981/2004
Almería	1981/2004
Jaén	1982/83-89/92-94/2000
Granada	1980/2004

La tabla 3.2 muestra los años completos de datos para las citadas estaciones. Como puede verse en dicha tabla, para Almería, Málaga y Córdoba, la longitud de la serie no coincide con la de las series descritas en el apartado 3.2. Al tener que trabajar con años completos de datos para obtener las series de máximos, han de eliminarse del análisis los datos disponibles para el año 1980 en Almería y Málaga, año en el que se dispone de datos a partir del mes de septiembre. Para el caso de Córdoba, se ha añadido un año más a la serie ya que en el momento en el que se obtuvieron las

3 DATOS DE LLUVIA

series de máximos ya se habían recibido los datos correspondientes al año 2004 para la citada localidad. Las tablas 3.3 a 3.10, recogen las series de datos máximos anuales para distintas duraciones, en cada una de las ocho capitales de Andalucía. Tal y como puede verse en dichas tablas, se ha obtenido la serie de datos máximos en 24 horas y no la serie de datos máximos diarios. De esta forma se consigue trabajar con cantidades máximas de lluvia registradas en un período continuo de 24 horas con independencia del día al que pertenezcan, obteniéndose así valores que normalmente son superiores a los registrados en las series de datos máximos diarios.

Tabla 3.3. Series de datos máximos de lluvia para Córdoba

Precipitaciones maximas en Cordoba (Aeropuerto) 1982-2004									
Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1982	5,6	8,4	9,1	12,0	19,5	24,5	38,2	46,6	71,6
1983	8,6	9,5	9,9	14,0	17,0	17,0	33,0	42,0	61,1
1984	10,4	17,4	24,4	32,8	36,8	37,4	37,5	37,6	55,2
1985	7,1	11,5	12,7	15,1	24,8	25,9	27,9	34,7	40,4
1986	10,3	11,9	13,7	14,8	18,5	22,2	26,7	29,1	31,6
1987	14,7	22,0	26,4	35,7	45,0	45,7	52,6	60,1	74,3
1988	7,0	8,8	9,0	11,4	17,4	21,7	38,5	47,5	47,5
1989	11,7	15,3	19,7	32,8	50,0	63,3	84,1	86,8	97,4
1990	9,1	11,5	13,7	21,0	29,2	29,9	30,7	31,5	43,7
1991	8,8	12,8	18,7	29,1	48,3	58,5	66,0	66,0	66,0
1992	13,2	13,2	13,3	22,0	23,1	25,4	39,0	49,6	64,9
1993	9,6	13,4	14,7	19,6	23,9	24,9	34,3	47,2	48,6
1994	9,3	12,9	13,8	18,6	21,4	25,2	27,7	28,2	35,2
1995	8,0	10,5	11,8	15,7	26,3	30,6	47,5	52,4	68,3
1996	10,4	12,3	15,9	19,3	23,1	26,4	39,2	50,2	63,9
1997	12,8	17,0	22,1	34,9	42,7	55,5	93,3	107,1	154,8
1998	11,6	17,3	19,3	21,4	24,8	26,5	33,9	33,9	37,5
1999	7,2	10,8	13,4	20,4	25,6	30,8	47,8	60,7	60,7
2000	9,1	13,4	14,0	14,2	16,1	17,6	22,4	23,0	42,6
2001	9,5	12,5	16,8	31,8	49,3	52,3	65,6	80,6	87,2
2002	10,7	13,7	13,8	13,8	19,0	25,7	36,5	41,4	46,3
2003	8,0	12,3	12,4	18,8	22,4	25,1	33,5	38,0	42,5
2004	20,0	23,4	24,9	32,8	34,4	34,6	44,2	44,2	49,1

Tabla 3.4. Series de datos máximos de lluvia para Sevilla

Precipitaciones máximas en Sevilla (Aeropuerto S, Pablo) 1980-2004

Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1980	13,7	24,0	30,5	36,0	38,0	38,0	39,0	54,0	58,0
1981	6,0	9,2	11,0	19,6	20,0	20,5	25,7	31,0	34,4
1982	6,0	9,3	11,0	17,8	23,0	28,0	43,0	55,8	80,3
1983	11,5	18,5	23,0	27,5	37,0	42,9	61,8	74,8	101,9
1984	12,0	16,8	20,4	25,2	39,6	43,5	52,7	55,1	62,6
1985	11,0	13,2	14,6	19,9	22,9	27,6	34,8	34,8	55,6
1986	13,6	19,1	19,1	19,6	20,5	24,8	27,9	41,8	41,8
1987	9,0	11,0	16,3	21,1	32,7	35,5	43,5	45,6	49,9
1988	14,6	16,5	19,4	23,4	27,7	31,4	50,0	51,2	57,8
1990	14,0	18,5	21,1	26,2					
1991	12,8	24,5	38,0	43,6	47,4	47,4	47,4	47,4	57,2
1994	9,9	13,0	13,6	15,6	22,4	23,5	26,8	33,7	36,4
1995	10,6	18,2	20,3	25,7	33,6	40,0	49,1	75,6	86,6
1996	11,4	19,6	27,0	32,4	43,4	46,3	53,9	54,8	63,4
1997	12,0	15,8	16,9	18,3	26,6	31,4	60,4	84,6	110,7
1998	10,8	18,1	18,5	22,5	22,5	22,5	31,4	31,7	41,0
1999	9,6	13,0	18,0	25,0	29,4	30,8	41,0	55,8	55,9
2000	9,2	11,8	16,2	19,9	21,5	27,7	33,0	33,2	36,1
2001	9,0	13,0	18,0	28,5	35,2	36,7	50,7	62,4	65,9
2002	9,7	12,9	14,2	21,0	34,7	55,2	72,0	72,8	81,3
2003	9,3	13,2	13,7	19,4	29,8	39,0	43,8	73,3	77,9
2004	7,3	9,7	10,6	12,5	14,2	16,8	32,1	39,5	42,7

Tabla 3.5. Series de datos máximos de lluvia para Almería

Precipitaciones máximas en Almería (Aeropuerto) 1981-2004

Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1981	2,5	3,5	4,8	5,8	7,0	7,5	7,7	13,0	15,6
1982	7,1	11,5	16,7	16,7	31,8	31,8	31,8	31,8	32,5
1983	3,8	5,7	6,0	8,2	11,4	13,4	14,2	15,3	17,0
1984	2,7	3,5	4,1	6,0	7,5	8,0	8,0	10,0	14,5
1985	9,0	15,6	16,3	16,4	16,4	19,9	23,1	27,9	28,3
1986	9,0	14,7	15,6	22,0	29,0	31,0	35,5	35,5	39,8
1987	20,0	25,0	27,0	35,0	48,0	49,1	51,6	51,6	52,3
1988	12,0	21,0	30,0	37,0	49,7	49,9	55,4	56,8	56,8
1989	15,6	20,0	30,0	60,0	90,0	94,0	94,0	94,0	94,0
1990	8,2	11,7	14,7	22,6	23,2	23,2	23,2	23,2	28,4
1991	4,0	5,8	7,6	9,4	14,4	16,0	19,6	19,6	20,1
1992	4,8	7,7	8,1	11,9	19,8	24,1	29,3	34,8	50,3
1993	5,2	9,9	12,4	20,1	20,1	21,5	34,5	49,5	58,5
1994	12,0	21,9	28,5	30,5	35,1	46,7	73,0	90,2	98,8
1995	3,3	4,6	6,6	9,3	13,1	17,7	21,8	22,5	22,5
1996	4,8	5,4	6,2	7,6	9,0	11,7	18,0	19,0	21,6
1997	9,6	13,1	13,6	15,6	21,5	21,5	34,7	53,1	53,1
1998	3,2	6,3	6,8	7,8	12,0	14,9	18,3	20,4	22,1
1999	9,0	12,0	16,0	27,0	36,0	43,0	49,5	49,8	50,0
2000	7,0	9,5	12,8	17,9	20,9	28,9	35,0	43,5	53,6
2001	3,9	7,7	10,2	11,8	13,3	14,4	15,7	19,2	22,9
2002	7,0	9,6	11,3	15,4	22,5	25,8	32,5	33,2	35,5
2003	7,3	12,1	12,9	14,2	15,1	17,0	25,3	27,8	43,1
2004	9,6	18,2	26,8	27,1	29,0	31,5	32,2	32,3	35,4

3 DATOS DE LLUVIA

Tabla 3.6. Series de datos máximos de lluvia para Huelva

Precipitaciones máximas en Huelva (Ronda Este) 1980-2004

Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1980	18,6	32,0	42,6	46,5	64,0	70,8	78,1	78,1	78,3
1981	13,0	15,2	16,2	17,8	25,3	29,2	37,8	37,8	44,8
1982	6,9	9,1	10,9	20,3	21,5	23,1	30,1	38,0	66,9
1983	17,3	30,3	33,1	36,9	41,0	41,1	50,2	59,3	88,7
1984	10,0	15,9	20,6	21,6	26,0	26,0	29,7	41,2	54,6
1985	8,2	8,9	9,2	14,1	19,0	22,6	37,8	38,4	51,6
1986	8,1	15,4	30,5	31,8	34,9	35,0	35,0	43,9	44,9
1987	6,7	9,0	10,1	10,6	12,5	16,6	22,9	22,9	33,4
1988	12,3	13,7	21,6	34,4	44,1	47,0	77,3	101,2	117,8
1989	13,5	17,7	20,6	26,2	29,9	35,9	46,0	50,9	83,2
1990	7,0	8,1	9,8	12,3	14,6	16,1	19,4	19,9	22,8
1991	8,4	9,0	9,0	9,1	13,8	18,5	19,9	24,9	28,9
1992	6,3	6,3	6,5	9,5	15,8	18,5	23,0	28,6	32,7
1993	13,1	17,6	19,3	30,2	40,0	40,5	40,5	40,8	51,4
1994	15,4	18,0	19,0	22,3	32,3	34,2	42,7	44,7	50,4
1995	8,2	12,9	17,4	18,7	21,6	24,9	41,5	48,4	67,1
1996	12,1	23,5	27,4	41,2	48,5	68,9	77,2	116,7	131,2
1997	22,7	45,0	65,6	99,6	129,9	141,2	158,4	160,0	160,3
1998	4,7	6,4	7,5	10,0	13,6	15,2	17,1	23,2	33,1
1999	10,0	16,3	18,0	29,6	41,6	43,2	46,4	48,7	48,7
2000	8,5	13,6	16,6	22,8	24,4	24,5	36,7	53,9	93,6
2001	15,0	18,0	20,5	25,7	28,5	34,7	53,6	84,5	127,3
2002	12,6	23,1	25,9	36,3	38,0	38,1	40,5	50,0	76,7
2003	15,0	22,0	26,0	26,4	27,0	31,0	40,4	43,3	50,1
2004	14,2	18,7	23,9	29,7	35,6	40,0	55,8	69,1	81,1

Tabla 3.7. Series de datos máximos de lluvia para Cádiz

Precipitaciones máximas en Cádiz (Cortadura) 1982-2004

Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1982	14,5	23,0	28,1	33,4	37,9	43,0	53,0	76,4	120,2
1983	14,6	26,8	28,1	31,8	35,3	35,4	37,7	41,7	58,4
1984	12,0	13,5	16,3	23,0	26,0	27,7	32,8	50,5	65,3
1985	10,0	11,5	14,0	18,5	20,3	23,0	25,5	34,3	48,9
1986	14,0	18,0	20,0	26,0	30,0	30,0	30,0	34,2	55,8
1987	13,0	23,0	33,0	45,0	60,0	60,0	61,4	68,9	74,0
1988	10,6	20,4	26,6	40,8	57,7	57,7	60,0	68,0	72,6
1989	10,0	12,3	18,0	18,6	30,0	34,9	38,4	55,2	68,5
1990	15,0	15,0	16,1	18,8	24,0	26,0	30,1	46,8	49,2
1991	12,0	18,0	22,0	23,6	24,6	27,4	35,8	40,0	56,1
1992	16,0	19,2	22,2	27,2	29,8	29,8	30,0	30,0	50,4
1993	10,0	12,0	18,0	20,4	23,0	25,0	30,0	31,3	51,4
1994	11,0	15,0	16,2	16,2	17,0	21,0	23,0	25,0	32,2
1995	14,0	17,0	20,0	22,0	31,5	31,5	32,1	40,0	43,6
1996	10,0	14,0	18,0	24,0	28,0	31,0	42,0	42,7	52,1
1997	10,3	11,1	12,0	13,8	22,0	22,0	28,9	36,3	51,9
1998	6,6	8,0	9,4	15,4	23,0	27,7	33,0	35,1	37,0
1999	10,0	13,0	15,5	18,0	31,0	40,5	53,9	66,2	68,7
2000	9,2	12,2	13,2	13,4	15,0	20,0	29,3	35,0	41,4
2001	9,2	15,6	16,2	19,1	23,6	28,8	34,7	40,4	63,9
2002	12,7	16,3	19,2	21,7	24,3	28,5	39,8	62,4	75,3
2003	11,0	17,7	20,7	22,7	30,3	36,4	53,1	77,8	91,3
2004	12,3	21,0	25,4	27,9	32,7	36,4	51,5	58,6	63,5

Tabla 3.8. Series de datos máximos de lluvia para Málaga

Precipitaciones máximas en Málaga (Aeropuerto) 1981-2004									
Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1981	4,2	6,4	8,6	11,3	14,3	18,1	22,0	27,1	34,2
1982	6,5	8,8	9,9	18,5	34,4	48,0	86,5	127,5	162,5
1983	9,0	12,8	16,1	20,0	23,0	24,1	24,3	42,2	75,4
1984	31,4	45,5	61,7	67,9	73,0	77,6	85,0	94,3	126,6
1985	6,1	6,7	7,4	8,2	11,4	13,3	26,0	27,3	29,7
1986	28,0	43,4	48,7	50,9	54,5	60,1	62,8	62,8	82,9
1987	12,6	21,7	25,5	38,9	59,1	60,8	77,8	88,5	90,3
1988	6,8	9,5	10,7	11,6	20,2	21,9	37,3	37,3	61,1
1989	23,7	35,2	40,4	61,0	112,5	129,3	134,3	138,5	143,6
1990	7,0	12,4	16,1	16,3	16,7	17,7	19,1	21,9	39,2
1991	7,5	13,0	18,3	23,0	33,2	36,4	42,0	46,2	60,0
1992	7,3	10,6	11,5	12,8	22,8	26,1	31,7	37,2	45,0
1993	7,0	9,3	11,1	12,7	15,1	18,7	25,8	32,4	34,5
1994	23,6	35,4	38,4	42,6	49,2	65,1	88,3	96,0	100,7
1995	18,2	21,8	27,6	38,6	41,1	51,5	58,9	59,2	63,9
1996	8,7	15,1	17,5	23,8	30,7	31,4	48,7	53,5	91,3
1997	21,7	25,9	29,8	36,5	61,2	64,2	82,2	85,0	85,1
1998	6,0	8,7	10,3	11,9	12,8	13,2	24,4	27,1	46,0
1999	5,7	7,0	8,7	15,5	22,3	24,3	28,1	35,2	46,1
2000	4,2	6,4	7,7	10,9	16,2	17,6	22,9	22,7	35,9
2001	15,5	21,6	22,7	25,0	28,3	30,2	34,8	46,2	48,4
2002	8,9	12,4	14,9	21,6	27,6	33,3	51,9	62,1	69,4
2003	11,2	14,5	15,9	18,8	23,2	26,6	38,8	42,6	45,6
2004	13,0	20,6	26,8	35,7	52,9	55,7	65,1	65,6	110,5

Tabla 3.9. Series de datos máximos de lluvia para Jaén

Precipitaciones máximas en Jaén (1981-2004)									
Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1982	2,1	4,0	5,8	11,0	16,4	20,0	25,1	25,1	25,1
1983	10,4	17,0	25,8	43,2	43,2	43,2	48,0	49,2	50,6
1989	4,4	6,0	6,3	10,0	13,7	15,5	22,5	31,7	53,1
1990	4,0	6,2	7,3	9,6	16,5	17,5	19,6	21,4	35,6
1991	5,9	11,8	13,3	26,2	33,2	33,6	34,9	34,9	50,7
1992	5,8	9,9	12,7	16,0	26,7	32,3	38,2	45,6	50,4
1994	4,8	9,2	12,4	19,3	29,8	37,4	57,6	79,0	80,1
1995	2,8	3,9	5,0	8,2	12,2	13,5	15,0	15,0	29,0
1996	8,4	15,6	23,5	46,7	55,3	55,4	55,4	55,5	81,0
1997	5,4	6,8	9,6	19,5	22,3	22,3	23,8	39,9	53,6
1998	5,0	7,3	12,3	18,5	19,7	27,3	40,8	49,6	49,8
1999	12,8	22,3	22,6	23,5	25,3	27,4	27,7	27,9	34,6
2000	10,7	11,7	12,7	14,6	15,1	15,1	24,2	33,1	46,6
2001	6,0	8,0	11,0	15,5	18,9	21,4	27,2	30,1	38,2
2002	6,4	7,0	7,2	11,4	19,6	24,4	26,0	29,3	46,5
2003	6,0	8,6	10,5	16,4	23,8	23,8	29,4	35,1	38,5
2004	8,0	9,9	11,7	12,2	12,5	13,0	20,4	22,4	33,0

3 DATOS DE LLUVIA

Tabla 3.10. Series de datos máximos de lluvia para Granada

Precipitaciones máximas en Granada (Aeropuerto) 1980-2004

Año	10 m	20 m	30 m	1 h	2 h	3 h	6 h	12 h	24 h
1980	5,8	6,0	6,0	6,4	11,0	12,1	12,4	12,8	20,5
1981	5,6	6,7	8,2	10,6	11,5	15,1	15,5	15,6	22,3
1982	10,6	11,6	16,2	19,1	24,0	27,8	28,7	34,1	42,4
1983	3,5	4,6	5,7	8,0	11,6	15,0	19,0	27,5	41,0
1984	3,6	4,5	6,0	7,3	9,9	10,2	15,7	16,2	22,9
1985	3,2	4,4	4,8	7,3	11,9	13,0	16,7	21,7	32,3
1986	9,1	17,7	21,8	25,1	41,3	50,1	61,2	63,8	68,2
1987	10,4	18,7	20,2	21,9	22,7	23,6	24,2	30,2	35,0
1988	5,4	6,0	6,3	7,3	9,9	12,2	16,3	19,7	20,1
1989	12,0	12,8	16,9	18,3	18,4	18,4	25,5	33,9	35,2
1990	5,1	7,1	8,2	11,0	15,0	19,4	26,3	26,4	35,6
1991	3,3	3,7	4,2	6,4	10,6	13,6	23,4	23,4	24,8
1992	9,0	11,2	11,5	14,0	17,1	17,6	20,6	25,1	36,3
1993	5,5	8,4	9,0	9,8	12,6	13,5	15,6	19,5	20,2
1994	10,5	12,7	13,6	13,6	13,6	14,5	18,0	25,8	34,4
1995	9,3	16,4	17,2	17,2	17,2	18,8	21,5	21,5	25,9
1996	4,3	6,2	8,8	10,3	15,6	17,8	33,6	48,3	57,5
1997	11,0	11,1	11,4	16,3	20,6	20,8	30,3	50,0	52,6
1998	4,4	5,8	6,8	7,4	10,1	10,7	14,7	20,7	31,1
1999	4,0	6,4	8,2	13,0	21,2	23,4	30,1	30,1	37,5
2000	7,4	10,1	13,0	13,0	13,0	13,9	20,8	30,0	41,0
2001	11,9	20,4	24,9	25,8	25,9	28,0	33,3	36,4	47,3
2002	4,9	8,5	8,9	12,6	20,7	26,1	28,5	33,4	35,5
2003	5,9	8,1	8,7	13,4	19,3	22,3	24,3	26,6	31,2
2004	3,1	5,2	5,7	8,5	13,5	15,9	25,4	29,0	48,2

4 Aplicación y resultados

4.1 Descripción de varios regímenes temporales de lluvia en Andalucía mediante la multifractalidad y la teoría de la criticalidad autoorganizada (SOC)

En esta sección se estudia y se describe la estructura temporal de la lluvia, buscando diferencias entre diversas localidades y resoluciones temporales. Para ello se ha llevado a cabo un análisis multifractal de series de precipitación horaria y diaria procedentes de cuatro localidades situadas al sur de España: Almería, Córdoba, Huelva y Málaga. Los resultados de este análisis, completados con otros complementarios relacionados con la teoría de la criticalidad autoorganizada (Factores de Fano y Allan, periodogramas), permiten obtener diversas conclusiones que conducen, por un lado, a la elección de la escala temporal de lluvia más representativa y, por otro, a una primera clasificación en cuanto a la forma de llover predominante en cada lugar.

A continuación se describe la metodología aplicada así como los resultados y conclusiones más significativas.

4.1.1 Determinación del tamaño de los eventos de lluvia

Según se describió en el capítulo 2, tanto la teoría multifractal como la criticalidad autoorganizada (SOC) basan sus métodos en la descripción de los diversos eventos que componen el fenómeno que se analiza. En esta sección (4.1), el fenómeno objeto de análisis es la precipitación, por lo que todos los resultados que se obtengan dependerán en primera instancia de la definición y cálculo de los eventos de lluvia.

Como muchos autores reconocen (e.g. Over y Gupta, 1996), la elección del concepto de evento de lluvia elegido para un determinado análisis de datos debe ser minuciosa, pues hay que considerar que los distintos regímenes de escala que puedan diferenciarse estarán influenciados por la intermitencia de la lluvia y por los períodos secos que pudieran existir dentro de un determinado evento.

La estructura de evento de lluvia que se utiliza en esta sección y a lo largo de todo el capítulo 4, es la propuesta por Peters y Christensen (2002). Según estos autores, un

evento de lluvia i se define como una secuencia de cantidades no nulas de lluvia, $p(t)$, y su tamaño, Q_i , estará representado por la columna de agua acumulada desde su tiempo de inicio, t_{0i} , hasta el momento en que finaliza, t_{fi} . El cálculo se realiza según la siguiente expresión:

$$Q_i = \sum_{t_{0i}}^{t_{fi}} p(t) \Delta t \quad (4.1)$$

donde Δt es la resolución temporal de los datos. Los intervalos sin lluvia se consideran eventos secos. La figura 4.1 muestra un esquema explicativo de la definición anterior.

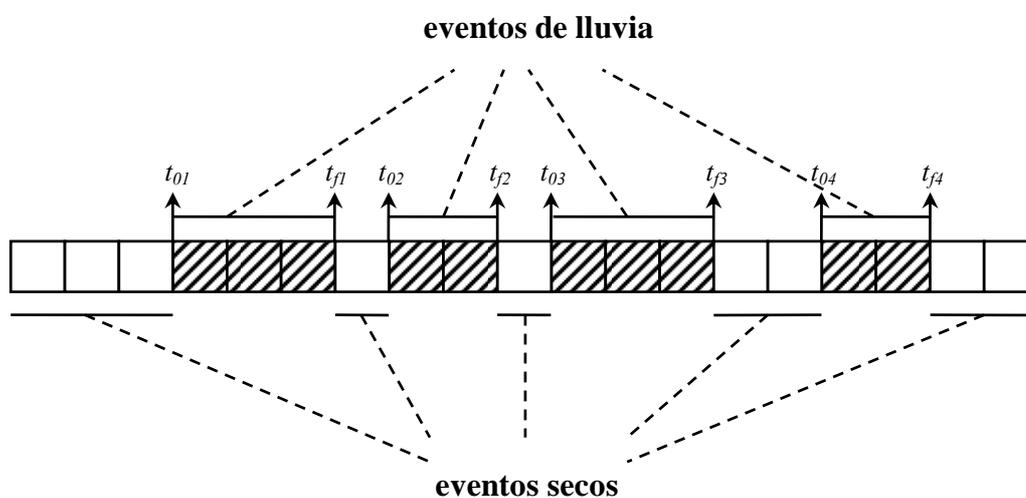


Figura 4.1. Definición de evento de lluvia

Aplicando la ecuación (4.1) a las series temporales de precipitación horaria y diaria de las localidades de estudio, se obtiene el número de eventos y la cantidad de agua correspondiente a cada uno de ellos. La tabla 4.1 muestra un resumen de dichos cálculos, concretamente los referentes al número de eventos y sus estadísticos más importantes.

Tabla 4.1. Características de los eventos de lluvia

Lugar	Datos	Número de eventos	Evento máximo (mm)	Evento medio (mm)	Desviación estándar (mm)	Coef. Variación
Almería	Horarios	1.348	94,0	3,38	7,32	2,17
	Diarios	512	99,0	8,06	12,85	1,59
Córdoba	Horarios	3.049	140,0	4,27	8,47	1,98
	Diarios	732	307,3	17,76	30,10	1,69
Huelva	Horarios	2.984	160,0	4,22	9,01	2,14
	Diarios	750	210,2	16,98	28,57	1,68
Málaga	Horarios	2.114	171,2	5,05	11,11	2,20
	Diarios	695	315,8	15,37	30,00	1,95

Según los resultados de la tabla anterior, la tendencia en el número de eventos es prácticamente la misma trabajando con datos de lluvia horarios y diarios. Para los datos horarios, Almería es la localidad en la que se han detectado menor número de eventos de precipitación, seguida de Málaga, Huelva y Córdoba. Con datos diarios la tendencia es la misma, salvo para Huelva y Córdoba, que en este caso invierten el orden.

La figura 4.2 muestra, para cada localidad y cada resolución temporal, el número de eventos de lluvia de un determinado tamaño. La curva roja representa los eventos obtenidos a partir de datos horarios de lluvia, mientras que la negra muestra los eventos obtenidos con datos de precipitación diarios. Para Almería, ambas curvas son casi coincidentes para los eventos mayores, pudiendo indicar la mayor presencia de precipitación de tipo convectivo en esta localidad. Para el resto de localidades, las curvas se cruzan, separándose a medida que aumenta el tamaño del evento, estando la curva representativa de los eventos obtenidos con datos diarios por encima de la obtenida con datos horarios. Esta separación es clara en Córdoba y Málaga, no siendo tan evidente en Huelva.

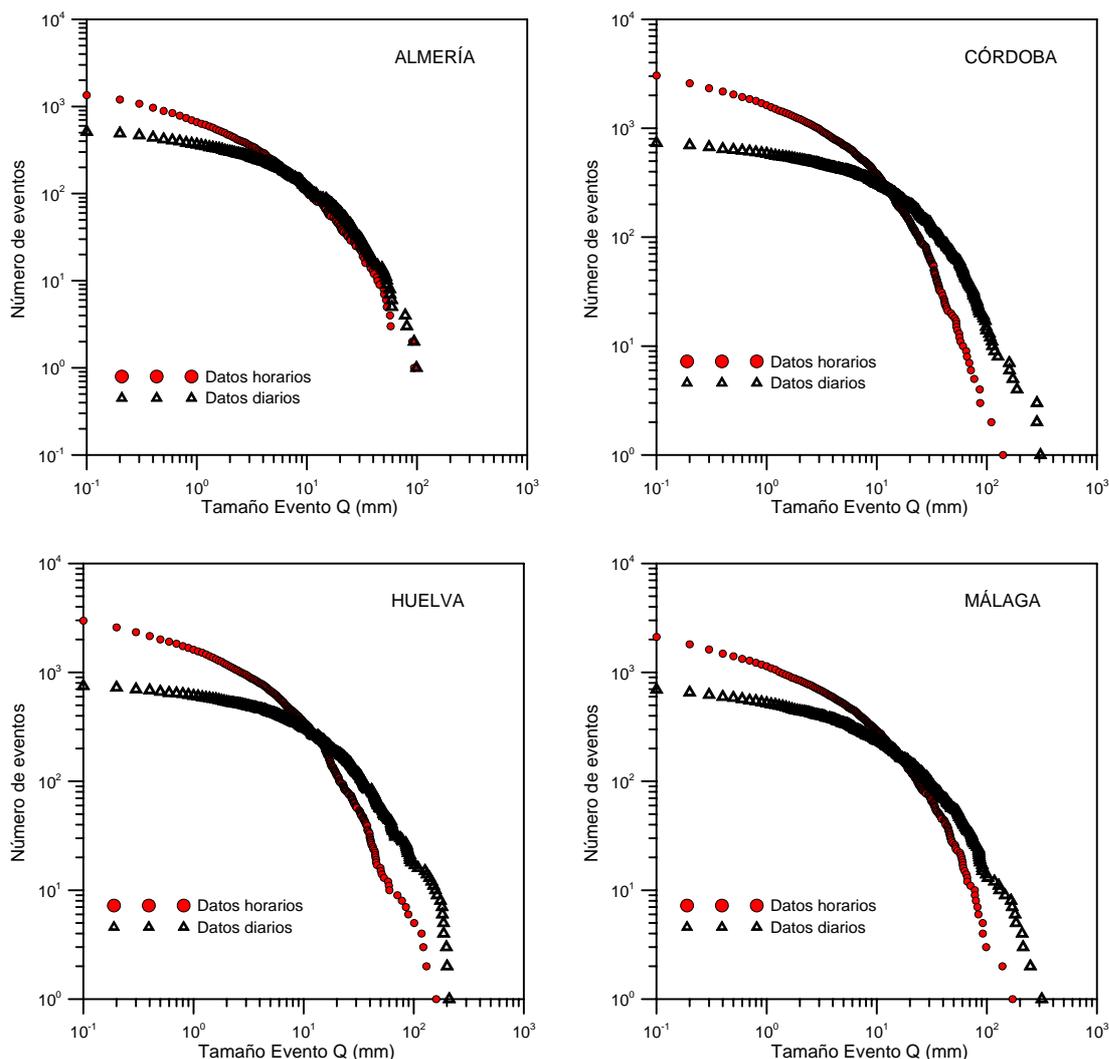


Figura 4.2. Número de eventos de una cantidad de lluvia (mm) determinada

4.1.2 Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad

Según se describió en el apartado 2.2, para analizar si un determinado proceso puede definirse como críticamente autoorganizado, el tamaño o la intensidad de los diferentes eventos que lo componen (principalmente los más extremos) deben ajustarse según la ecuación (2.26). La Figura 4.3 muestra los resultados obtenidos al ajustar a la citada ecuación el tamaño de los eventos de lluvia extremos obtenidos a partir de datos horarios en cada localidad. En el eje de abscisas se representa el tamaño de los eventos Q en milímetros de lluvia acumulada, mientras que el eje de ordenadas recoge el número de eventos de una determinada cantidad $N(Q)$.

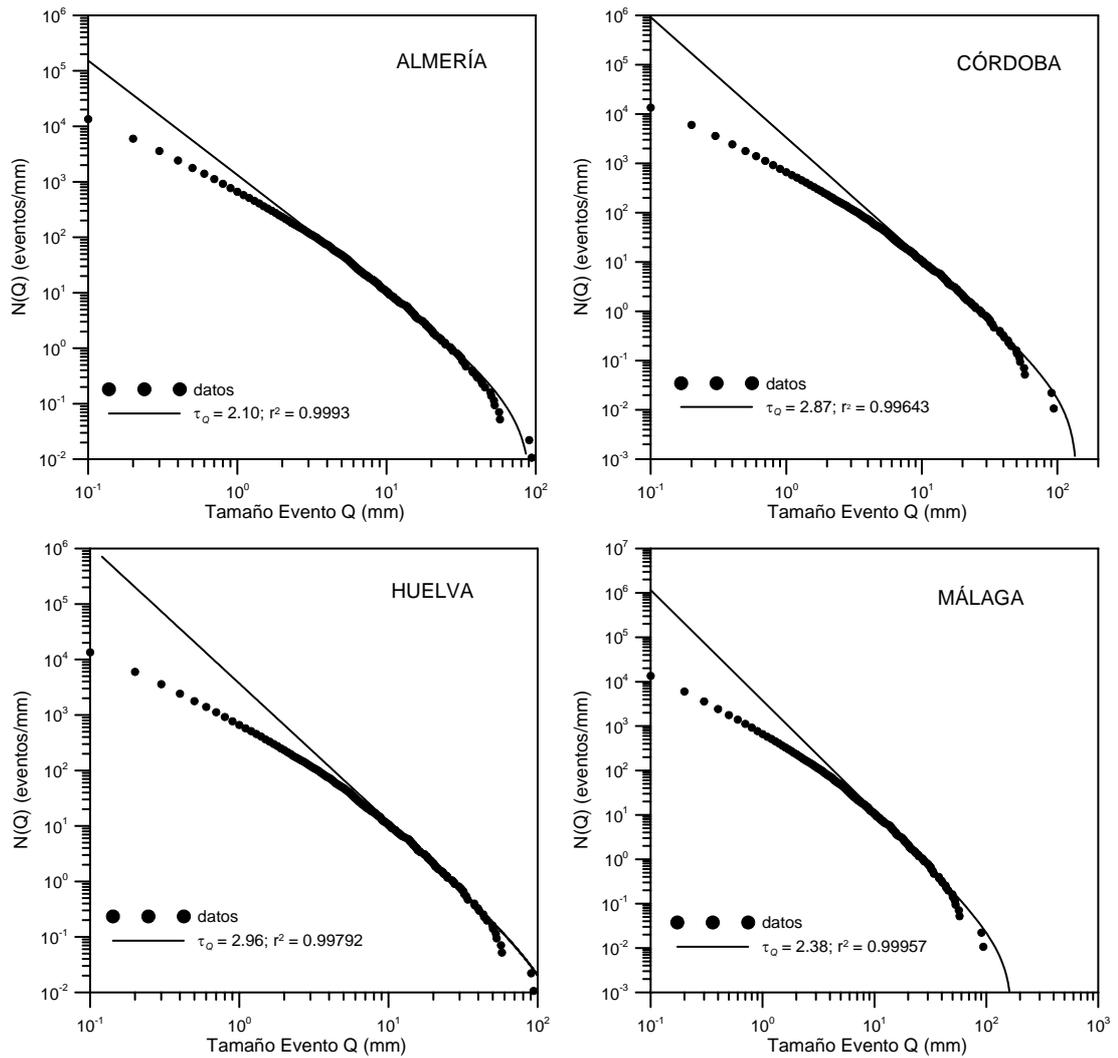


Figura 4.3. Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad de los eventos de lluvia obtenidos a partir de datos horarios

Tal y como se aprecia en los valores de los coeficientes de determinación r^2 de la misma figura, que varían desde 0,99643 para Córdoba hasta 0,99957 para Málaga, todos los ajustes obtenidos pueden considerarse aceptables. Los valores de los exponentes τ_Q son superiores a 2 para todas las localidades, lo que sugiere la necesidad de utilizar un modelo multifractal a la hora de describir el comportamiento de la lluvia horaria en las localidades analizadas (e.g. Lovejoy y Mandelbrot, 1985; Tessier *et al.*, 1996), en lugar de un modelo monofractal para el que se requeriría $\tau_Q < 2$. Huelva y Córdoba son las estaciones en las que se obtienen mayores valores del exponente τ_Q , estando próximos a los obtenidos por autores como de Lima y Grasman, 1999. Almería es la localidad que presenta el menor exponente, siendo su valor cercano al que se requiere para concluir un comportamiento monofractal de la lluvia. Para Málaga se obtiene un valor intermedio de τ_Q .

Los resultados anteriores sugieren que las pendientes de las colas algebraicas obtenidas pueden relacionarse con la naturaleza de la precipitación en cada una de las localidades analizadas. En Almería, por ejemplo, predomina la lluvia de tipo convectivo, mientras que Huelva recibe principalmente lluvias tipo frontal. En Córdoba y Málaga puede hablarse de un comportamiento mixto. Así, la primera de estas localidades registra más precipitación de tipo frontal debido a su situación geográfica, mientras que para la segunda, el registro de lluvias de tipo convectivo es el más predominante.

Debido a que la resolución temporal más frecuente de los datos de lluvia en las estaciones meteorológicas es la diaria, se han tratado las series diarias de datos de lluvia de las mismas localidades de estudio, de igual forma que las series de datos horarios, con objeto de comprobar si el comportamiento críticamente autoorganizado y multifractal se mantiene con el cambio de resolución temporal. De esta forma, una vez calculado el número de eventos y su cantidad de lluvia (Tabla 4.1 y figura 4.2), dichos valores se han ajustado a la ecuación (2.26). Los resultados de estos ajustes aparecen reflejados en la figura 4.4. De la misma forma que ocurrió al trabajar con datos horarios (figura 4.3), todos los valores obtenidos para el exponente τ_Q son mayores que 2, sugiriendo nuevamente la necesidad de utilizar un modelo multifractal para describir la precipitación diaria en todas las localidades de estudio. Sin embargo, la tendencia observada con los exponentes obtenidos al ajustar los eventos de lluvia extraídos de las series horarias de lluvia, desaparece al trabajar con datos diarios. A medida que la resolución temporal disminuye, los eventos más pequeños pasan a formar parte de eventos mayores, lo que podría ser la causa del cambio de valor en los exponentes. Este hecho se observa claramente en Huelva, Córdoba y Málaga. Sin embargo, Almería muestra un exponente prácticamente similar, lo que puede relacionarse con la dominancia de eventos de tipo convectivo en la zona: en un día se produciría un único evento de lluvia, que sería de corta duración, por lo que la suma de cantidades de lluvia al pasar a la escala diaria tendría poco efecto en los resultados. En las tres restantes estaciones la precipitación de tipo frontal es más predominante que en Almería, por lo que es menos probable que se de un único evento de lluvia (como suele pasar con los eventos de tipo convectivo o tormentas) en un día. Los datos de lluvia diaria de estas localidades contienen grupos de eventos de lluvia calculados con la resolución horaria.

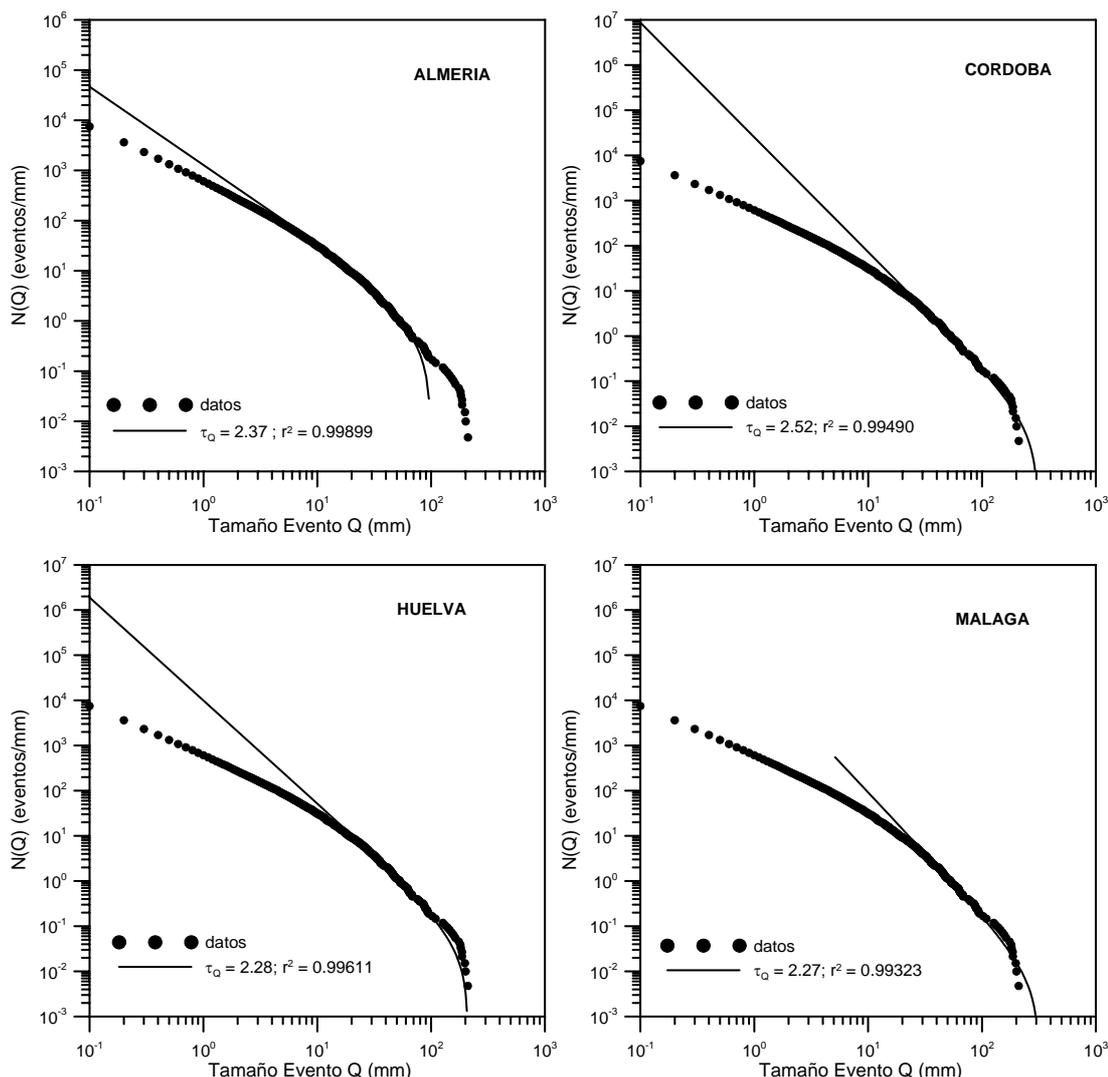


Figura 4.4. Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad de los eventos de lluvia obtenidos a partir de datos diarios

Tal y como se muestra en la tabla 4.1, el evento máximo calculado en Almería con la serie de datos de lluvia horaria, asciende a 94 mm, mientras que la cantidad máxima de lluvia calculada con datos diarios en la misma localidad es de 99 mm, un dato prácticamente similar. No sucede lo mismo con el resto de localidades.

4.1.3 Análisis de la función exponente escaladora de momentos

Como ya se describió en la sección 2.1, el escalado de momentos estadísticos es un método muy usado para identificar la mono o multi fractalidad de un proceso. Según los resultados obtenidos en el apartado 4.1.2, el proceso de la precipitación en las cuatro localidades de estudio, puede considerarse como multifractal,

independientemente de que se estudie a escala horaria o diaria de lluvia. Se trata ahora de ver si dichos resultados concuerdan con los que se derivan del estudio de los momentos para ambas resoluciones temporales.

4.1.3.1 Análisis de datos horarios de lluvia

La figura 4.5 muestra la representación doblemente logarítmica de los q-ésimos momentos de la intensidad de lluvia ε_λ para escalas temporales que oscilan desde 1 hora ($\lambda = 4096$) hasta casi 6 meses ($\lambda = 1$), frente a la razón de escala λ , para las localidades de estudio. Para cada estación, la representación de los momentos mayores de orden mayor que 1 se muestra en la parte (a) de la figura, mientras que la parte (b) recoge los resultados para los momentos de orden inferior a la unidad. Dentro de cada grupo de momentos, pueden detectarse ciertas singularidades relacionadas con las intensidades de lluvia extremas: muy elevadas o muy pequeñas. Por ese motivo, puede esperarse un cierto grado de incertidumbre en la estimación de los momentos muy elevados o muy pequeños (de Lima y Grasman, 1999). Normalmente, la estimación de los momentos de mayor orden está condicionada por la longitud de las observaciones y por lo tanto es altamente variable. Para el caso de los momentos más pequeños, debe tenerse en cuenta que las intensidades de lluvia más pequeñas no suelen estar debidamente recogidas en las series de datos debido a la resolución del pluviómetro de medida (0,1 mm en este trabajo). A pesar de estas consideraciones, el análisis de un amplio rango de momentos ayuda a describir la dinámica de la precipitación en una determinada zona.

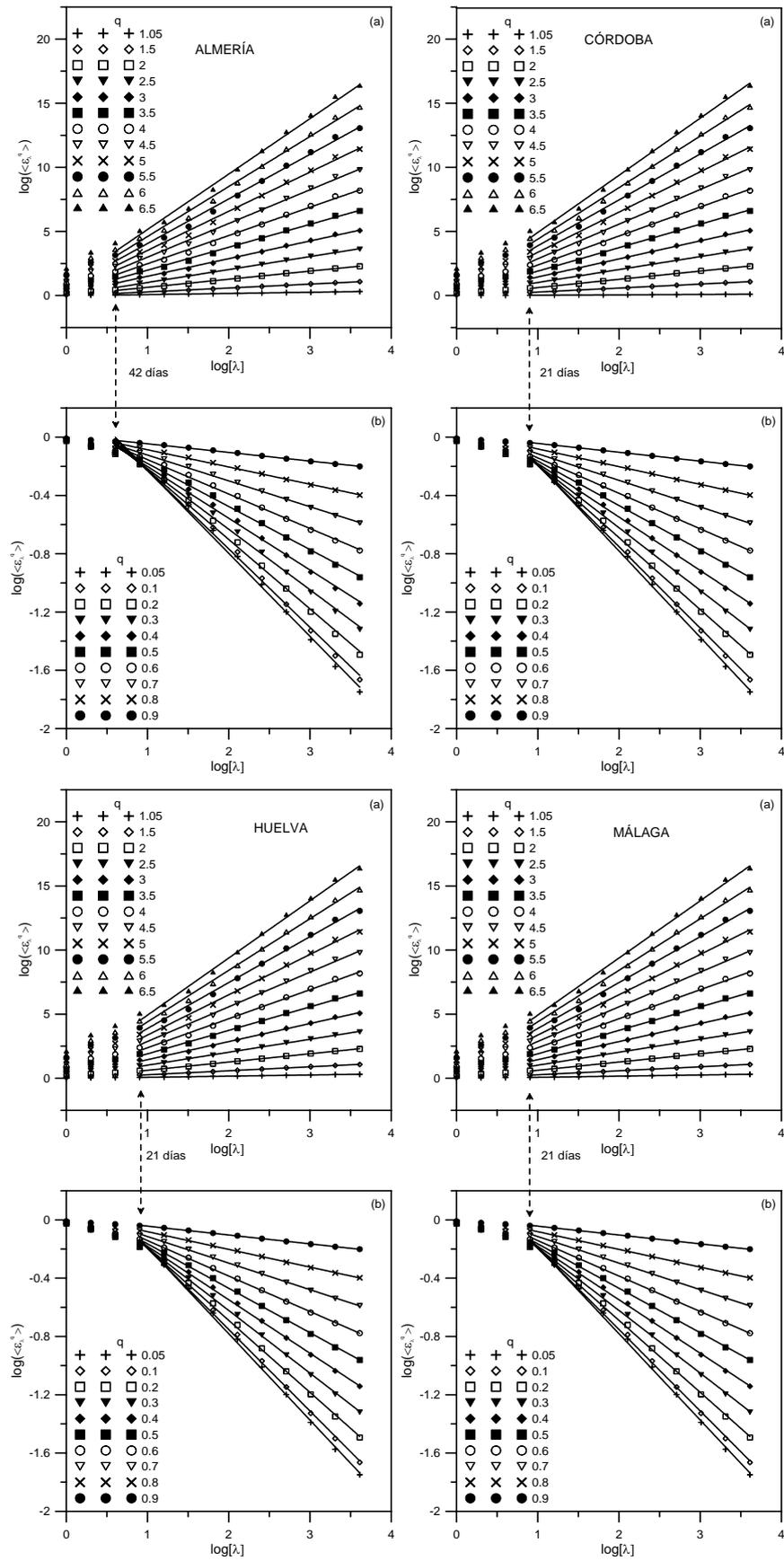


Figura 4.5. Curvas de momentos de orden mayor y menor que 1 (datos horarios)

Las líneas rectas de cada una de las partes (a y b) de la figura 4.5 muestran que el comportamiento de escala para los momentos se produce desde el valor de 1 hora hasta 21 días para todas las localidades, excepto para Almería, donde el límite superior está en 42 días.

Todas las representaciones de la figura 4.5 se desvían hacia arriba y hacia abajo respecto a las líneas obtenidas para valores de aproximadamente $q > 3$ y $q \leq 0,4$. Según autores como de Lima y Grasman (1999), este hecho denota que tanto las bajas como las altas intensidades de lluvia, están sobre e infraestimadas en las series de datos de precipitación. La infraestimación puede ser la consecuencia de trabajar con muestras de datos, lo que hace que las intensidades de lluvia elevadas puedan no estar registradas debido al tamaño finito de la muestra de datos utilizada. La sobreestimación está relacionada, según los mismos autores, con la precisión del aparato de medida de los datos de lluvia utilizados.

La ruptura en el régimen de escala a los 42 días en Almería y a los 21 días en Córdoba, Huelva y Málaga, se explica a partir del máximo sinóptico, concepto relacionado con las escalas temporales asociadas a estructuras de tamaño planetario (e.g. Kolesnikov y Monin, 1965) y con la escala natural que separa los regímenes meteorológicos de los regímenes climáticos (e.g. Pandey *et al.*, 1998). Los valores encontrados en la bibliografía para este máximo sinóptico oscilan entre 16 días (e.g. Ladoy *et al.*, 1991, 1993, Tessier *et al.*, 1996) y un mes (e.g. Fraedrich y Larnder, 1993; Svensson *et al.*, 1996; Labat *et al.*, 2002).

La representación de la función exponente escaladora de momentos $K(q)$, que describe el escalado de los momentos de la lluvia obtenida con datos horarios para una escala que oscila desde 1 hora hasta 21 días para Córdoba, Huelva y Málaga, y desde 1 hora hasta 42 días para Almería, se recoge en la figura 4.6. En el eje de abscisas se representan los diferentes valores de los momentos q , mientras que los valores de la función $K(q)$ aparecen en el eje de ordenadas.

La forma de la función para todas las localidades es predominantemente convexa, lo que significa que el conjunto de datos horarios analizado es multifractal. Sin embargo, para $q > q_D$, se observa un comportamiento lineal. El valor del momento crítico q_D es diferente para cada localidad: 3,0 para Huelva, 2,9 para Córdoba, 2,4 para Málaga y 2,2 para Almería. Este comportamiento lineal es la evidencia empírica de la presencia de una transición de fase multifractal de primer orden. Para $q > q_D$, el valor de la pendiente de la zona lineal de $K(q)$ es una estimación del orden de singularidad máximo γ_{\max} presente en una muestra finita de datos (e.g. Schertzer y

Lovejoy, 1987; Tessier *et al.*, 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995), siendo 0,87, 0,85, 0,75 y 0,91, para Huelva, Córdoba, Málaga y Almería, respectivamente.

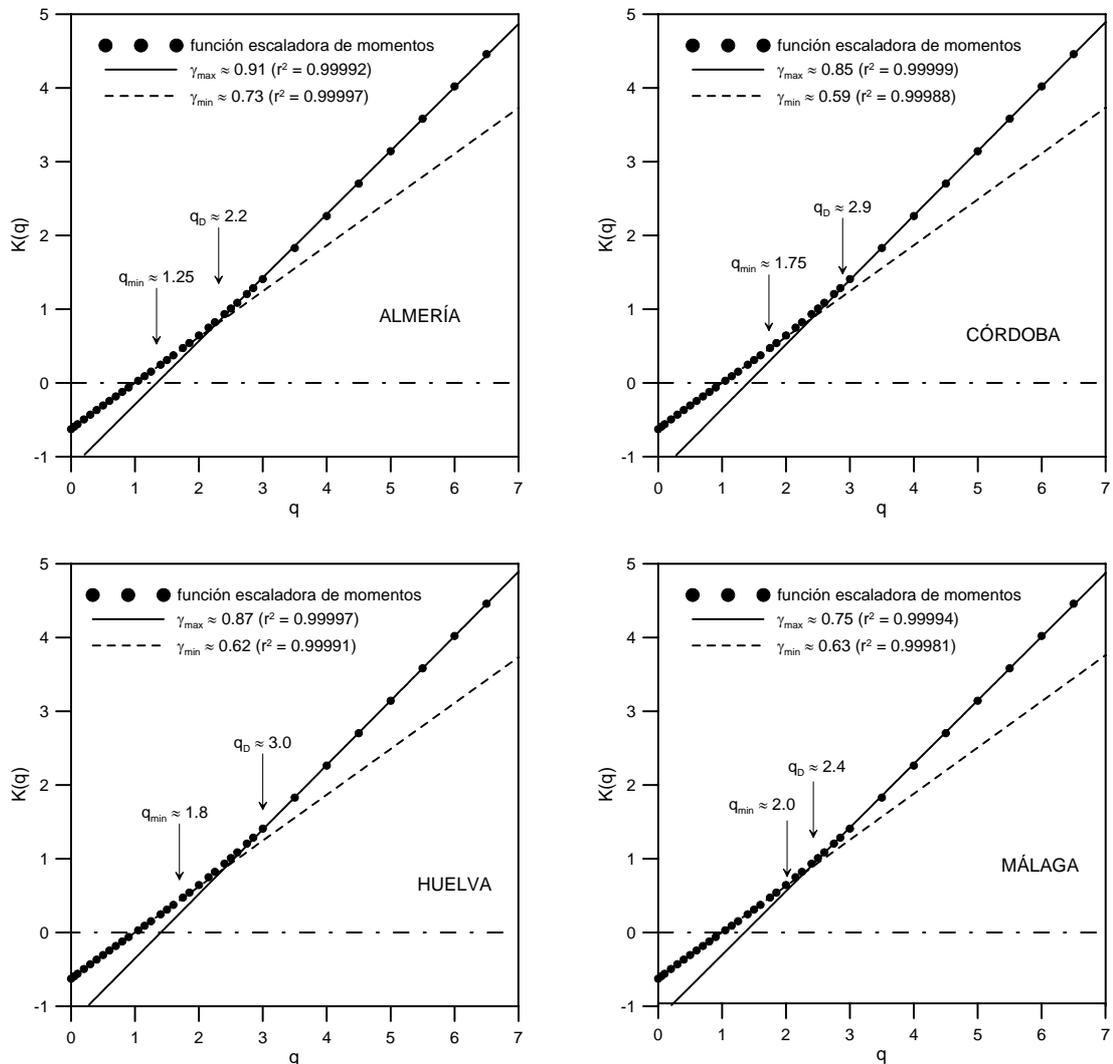


Figura 4.6. Función exponente escaladora de momentos (datos horarios)

Los valores del momento crítico q_D para Huelva y Córdoba están próximos al valor $q_D \approx 3$ estimado por autores como Ladoy *et al.* (1993), Svensson *et al.* (1996), de Lima y Grasman (1999), Sivakumar (2001), en otras zonas geográficas y climáticas. Málaga y Almería son las localidades que presentan un valor menor para q_D .

Todos los valores de q_D son similares a los exponentes (τ_D) obtenidos al ajustar los eventos extremos de precipitación obtenidos con datos horarios a la función de distribución empírica de probabilidad (figura 4.3): 2,96, 2,87, 2,38 y 2,10 para Huelva, Córdoba, Málaga y Almería, respectivamente.

La divergencia en los momentos estadísticos de mayor orden debido a la existencia de una transición de fase multifractal asociada a los valores obtenidos de q_D , y la equivalente distribución potencial de los eventos extremos de lluvia ($\tau_Q \approx q_D$), son las consecuencias de la multifractalidad (e.g. Schertzer *et al.*, 1993; Schertzer y Lovejoy, 1994) lo que evidencia la criticalidad autoorganizada de los eventos de lluvia (Bak *et al.*, 1987, 1988).

La función exponente $K(q)$ también exhibe para todas las localidades (figura 4.6) un comportamiento lineal para momentos menores que un determinado valor q_{min} , lo que también se asocia a una transición de fase multifractal de primer orden consecuencia de la restricción en los órdenes de singularidad γ disponibles (e.g. de Lima y Grasman, 1999). Para $q < q_{min}$, la pendiente de la zona lineal de $K(q)$, adopta valores cercanos a 0,73, 0,59, 0,62 y 0,63, para Almería, Córdoba, Huelva y Málaga, respectivamente.

4.1.3.2 Análisis de datos diarios de lluvia

Trabajando ahora con las series de datos diarios de precipitación para Almería, Córdoba, Huelva y Málaga, se obtienen los valores de diversos momentos (mayores y menores que 1) para varios valores de λ . La figura 4.7 muestra la representación doblemente logarítmica de los q -ésimos momentos de la intensidad de lluvia para escalas temporales que oscilan desde 1 día ($\lambda = 256$) hasta 256 días ($\lambda = 1$), frente a la razón de escala λ , para las localidades de estudio. Para cada estación, y al igual que para los datos horarios de lluvia (figura 4.5), la representación de los momentos de orden superior a que 1 se recoge en la parte (a) de la figura, mientras que la parte (b) muestra los resultados para los momentos de orden inferior a la unidad. En esta ocasión, el comportamiento de escala, marcado por la obtención de líneas rectas al representar el valor de los momentos, se eleva a 32 días para Córdoba, Huelva y Málaga, mientras que para Almería se extiende hasta los 64 días. Estos valores del máximo sinóptico son del mismo orden de magnitud que los obtenidos con datos de lluvia horaria (figura 4.5), y presentan la misma tendencia. Almería es la localidad para la que se registra una mayor diferencia en el valor del máximo sinóptico obtenido con datos de lluvia de diferente resolución temporal. Este hecho puede estar relacionado con las características locales de esta zona tal y como sucedía al comparar las características de sus eventos de lluvia calculados con datos horarios y diarios (tabla 4.1) con el resto de localidades.

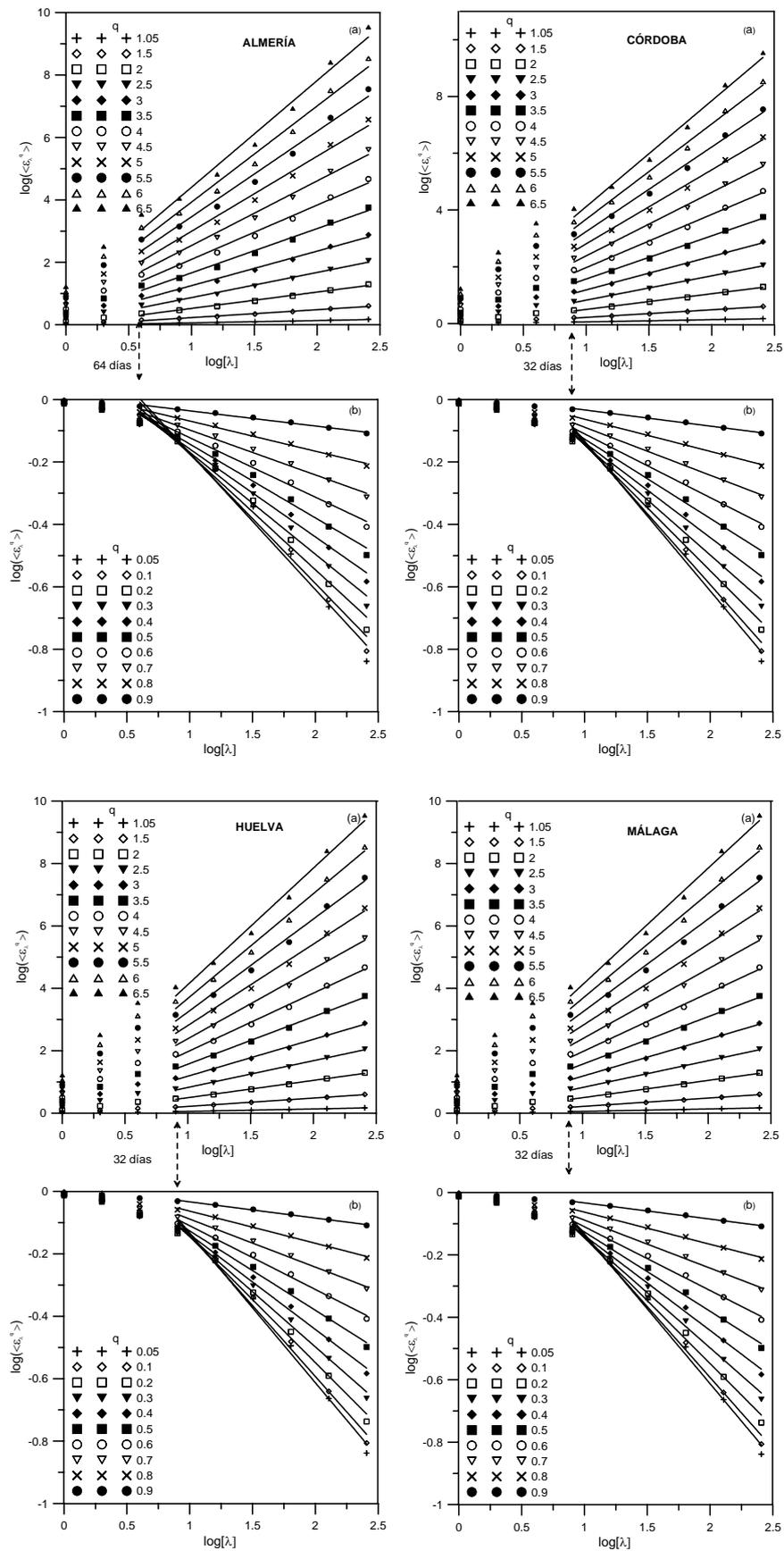


Figura 4.7. Curvas de momentos de orden mayor y menor que 1 (datos diarios)

El escalado múltiple de los datos de lluvia diarios se recoge en la figura 4.8, que representa la función exponente escaladora de momentos empíricos $K(q)$ para escalas que oscilan entre 1 y 32 días para Córdoba, Huelva y Málaga, y entre 1 y 64 días para Almería. Todas las funciones, al igual que sucedía con datos horarios (figura 4.6), están compuestas de una zona curva y dos zonas lineales (por debajo y por encima de determinados momentos críticos, q_D y q_{min}), dejando constancia nuevamente de la presencia de transiciones de fase multifractales.

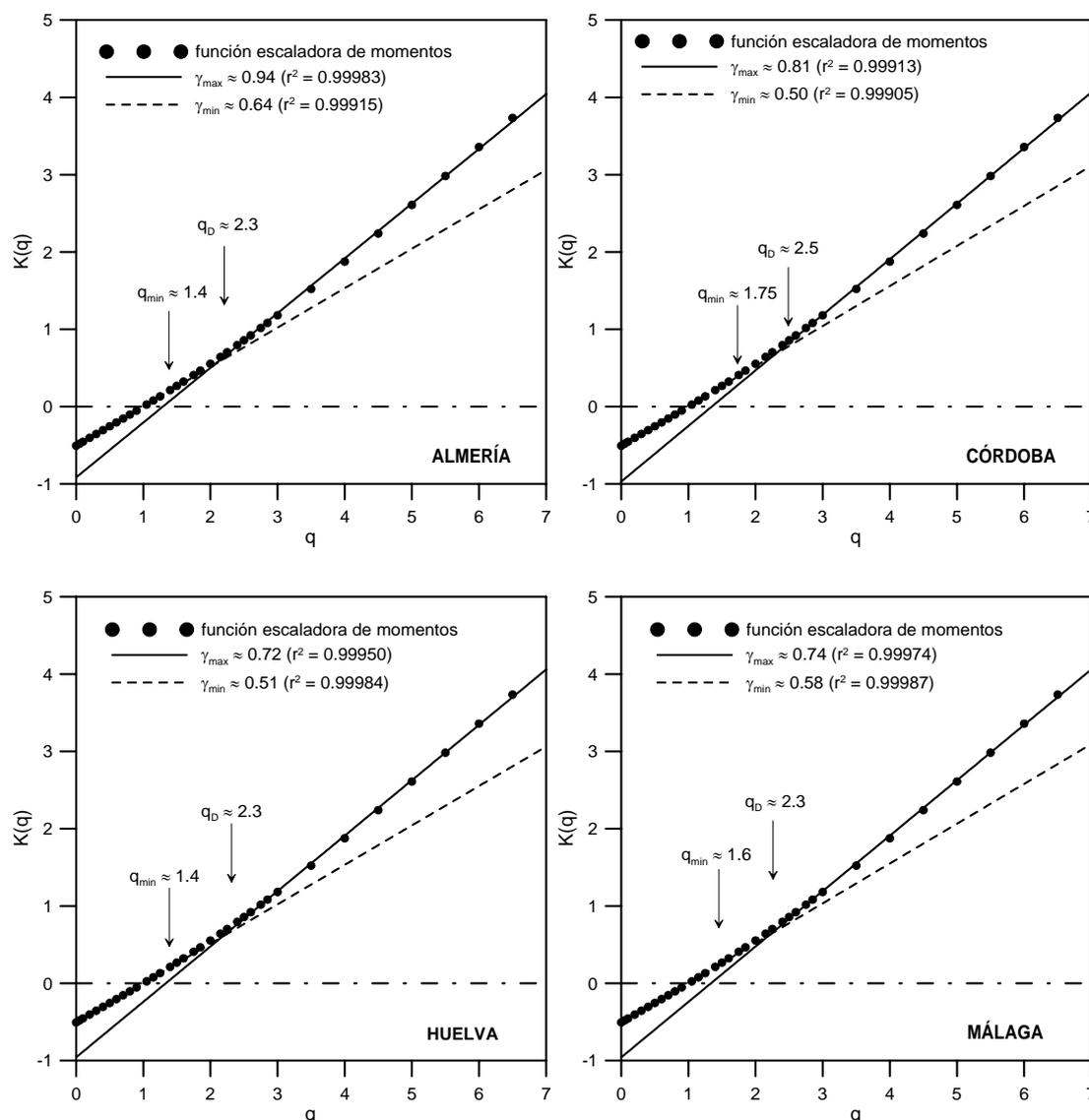


Figura 4.8. Función exponente escaladora de momentos (datos diarios)

El valor para el momento crítico q_D obtenido con datos diarios de lluvia, es de 2,5 para Córdoba y de 2,3 para Almería, Huelva y Málaga. Estos valores son similares a los de los exponentes (τ_Q) obtenidos al ajustar los eventos de lluvia procedentes de

datos diarios a la ecuación (2.26) (figura 4.4): 2,37 para Almería, 2,42 para Córdoba, 2,28 para Huelva y 2,27 para Málaga.

Si bien los valores obtenidos con datos diarios y horarios de lluvia son diferentes, en ambos casos se da la coincidencia entre sus valores de τ_Q y q_D , lo que confirma que la multifractalidad y la criticalidad autoorganizada de la precipitación está presente en las cuatro estaciones estudiadas, independientemente de la resolución temporal de las series de datos analizadas.

4.1.4 Agrupación temporal de la lluvia

Como ya se describió en el apartado 2.2, los sistemas críticamente autoorganizados llegan a ese estado gracias a fluctuaciones temporales de sus eventos, donde liberan gran parte de su energía. Una vez comprobado que la lluvia es un fenómeno SOC en las localidades analizadas, se procede a la aplicación de varios de los métodos existentes para el cálculo del exponente fractal (α), de forma que pueda detectarse la agrupación temporal de eventos característica del tipo de fenómeno detectado.

4.1.4.1 Factores de Fano y Allan

La figura 4.9 muestra los resultados del primer análisis de agrupación temporal llevado a cabo con los datos horarios de lluvia de Almería, Córdoba, Huelva y Málaga. Para el exponente de Fano, α_{FF} , el valor más pequeño se presenta para la serie temporal de Almería (0,30). Los valores más elevados del mismo exponente corresponden a Huelva y Córdoba (0,47). Para Málaga, se obtiene un valor intermedio a los anteriores (0,38).

Para el exponente de Allan, α_{FA} , se detecta la misma tendencia, con valores de 0,30, 0,50, 0,37 y 0,50 para Almería, Huelva, Málaga y Córdoba, respectivamente.

Como ya se mencionó en el apartado 2.2.3, los exponentes de Fano y Allan son estimadores del exponente fractal, α , de la ley potencial que caracteriza el espectro de densidad de un proceso con propiedades de escala (ecuación 2.29). El valor de α indica el grado de agrupación en un proceso según Thurner *et al.* (1997). Cuando $\alpha \approx 0$, el proceso puntual es Poissoniano y los tiempos de ocurrencia no están correlacionados. Sin embargo, si $\alpha \neq 0$, el proceso puntual presenta propiedades de escala. Los valores de α obtenidos para las distintas estaciones analizadas indican

pues, como era de esperar, la presencia de un comportamiento escalado de la precipitación.

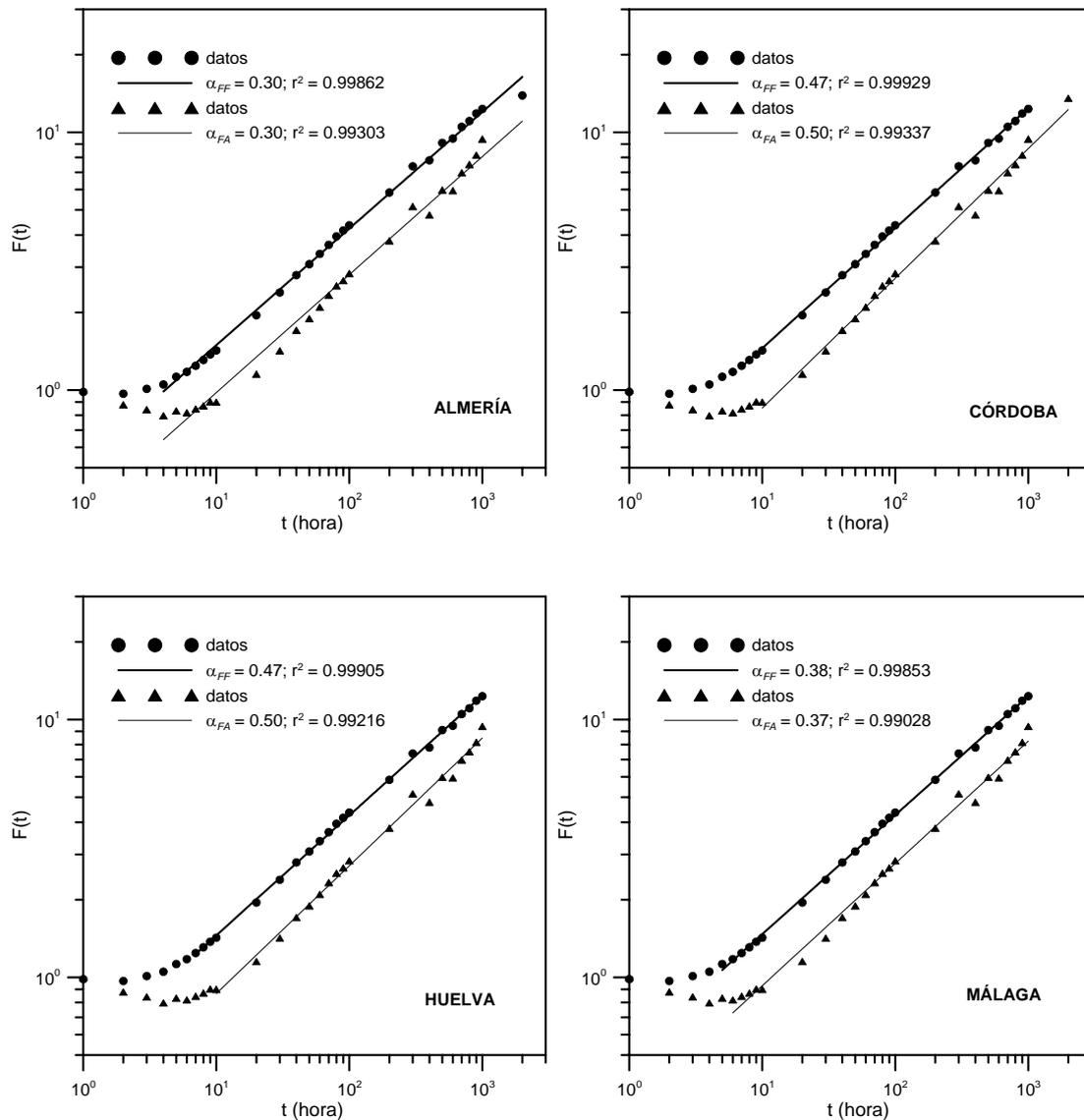


Figura 4.9. Factores de Allan y Fano (datos horarios)

Dichos valores del exponente fractal en las distintas localidades analizadas, pueden relacionarse con la naturaleza de la precipitación en cada una de ellas. Así, el valor más bajo de α es el estimado para Almería, donde la precipitación de tipo convectivo, que puede considerarse como un proceso con menor grado de agrupación temporal, es la más predominante. En el lado opuesto, aparecen los valores de α obtenidos en Córdoba y Huelva, donde la precipitación de tipo frontal es más habitual y puede considerarse con tiempos de ocurrencia correlacionados. La naturaleza de la lluvia en Málaga, tal y como indica su exponente fractal, exhibe un

comportamiento mixto entre convectivo y frontal, pero más próximo al primero. De ahí, que el valor de α para esta localidad sea próximo al de Almería.

El momento a partir del cual podemos considerar que existe agrupación en el proceso de la lluvia en las localidades analizadas, oscila entre 4 y 7 horas para el factor de Fano, y entre 4 y 10 horas para el de Allan. Para el factor de Fano, se denota este tiempo por t_F y para el factor de Allan t_A . Como límite superior de tiempos para las fluctuaciones temporales, se obtiene un valor de $\approx 1 \times 10^3$ horas, próximo al obtenido para el máximo sinóptico (figura 4.5). La tabla 4.2 muestra los resultados más relevantes referentes a cada factor para cada localidad.

Tabla 4.2. Resultados del análisis de los factores de Fano y Allan

	Almería	Córdoba	Huelva	Málaga
α_{FF}	0,30	0,47	0,47	0,38
r^2	0,99862	0,99929	0,99905	0,99853
t_F (horas)	4	7	7	5
α_{FA}	0,30	0,50	0,50	0,37
r^2	0,99303	0,99337	0,99216	0,99028
t_A (horas)	4	10	10	6

4.1.4.2 Análisis espectral

Una vez estudiada la agrupación temporal de la precipitación, un paso más puede consistir en la detección de la periodicidad de los eventos de lluvia en una determinada localidad, para lo que han de utilizarse métodos de análisis espectral. Como ya quedó descrito, uno de estos métodos consiste en el cálculo de los periodogramas. Con el periodograma de un proceso se obtiene una estimación del exponente fractal α y se detecta la presencia de periodicidad en dicho proceso.

La estimación del exponente fractal y la identificación de regímenes de escala usando la metodología del periodograma, depende del número N_w de ventanas de longitud T_w sin solapamiento, en las que se pueda dividir el período de observación de la lluvia (e.g. Telesca *et al.*, 2005). Adicionalmente, el juicio individual juega un papel fundamental y puede producir discrepancias e incertidumbres en los resultados (e.g. Sivakumar, 2001). Para disminuir el impacto de este último factor en los resultados deben calcularse varios periodogramas correspondientes a diferentes valores de N_w .

Partiendo de las series de datos horarios de precipitación para Almería, Córdoba, Huelva y Málaga, se han calculado cuatro periodogramas correspondientes a valores de N_w que oscilan entre 4.096 y 32.768, y correspondientes a diferentes valores de T_w (tabla 4.3).

Tabla 4.3. Valores característicos de los periodogramas calculados

Huelva			Córdoba		Málaga		Almería	
N_w	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}
4.096	53	0,65	40	0,55	52	0,49	52	0,37
8.192	26	0,57	20	0,55	26	0,47	26	0,35
16.384	13	0,47	10	0,49	13	0,46	13	0,36
32.768	6	0,40	5	0,36	6	0,37	6	0,32
$\bar{\alpha}_{PG} = 0,48$			$\bar{\alpha}_{PG} = 0,52$		$\bar{\alpha}_{PG} = 0,44$		$\bar{\alpha}_{PG} = 0,35$	

A modo de ejemplo, se representan los periodogramas obtenidos para un valor de $N_w = 32.768$ (figura 4.10). En todos los periodogramas se pueden distinguir dos zonas. El área donde se ajustan los valores de los exponentes α_{PG} se extiende hasta $f \approx 1 \times 10^{-3}$ horas para Córdoba, Huelva y Málaga, y hasta $f \approx 9 \times 10^{-4}$ para Almería, valores de frecuencia que son indicadores del comportamiento fractal de las series de datos horarios analizadas. Para frecuencias menores ($f \leq 0,5 \times 10^{-3}$ horas⁻¹), el valor del exponente es $\alpha_{PG} \approx 0$. Esta región del espectro se conoce como llanura espectral (e.g. Fraedrich y Larnder, 1993) y es en ella donde, si existen, pueden detectarse periodicidades en el proceso que se esté estudiando. Para el caso que se analiza, se detecta este comportamiento periódico para $f \approx 0,057 \times 10^{-3}$ horas⁻¹ (dos años), $f \approx 0,114 \times 10^{-3}$ horas⁻¹ (un año) y $f \approx 0,231 \times 10^{-3}$ horas⁻¹ (seis meses), en Córdoba y Huelva. Valores similares a estos picos de frecuencia detectados en ambas localidades, también fueron encontrados por autores como Fraedrich y Larnder (1993) al analizar series temporales de lluvia en diversas localidades de Europa.

Para Málaga pueden observarse dos periodicidades fijadas para uno y dos años, no siendo claramente detectable la correspondiente a seis meses. Almería solo presenta un máximo claro para $0,114 \times 10^{-3}$ (un año). Como puede apreciarse aparecen menos picos o periodicidades en aquellas localidades donde las lluvias de tipo convectivo son las más predominantes y la estacionalidad de la lluvia no está tan marcada.

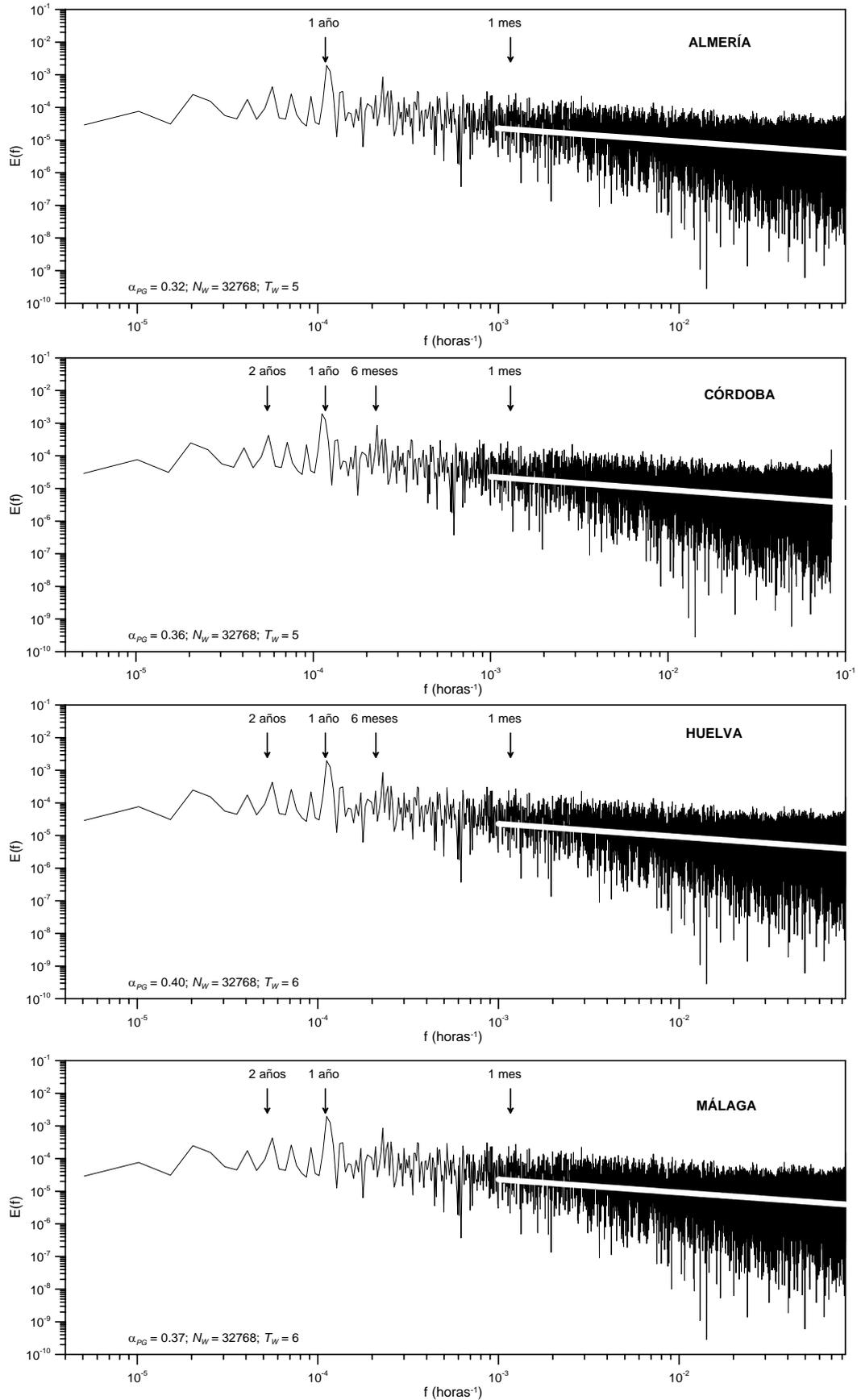


Figura 4.10. Periodogramas para $N_w = 32.768$ (datos horarios)

El momento de la ruptura detectada en la forma de los periodogramas para $f \approx 1 \times 10^{-3} \text{ horas}^{-1}$ y $f \approx 9 \times 10^{-4} \text{ horas}^{-1}$, es similar a la escala temporal máxima para la que el ajuste a los factores de Fano y Allan exhibía una apariencia lineal (figura 4.9). Por otra parte, el valor de estas frecuencias es básicamente el máximo sinóptico detectado al realizar el análisis de momentos para las distintas series horarias de precipitación (figura 4.5): ≈ 21 días para Córdoba, Huelva y Málaga, y ≈ 42 días para Almería.

Como se ha indicado con anterioridad, se han calculado varios periodogramas para cada localidad, por lo que se toma como exponente fractal representativo el valor medio de los diferentes α_{PG} obtenidos (Tabla 4.3). Estos exponentes medios son muy parecidos a los obtenidos para el análisis de Fano y Allan ($\alpha_{FF} \approx \alpha_{FA} \approx \alpha_{PG} \approx \alpha$), lo que pone de manifiesto la agrupación temporal presente en el proceso de la precipitación en las localidades estudiadas y para el régimen de escala analizado.

Para comprobar si las periodicidades detectadas persisten al trabajar con datos de lluvia diarios, y por lo tanto, con series más cortas en todas las localidades, se calculan también los periodogramas con datos diarios de lluvia. Cada una de las series de datos diarios analizadas tiene una longitud determinada, lo que condiciona los valores de N_w utilizados para obtener los nuevos periodogramas. La figura 4.11 muestra los periodogramas para cada localización y diferentes valores de N_w .

Para estos nuevos periodogramas, el comportamiento potencial se extiende desde 1 día hasta al menos 6 meses en todas las localidades. Los valores de pendiente del espectro varían desde -0,13 hasta -0,15, valores cercanos a los obtenidos para datos diarios por autores como de Lima y Grasman, 1999.

Las periodicidades detectadas aparecen en frecuencias de $f \approx 2,73 \times 10^{-3} \text{ días}^{-1}$ (un año) y $f \approx 5,56 \times 10^{-3} \text{ días}^{-1}$ (seis meses) para Córdoba y Huelva. Para Málaga, solo se distingue con claridad el pico de intensidad para un año. Almería, muestra el mismo tipo de comportamiento que con datos de lluvia horaria, detectándose para esta localidad un periodicidad clara para $f \approx 2,73 \times 10^{-3} \text{ días}^{-1}$ (un año). Para escalas superiores cercanas a seis meses puede distinguirse la llanura espectral para todas las localidades.

Sería necesario trabajar con series de datos diarios de mayor longitud para corroborar el comportamiento descrito en los periodogramas de la figura 4.11 (e.g. Ladoy *et al.*, 1991; Fraedrich y Larnder, 1993).

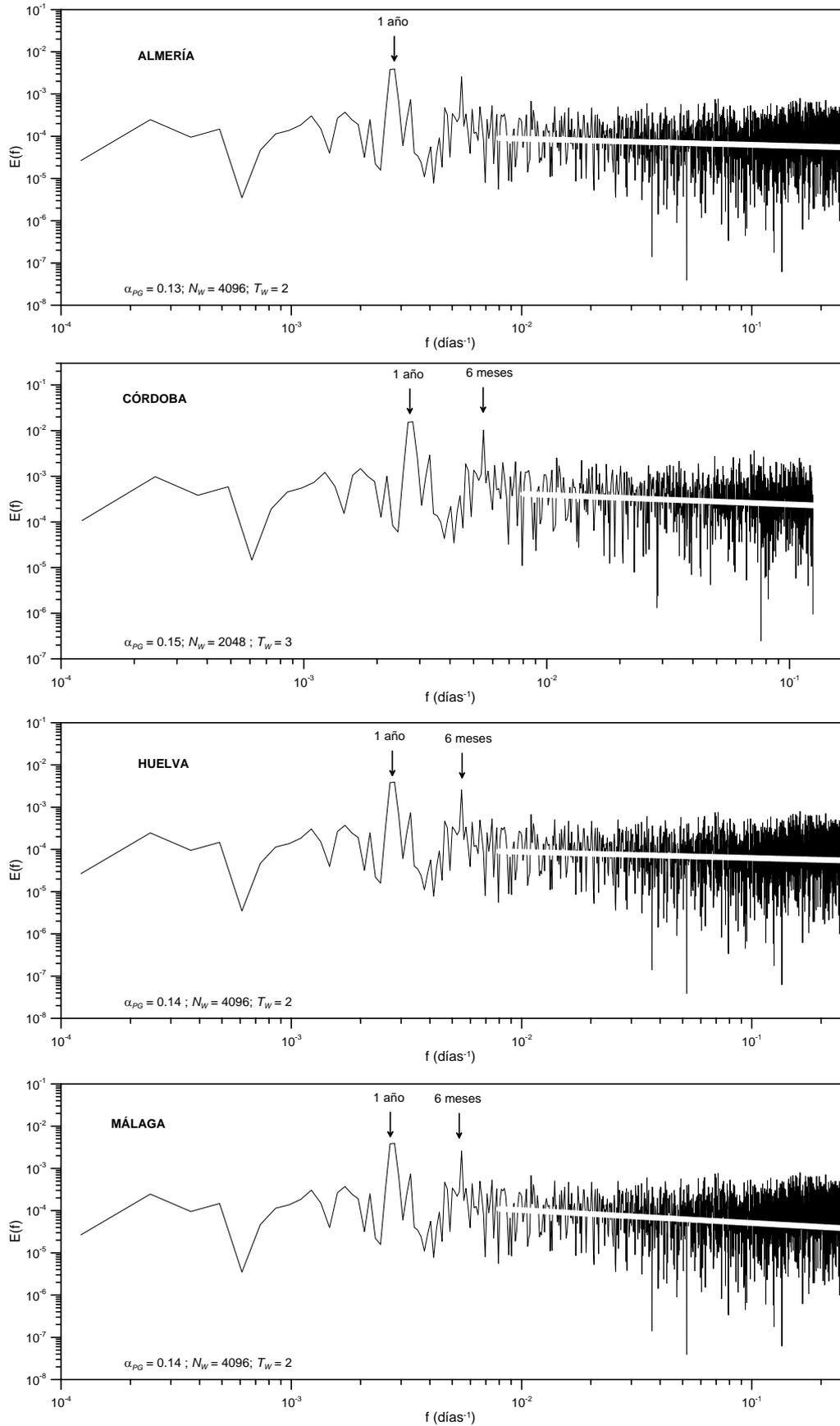


Figura 4.11. Periodogramas para varios valores de N_w (datos diarios)

4.1.5 Conclusiones

Del análisis de series temporales de precipitación horaria y diaria en las localidades de Almería, Córdoba, Huelva y Málaga, se desprende el comportamiento multifractal de la precipitación en todas ellas y la presencia de transiciones de fase multifractales, independientemente de la resolución temporal.

Mediante el método del escalado de momentos, se detecta el rango de comportamiento de escala de la precipitación. Para la precipitación horaria dicho rango se extiende desde 1 hora hasta 21 días para Córdoba, Huelva y Málaga, mientras que para Almería se amplía hasta 42 días. Al trabajar con datos de lluvia diaria, los rangos de escala oscilan entre 1 y 32 días para las tres primeras localidades, siendo nuevamente superior para Almería, donde se extiende hasta 64 días. Los límites superiores de todos estos rangos de escala determinan el *máximo sinóptico*, y aunque todos ellos son similares a los valores que pueden encontrarse en la bibliografía (16-32 días), el valor obtenido para Almería es algo diferente, debido a las características locales de la lluvia en esta estación.

Para cada localidad y resolución temporal de datos de lluvia, la detección de transiciones de fase multifractales permite obtener el valor del momento crítico q_D . Estos valores de q_D son similares a los exponentes obtenidos al ajustar los eventos de lluvia extremos a la función de distribución empírica de probabilidad. La coincidencia de ambos resultados permite concluir que la precipitación en las localidades analizadas, es un proceso críticamente autoorganizado, independientemente de la resolución temporal de los datos que se analicen y de la dinámica local de la lluvia.

A pesar de lo anterior, los valores de los exponentes, y por consiguiente de q_D , varían para cada localidad en función de la resolución temporal de las series de datos de lluvia analizadas, siendo patente que el uso de datos diarios produce una pérdida de información como consecuencia del agrupamiento de los eventos de lluvia. Esta pérdida de información es prácticamente inexistente en las zonas caracterizadas por precipitación de tipo convectivo (en este caso, Almería).

La presencia de agrupación temporal en la secuencia de eventos de lluvia se ha estudiado mediante dos métodos bastante frecuentes. Al aplicar dichos métodos a los datos horarios de lluvia, se ha podido relacionar la naturaleza de la precipitación en cada localidad y se han detectado las periodicidades más importantes en función de esa naturaleza. El exponente fractal obtenido y el correspondiente régimen de escala, que se prolonga hasta casi un mes, son datos que se desprenden de los periodogramas

calculados y presentan valores similares a los que autores como Fraedrich y Larnder (1993) encontraron para otras zonas de Europa. El cálculo de los periodogramas a partir de los datos de lluvia diaria permite comprobar las periodicidades más relevantes en cada localidad. Aunque se pierde cierta información al respecto, queda claro que la principal periodicidad que se observa para ambas resoluciones de lluvia es la anual, lo que pone de manifiesto la importancia del uso de series de datos de precipitaciones máximas anuales para todos aquellos métodos de cálculo en ingeniería que requieren el uso de datos de lluvia extrema.

4.2 El análisis multifractal como herramienta para validar un modelo de lluvia

Es de sobra conocida la importancia que tienen los registros históricos de precipitación para cualquier estudio hidrológico. Las resoluciones temporales más altas son siempre las deseables a la hora de hacer cualquier análisis de riesgo o de aplicar algún modelo hidrológico. Por otra parte, los resultados de cualquier estudio serán siempre mejores si se parte de series de datos reales de gran longitud. Sin embargo, a pesar de todo lo anterior, la realidad es bastante diferente. La resolución de los registros históricos de lluvia más antiguos (normalmente principios del siglo XX) suele ser diaria, mientras que los registros horarios de precipitación, además de no estar ampliamente disponibles, suelen ser bastante recientes. Para subsanar este problema, puede recurrirse a la obtención de series de datos de precipitación mediante la aplicación de modelos climáticos a escala regional o local. Una forma de comprobar la bondad de los datos que suministra cualquier modelo de lluvia, puede ser a través del análisis multifractal de los mismos (e.g. Calenda *et al.*, 2005).

Para ello se comparan en esta sección los resultados de la aplicación de la metodología multifractal a varias series de datos de lluvia en las mismas localidades de la sección 4.1.: Almería, Córdoba, Huelva y Málaga. Para cada una de estas cuatro estaciones se utilizan tres series de datos:

- a. La serie completa de datos reales de precipitación con resolución temporal horaria. La longitud de estas series abarca desde 1980 hasta 2004 en Huelva, Málaga y Almería, y desde 1982 hasta 2003 en Córdoba.
- b. La serie compuesta por los cuatro últimos años de registros de datos de lluvia horaria de la serie de datos completa.
- c. La serie de datos sintéticos de precipitación horaria para el período 2002-2006, obtenidos mediante la aplicación del modelo climático regional PROMES (Pronóstico a Mesoescala).

Se ha introducido el análisis de series reales de lluvia con una longitud similar a las series de datos sintéticos, con objeto de analizar la posible influencia de la longitud de las series en los resultados.

El primer paso de todo este análisis consiste en analizar las series de datos de lluvia reales desde el punto de vista multifractal, para comparar después los resultados con los que se obtengan de aplicar la misma metodología a las series sintéticas de lluvia. Concluido este análisis, se comprueba el grado de agrupación temporal de los datos

de precipitación sintéticos y su adecuación o no a los resultados obtenidos para las series completas de datos reales de lluvia. Se trata pues de comprobar el posible uso de la teoría multifractal para validar datos de lluvia, no se pretende poner en tela de juicio la bondad del modelo PROMES.

4.2.1 El modelo PROMES

El modelo PROMES (acrónimo de Pronóstico a Mesoescala) se desarrolló en su primera versión en el año 1993 por el grupo de Modelización para el Medio Ambiente y el Clima (MOMAC) liderado por el catedrático Manuel de Castro y actualmente en la Universidad de Castilla la Mancha.

El modelo PROMES fue el primer modelo matemático de simulación de la atmósfera desarrollado íntegramente por un grupo de investigadores en España. La versión inicial del modelo se ha ido continuamente mejorando, y actualmente puede compararse con cualquiera de los modelos numéricos de la atmósfera a mesoescala que se utilizan en los Sistema Meteorológicos europeos.

Se trata de un modelo atmosférico de ecuaciones primitivas que utiliza la aproximación hidrostática para expresar la ecuación del movimiento vertical, en el que se aplica de forma completa la ecuación de continuidad y que se circunscribe a un área limitada de la atmósfera.

Como es un modelo de área limitada, el dominio de aplicación no abarca todo el globo terrestre sino una porción de éste centrada sobre la Península Ibérica. A lo largo de la simulación es preciso aportarle continuamente los valores de las variables atmosféricas en los contornos laterales del dominio del modelo. Estos valores proceden de la salida del modelo global AVN (NCEP-NOAA). A este proceso se le conoce por el nombre técnico de anidamiento (del inglés *nesting*), pues realmente consiste en incrustar la malla del modelo regional, compuesta por celdillas de pequeño tamaño (15×15 km en este caso), en la malla del modelo global (80×80 km). El método que se sigue para introducir los valores de contorno en los modelos de área limitada tiene una gran importancia, pues debe permitir que las ondas o perturbaciones atmosféricas entrantes sean transmitidas al interior del dominio del modelo regional con una mínima distorsión en su fase y amplitud, y también garantizar que las ondas salientes no sean reflejadas hacia atrás.

Por otra parte, la integración numérica de las ecuaciones de un modelo atmosférico necesita la especificación de los valores iniciales de las variables de pronóstico. En el

caso de los modelos regionales, los valores iniciales se determinan mediante una interpolación espacial de los correspondientes al modelo AVN de escala global.

Como se ha comentado anteriormente, los datos horarios de precipitación suministrados por el grupo MOMAC para las localidades de interés en esta tesis, comprenden los años 2002 a 2006, ambos inclusive casi en su totalidad. Aunque la resolución de estos datos es mayor de 0,1 mm, todos los valores inferiores a esta última cantidad se han tomado como valor nulo de lluvia (0 mm) con objeto de trabajar con el mismo valor mínimo registrado en las series reales de lluvia.

4.2.2 Eventos de precipitación

Mediante la aplicación de la ecuación (4.1) y siendo el valor de Δt de 1 hora para las tres series de datos analizadas, se han obtenido todos los eventos de precipitación registrados. La tabla 4.4 muestra algunas de las características de estos eventos de precipitación. Tal y como era de esperar, el número de eventos de lluvia registrados es bastante mayor para las series de datos reales de precipitación, ya que son series de mayor longitud, y ello aumenta la probabilidad de que se registren eventos de lluvia para una misma localidad. Si se comparan las series de datos de longitud similar (sintéticas y reales de cuatro años), el número de eventos es más próximo, aunque solo en Málaga es prácticamente similar. En cuanto a la máxima cantidad de precipitación registrada de forma ininterrumpida (evento máximo en la tabla 4.4), los mayores resultados se obtienen nuevamente para las series más largas de datos reales de lluvia. Para las dos series restantes, los valores son más próximos. Es característico el caso de la serie de datos sintéticos de Huelva, con la que se obtiene una cantidad máxima de lluvia más cercana a la obtenida con la serie completa de datos reales que la que se obtiene con el mismo tipo de datos pero con la serie más corta.

Quizá deba ser el tamaño medio de evento, la característica fundamental a la hora de comparar los resultados obtenidos para las tres series. Para todas las localidades, excepto para Huelva, los valores de este parámetro son muy similares. Para la citada localidad, sin embargo, el tamaño medio de evento es algo superior cuando se trata de la serie sintética de precipitación. Es también esta última localidad la que presenta valores más próximos del coeficiente de variación del tamaño de evento de lluvia para sus tres series de datos. Se detectan mayores diferencias de este coeficiente entre las series de datos de las tres restantes localidades.

En cuanto a la cantidad total de precipitación registrada en cada una de las series, los mayores valores se presentan en las series de mayor longitud, por la misma razón que se expuso para el número de eventos. Para las series de igual longitud, los totales de precipitación son similares en Almería, Huelva y Málaga, siendo Córdoba la localidad en la que se obtiene una mayor diferencia en este valor.

Tabla 4.4. Características del tamaño de evento de lluvia

Lugar	Datos	Número de eventos	Evento máximo (mm)	Evento medio (mm)	Coefficiente de variación	Precipitación total (mm)
Almería	Reales (24 años)	1.348	94,0	3,38	2,17	4.539,2
	Reales (4 años)	249	52,5	3,01	2,01	749,5
	Sintéticos	168	39,1	3,31	1,64	566,1
Córdoba	Reales (24 años)	3.049	140,0	4,27	1,98	13.006,9
	Reales (4 años)	616	86,9	4,25	1,89	2.618,0
	Sintéticos	386	56,7	4,50	1,65	1.737,0
Huelva	Reales (24 años)	2.984	160,0	4,22	2,14	12.582,1
	Reales (4 años)	581	101,0	4,51	2,12	2.620,3
	Sintéticos	337	128,1	7,64	1,90	2.574,7
Málaga	Reales (24 años)	2.114	171,2	5,05	2,20	10.675,7
	Reales (4 años)	353	83,8	5,26	1,99	1.856,9
	Sintéticos	322	62,2	5,94	1,57	1.912,7

Observando la tendencia en el número de eventos obtenidos, Almería es la localidad para la que se detecta un menor número, seguida de Málaga, Huelva y Córdoba. En cuanto a la cantidad de precipitación total, Almería es la localidad que registra un menor valor para las tres series de datos, seguida de Málaga, Córdoba y Huelva para la serie de datos reales más corta, de Málaga, Huelva y Córdoba, para la serie completa de datos reales, y de Málaga, Córdoba y Huelva para la serie de datos sintéticos. Los valores de número de eventos y de cantidad total de precipitación, deben tomarse con cautela a la hora de sacar cualquier conclusión de la bondad del modelo, pues debe considerarse que los años de datos no coinciden en su totalidad ni para las tres series en cada localidad, ni entre localidades cuando se trata de datos reales de lluvia.

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

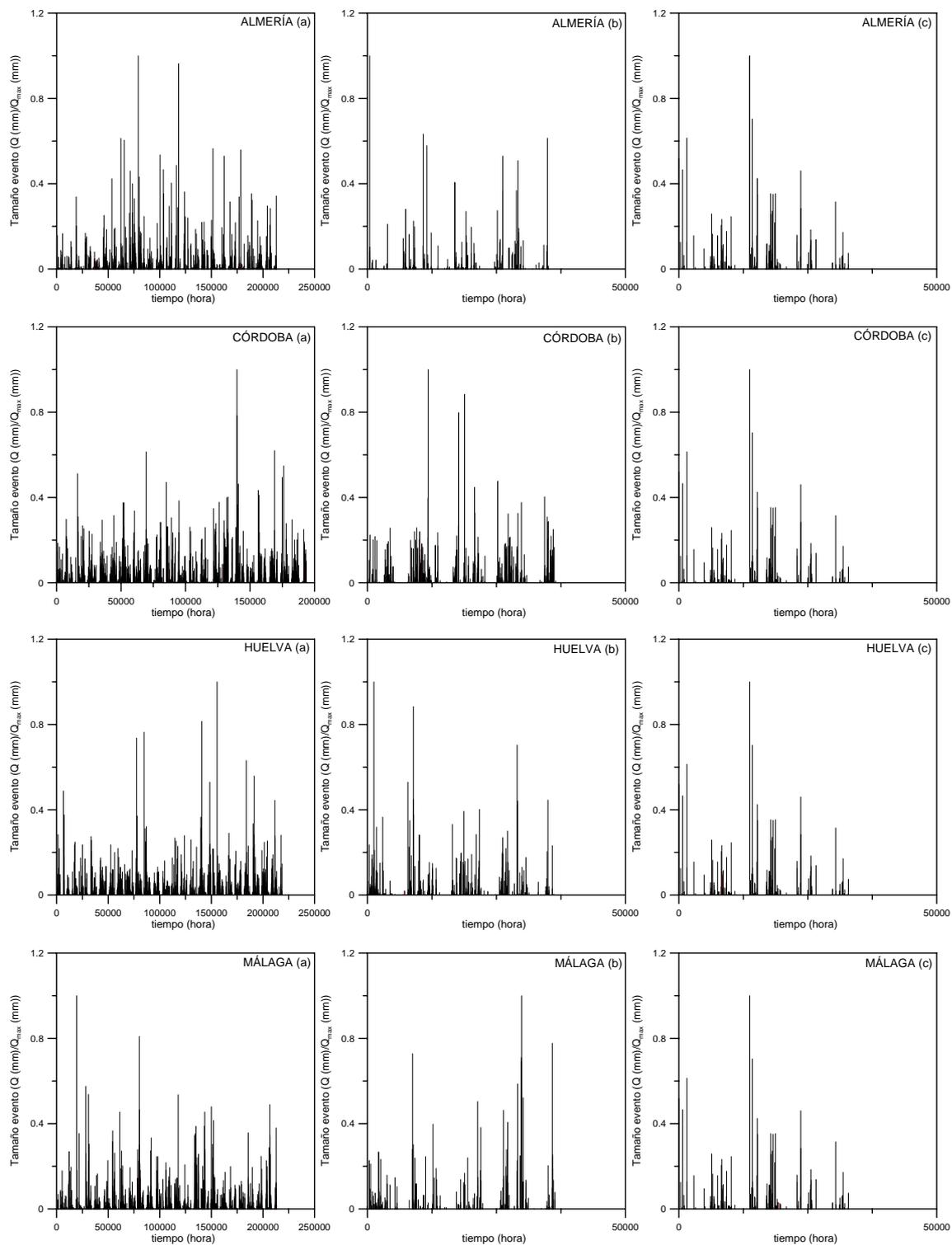


Figura 4.12. Distribución en el tiempo del tamaño de evento de lluvia normalizado

La figura 4.12 representa la distribución temporal del tamaño de los eventos detectados para cada localidad y tipo de serie de datos ((a) serie real más larga, (b) serie real de menor duración, y (c) serie de datos sintéticos). El tamaño de evento aparece normalizado por el valor máximo de evento para cada caso, con objeto de poder comparar los resultados para un mismo lugar. A simple vista se observa que los mayores valores de tamaño normalizado de evento son similares para cada estación.

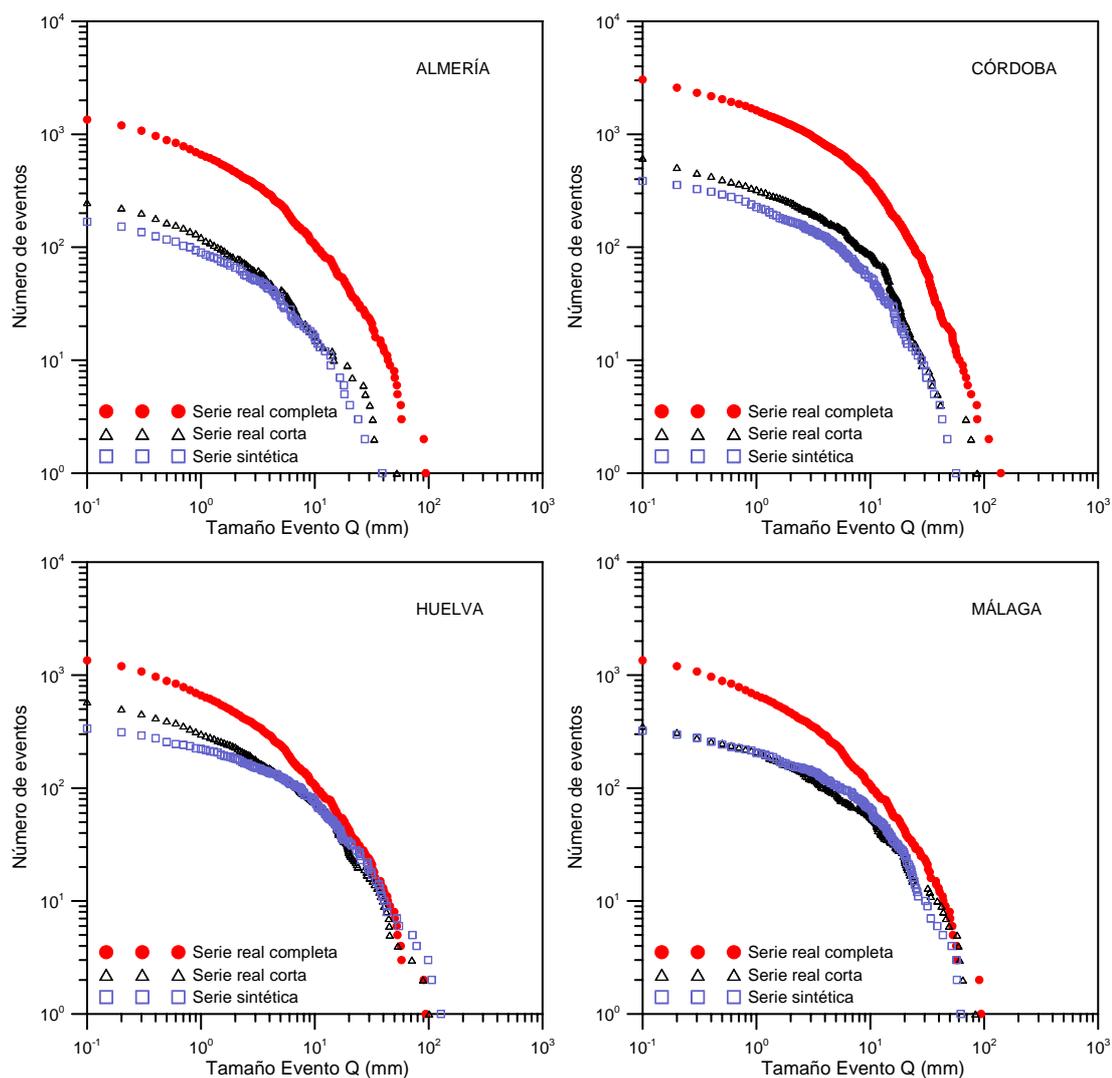


Figura 4.13. Distribución del número de eventos de lluvia de un determinado tamaño

La figura 4.13 permite obtener más información, y muestra para cada localidad y serie de datos analizada, el número de eventos de precipitación de un tamaño determinado (mm). La curva de puntos rojos hace referencia a los eventos detectados en la serie de datos reales más larga, la curva de triángulos negros representa los eventos en la serie de datos reales más corta, y por último, los cuadrados azules

marcan los eventos obtenidos para las series de datos sintéticos de precipitación. Para todas las localidades, la representación de eventos para las series más cortas de datos reales y sintéticos, es similar, sobre todo para los eventos de mayor tamaño. En Huelva, la representación del número de eventos de mayor tamaño es prácticamente similar con todas las series de datos. Esta tendencia se observa también en Málaga, aunque con menor grado de coincidencia de la curva obtenida con la serie más larga de datos reales. Para Almería y Córdoba, no se observa tal coincidencia, aunque se aprecia un elevado paralelismo entre la representación obtenida con la serie más larga de datos reales, y las dos series restantes.

Tabla 4.5. Características de la duración del evento de lluvia

Lugar	Datos	Duración máxima (h)	Duración media (h)	Coefficiente de variación	Total horas de lluvia (h)
Almería	Reales (24 años)	23	2,72	0,96	3.671
	Reales (4 años)	18	2,75	0,95	685
	Sintéticos	24	4,70	0,89	789
Córdoba	Reales (24 años)	34	3,09	1,02	9.428
	Reales (4 años)	28	3,16	1,02	1.947
	Sintéticos	46	5,16	1,01	1.990
Huelva	Reales (24 años)	28	2,74	0,94	8.180
	Reales (4 años)	28	2,86	1,00	1.661
	Sintéticos	59	5,66	1,27	1.906
Málaga	Reales (24 años)	39	3,25	1,05	6.860
	Reales (4 años)	22	3,28	0,98	1.157
	Sintéticos	47	5,39	1,07	1.734

La tabla 4.5 muestra los datos referentes a la duración de los eventos de lluvia obtenidos para cada localidad y serie de datos. Según esta tabla, la duración máxima de un evento de lluvia calculado con datos reales, es mayor para las series de datos más largas que para las más cortas, salvo en Huelva donde los resultados son coincidentes.

La duración máxima de eventos de lluvia calculados con series sintéticas se aproxima al valor máximo de esta variable al trabajar con la serie más larga de datos reales en el caso de Almería. Para el resto de localidades, el valor obtenido con datos sintéticos es bastante más elevado que el obtenido con las series completas de datos reales de lluvia. La duración media de los eventos de lluvia es similar para las series de datos reales en todas las localidades, mientras que nuevamente es superior al trabajar con datos sintéticos de precipitación. Sin embargo, los coeficientes de variación obtenidos son similares en cada localidad, independientemente de la serie de datos con la que se haya calculado la duración de los eventos de lluvia.

Haciendo referencia ahora al número de horas con lluvia, este es superior en las series de datos más largas (reales). En las series de igual duración (reales y sintéticas), los valores son similares para todas las localidades, notándose más diferencia en Huelva y Málaga.

La figura 4.14 representa la distribución temporal de la duración de los eventos detectados para cada localidad y tipo de serie de datos ((a) serie real más larga, (b) serie real de menor duración, y (c) serie de datos sintéticos). La duración del evento, al igual que en la figura 4.12, aparece normalizada por el valor máximo de duración de evento para cada caso. Tal y como sucedía con el tamaño normalizado de evento, se observa que las duraciones máximas de los eventos son del mismo orden de magnitud para cada localidad y serie de datos analizada.

La figura 4.15 ofrece más información, y muestra para cada localidad, la representación del número de eventos de una determinada duración en función de la serie de datos analizada. Para los resultados de las series de datos reales, la curva que representa a la serie de mayor longitud siempre se sitúa por encima de la que representa a la serie más corta, aproximándose ambas a medida que aumenta la duración de los eventos, siendo más patente este comportamiento en el caso de Almería. En la curva que representa la duración de los eventos obtenidos con datos sintéticos de precipitación, puede verse que para duraciones pequeñas dicha curva es similar a la que representa a la serie de datos reales más corta, acercándose a la curva que muestra los resultados de la serie real más larga a medida que aumenta la duración de los eventos de lluvia. En el caso de Huelva, la curva representante de datos sintéticos llega incluso a cruzar a la perteneciente a la serie real de mayor longitud.

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

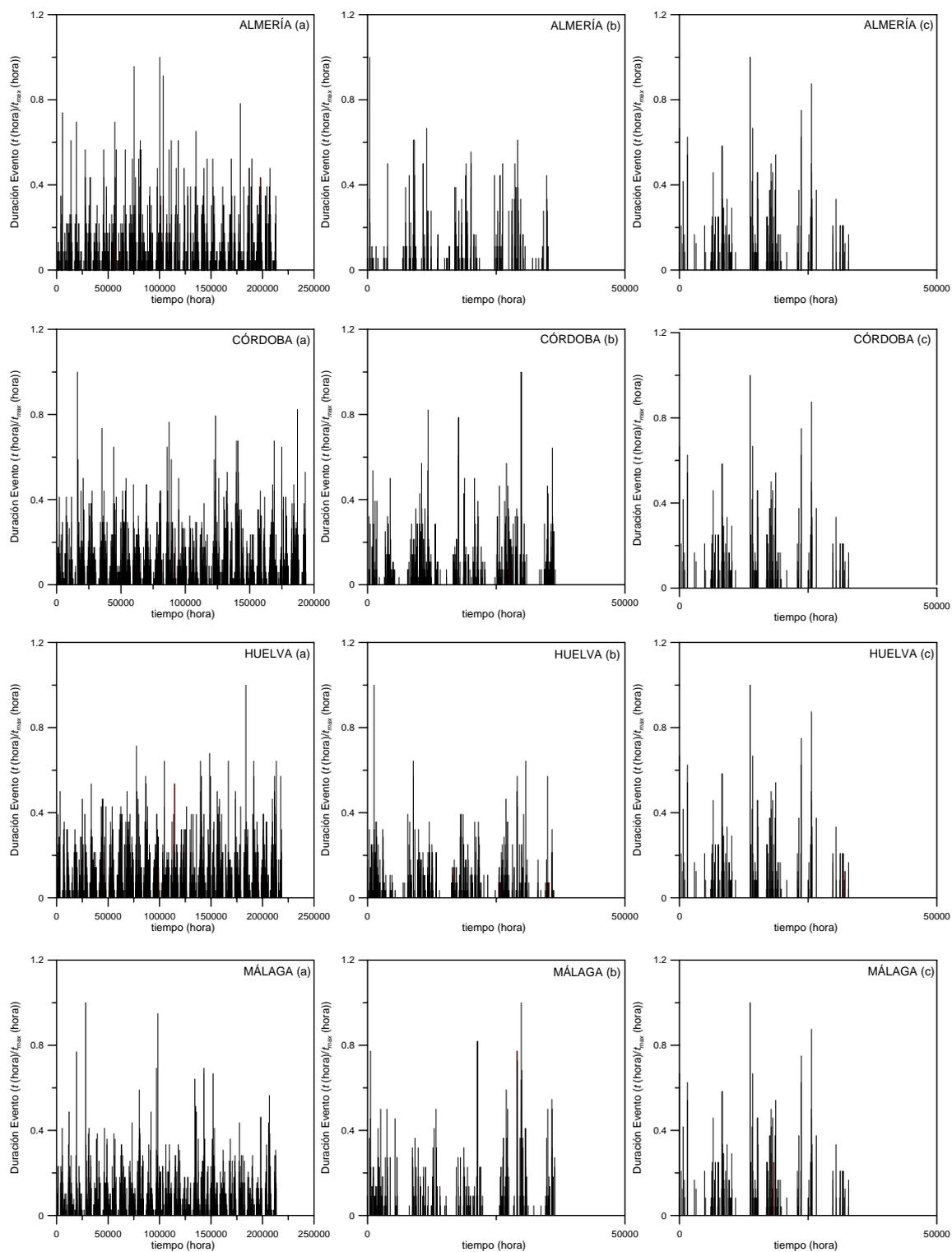


Figura 4.14. Distribución en el tiempo de la duración normalizada del evento de lluvia

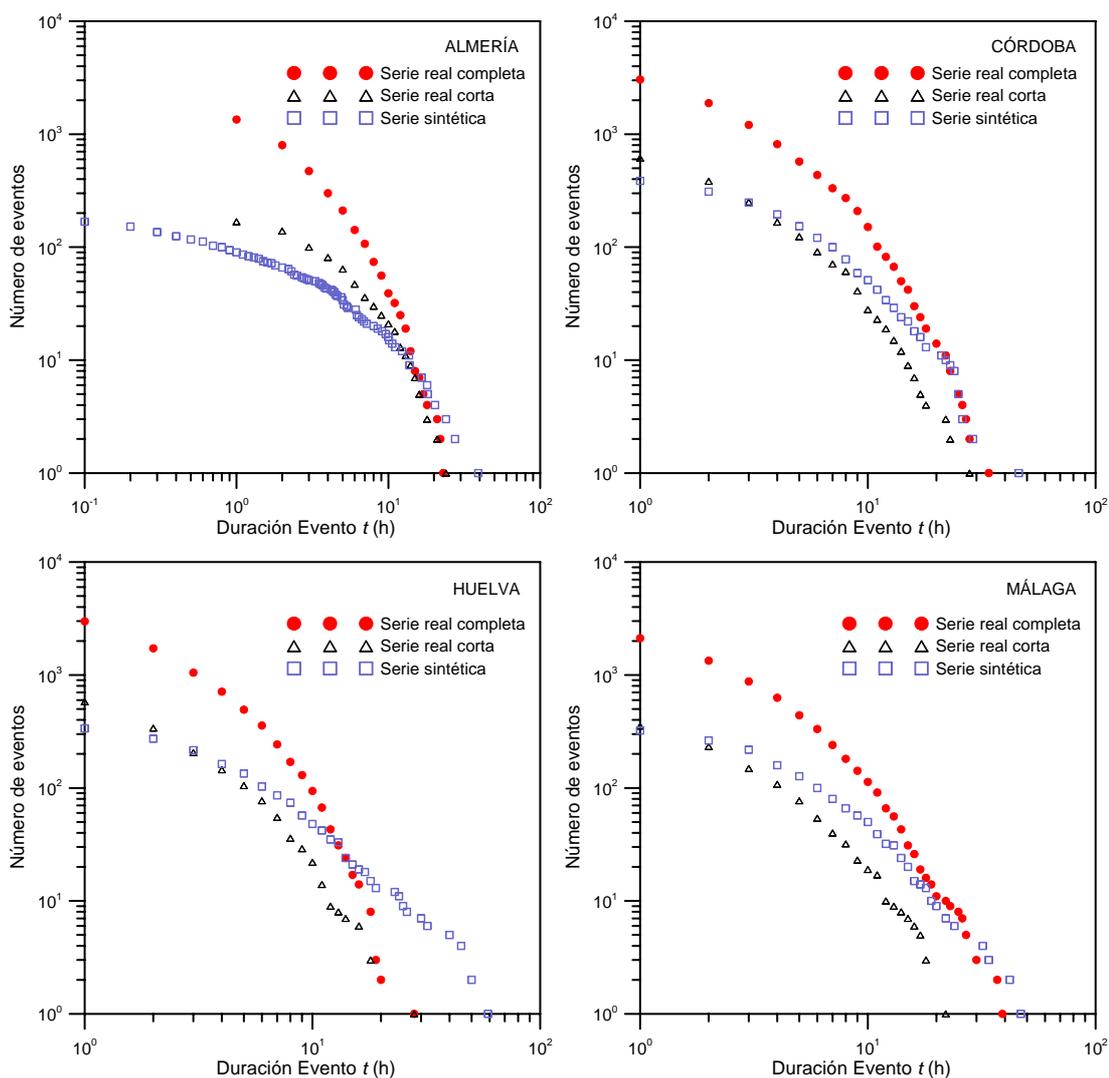


Figura 4.15. Distribución del número de eventos de lluvia de una determinada duración

Tal y como se indicó al describir el significado de la ecuación 4.1, los intervalos continuos sin lluvia en una serie temporal se consideran eventos secos. Según esa definición, se han calculado los eventos secos en cada una de las series temporales para cada localidad, contabilizándose la duración de cada uno de ellos. La tabla 4.6 recopila algunas de las características de dichos eventos secos para cada localidad y serie de datos analizada. El período máximo sin lluvia (evento seco máximo en la citada tabla) tiene prácticamente la misma duración para todas las series de datos de Almería. Para Córdoba y Málaga es coincidente para las series de datos reales, siendo superior en Córdoba para la serie sintética, y algo inferior en Málaga para la misma serie. En Huelva, los valores del periodo máximo sin lluvia son próximos para

las series sintética y real de mayor longitud, obteniéndose un valor más bajo para la serie real más corta.

Tabla 4.6. Características de la duración de los eventos secos

Lugar	Datos	Evento seco máximo (h)	Evento seco medio (h)	Coefficiente de Variación	Total horas secas (h)
Almería	Reales (24 años)	3.061	155,4	2,31	209.436
	Reales (4 años)	2.951	138,2	2,48	34.414
	Sintéticos	3.181	191,0	2,32	32.091
Córdoba	Reales (24 años)	2.555	60,5	3,02	184.309
	Reales (4 años)	2.555	56,0	3,36	34.518
	Sintéticos	3.432	89,2	3,19	34.443
Huelva	Reales (24 años)	3.267	70,6	3,30	210.540
	Reales (4 años)	2.319	59,3	3,15	34.467
	Sintéticos	3.691	100,8	3,14	33.856
Málaga	Reales (24 años)	3.344	97,6	2,78	206.366
	Reales (4 años)	3.344	99,7	2,89	35.189
	Sintéticos	2.462	107,8	2,61	34.699

La duración del período medio sin lluvia (evento seco medio en la tabla 4.6) es del mismo orden de magnitud para las tres series estudiadas en Málaga. Para las tres restantes localidades, se observa esa misma similitud para las series reales, mientras que al trabajar con datos sintéticos se obtienen valores algo superiores en todas ellas. Los coeficientes de variación, sin embargo, sí son similares para las tres series en cada estación. Las series sintéticas reproducen bastante fielmente el número total de horas sin lluvia, obteniéndose valores similares a los que caracterizan a las series de datos reales de corta duración. La cantidad de horas secas es evidentemente superior para las series reales de mayor longitud.

La figura 4.16 permite comprobar como el número de períodos secos de una determinada duración se distribuye de la misma forma para las dos series de igual duración (real y sintética) en todas las localidades. La forma de la distribución es similar para los eventos secos obtenidos con las series reales más largas, aunque el número de eventos es siempre mayor para todas las duraciones. Las tres curvas se

aproximan para las duraciones mayores, llegando a ser coincidentes en Almería y casi coincidentes en el resto de localidades.

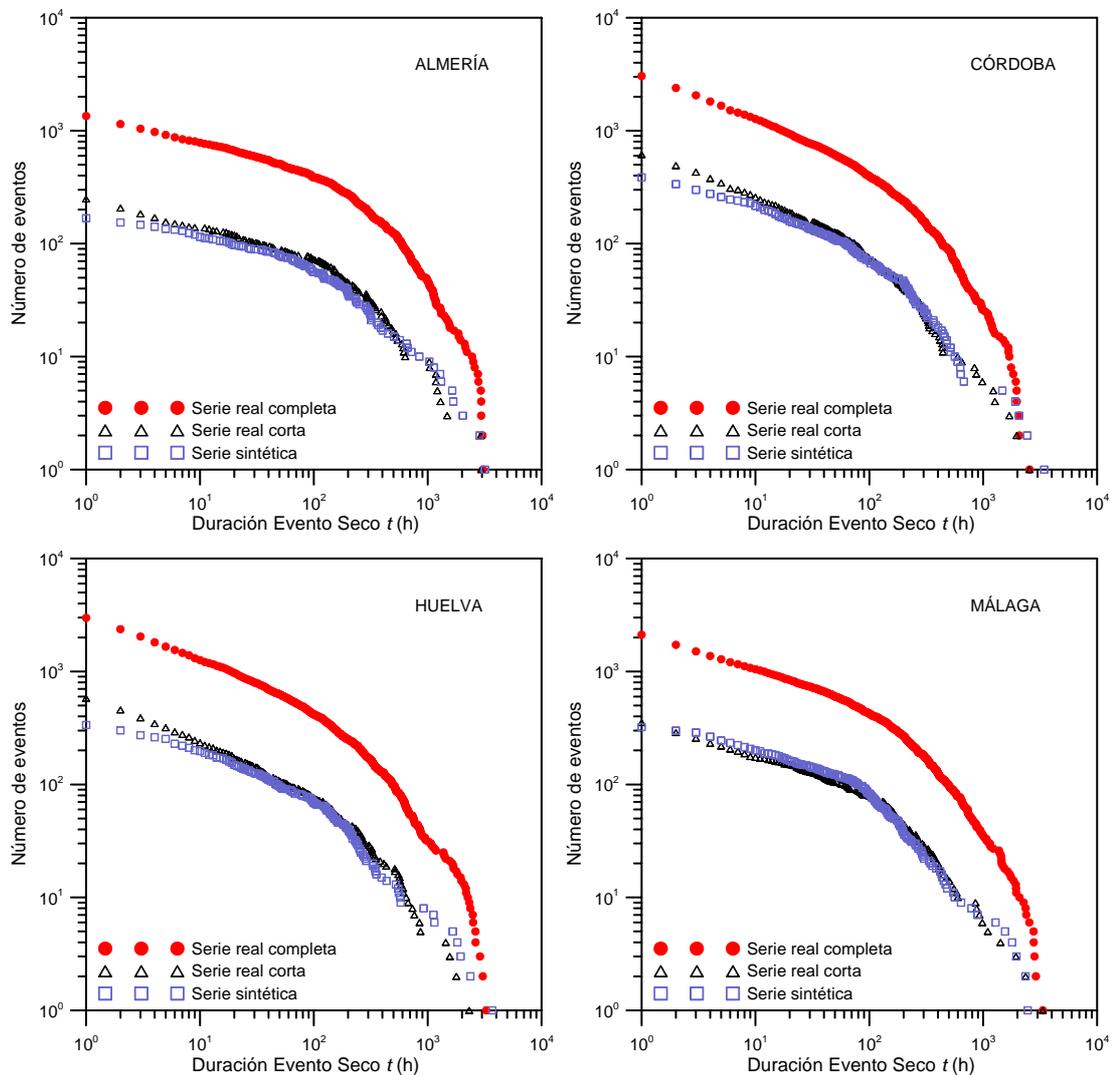


Figura 4.16. Distribución del número de eventos secos de una determinada duración

4.2.3 Ajustes a la función de distribución empírica de probabilidad

Como ya se mencionó en el capítulo de teoría, si el conjunto de eventos que caracteriza a un proceso determinado se puede ajustar siguiendo una ley potencial, puede afirmarse que no existe una escala típica para dichos eventos, sino que prevalece la invarianza de escala. Para las tres series de datos disponibles en cada localidad se ha realizado el ajuste de los eventos extremos a la ecuación (2.26), obteniéndose los resultados que se muestran en la figura 4.17.

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

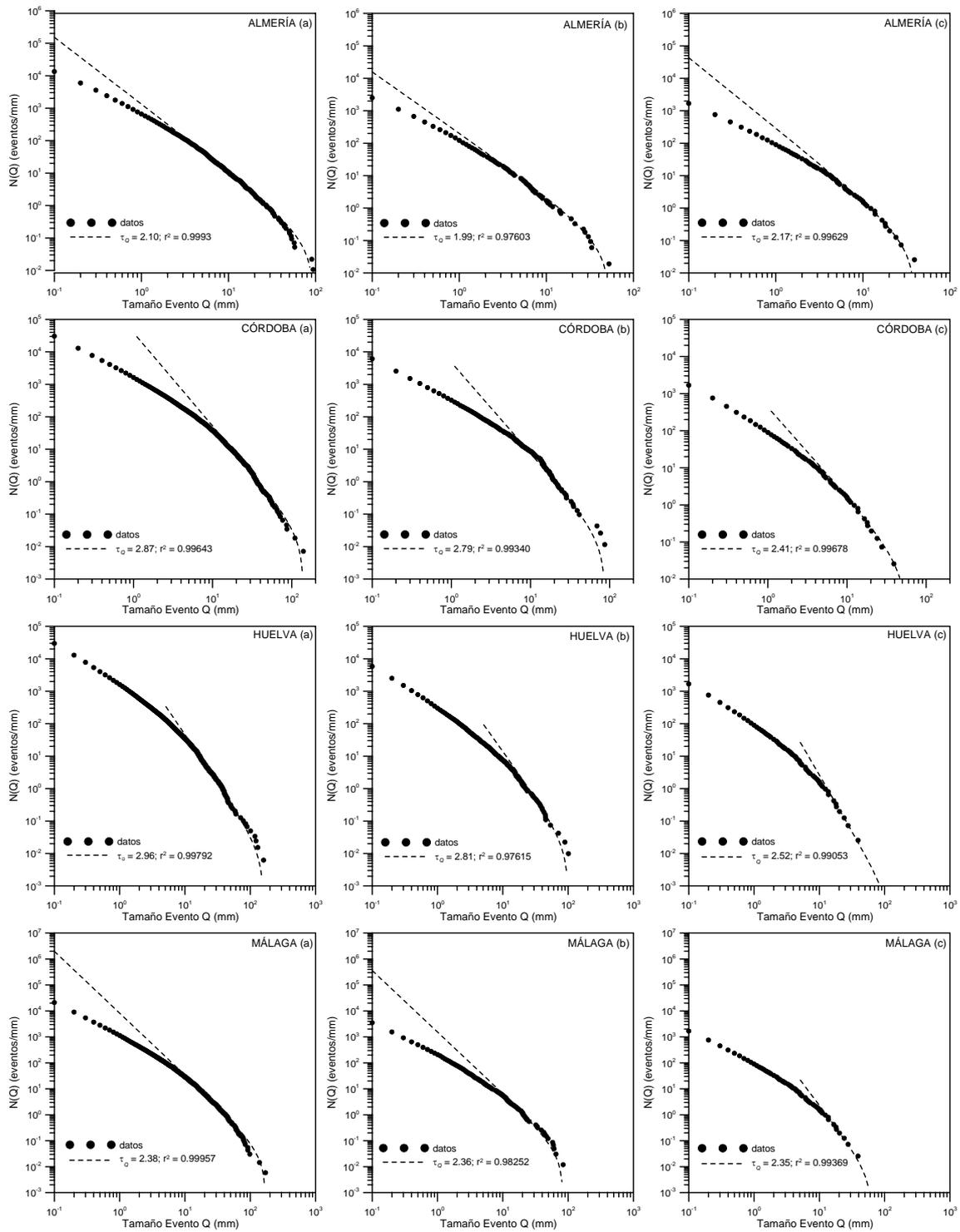


Figura 4.17. Ajustes del número de eventos de lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

Los valores obtenidos para los coeficientes de determinación r^2 , oscilan entre 0,99643 y 0,99957 para los eventos obtenidos con las series completas de datos reales, entre 0,97603 y 0,99340 para las series reales más cortas, y entre 0,99053 y 0,99678 para los datos sintéticos. Todos estos valores pueden considerarse aceptables y representativos de ajustes satisfactorios.

Según los resultados obtenidos para los eventos de las series de datos horarios reales más largas, Huelva y Córdoba son las localidades para que se obtienen los valores más elevados del exponente τ_Q (2,96 y 2,87, respectivamente), cercanos a los que ya obtuvieron otros autores. Almería es la estación en la que τ_Q alcanza el menor valor (2,10), mientras que para Málaga se obtiene un valor intermedio (2,38). Tal y como se ha comentado con anterioridad, los modelos multifractales requieren un valor del exponente τ_Q superior a 2 (e.g. Lovejoy y Mandelbrot, 1985; Tessier *et al.*, 1996), por lo que puede afirmarse que este tipo de modelos puede utilizarse para describir el comportamiento de la lluvia horaria en las localidades seleccionadas.

¿Pero qué sucede si se realizan los mismos ajustes con los eventos obtenidos con las series reales de duración más corta? En la misma figura 4.17, se observa que nuevamente la tendencia de los valores del exponente τ_Q se repite. Para Huelva se obtiene un valor de $\tau_Q = 2,81$, superior al de la localidad que le sigue, Córdoba, con $\tau_Q = 2,79$. Ambos exponentes son mayores que el de Málaga ($\tau_Q = 2,36$), y todos ellos superan al valor correspondiente a Almería ($\tau_Q = 1,99$). Además de conservar la misma tendencia que los exponentes obtenidos a partir de las series reales más largas, sus valores son del mismo orden de magnitud y todos, salvo el obtenido para Almería, son superiores a 2. Este hecho pone de manifiesto que en el caso de trabajar con series de datos horarios reales más cortas, también resulta necesario el uso de un modelo multifractal para describir la precipitación en todas estas localidades. El caso de Almería puede considerarse prácticamente igual a 2, si bien es cierto que tanto para la serie más larga ($\tau_Q = 2,10$) como para la de menor duración ($\tau_Q = 1,99$), los resultados indican que quizá un modelo monofractal es suficiente para describir la lluvia en esta localidad.

La similitud de valores de los exponentes para una misma localidad, usando series de datos reales de la misma resolución temporal pero de diferente longitud, lleva a pensar que el carácter mono o multifractal del proceso de la precipitación, es independiente de la longitud de las series de datos analizadas, ya que la multifractalidad no es una medida estadística de una variable de un proceso, sino una característica del mismo.

De los resultados obtenidos al trabajar con los eventos obtenidos a partir de las series de datos sintéticos de precipitación se observa que los valores de los exponentes para este caso varían desde $\tau_Q = 2,52$ para Huelva, hasta $\tau_Q = 2,17$ para Almería. Córdoba se sitúa detrás de Huelva, con $\tau_Q = 2,41$, seguida de Málaga para la que $\tau_Q = 2,35$. Nuevamente se detecta un orden similar al que se obtuvo para el valor de dichos exponentes al trabajar con datos reales. Para el caso de Almería y Málaga, los valores de los exponentes son muy parecidos a los obtenidos con las series de datos de lluvia reales. Para Huelva y Córdoba, los valores son algo menores. En todos los casos, se supera el valor de 2, necesario para determinar la multifractalidad de un proceso. Podemos concluir por lo tanto, que los datos obtenidos mediante el modelo PROMES reproducen bastante bien la naturaleza multifractal de la precipitación en las localidades estudiadas cuando se detecta mediante el ajuste a la función de distribución empírica de probabilidad.

La duración de los eventos extremos de precipitación y su ajuste a la función hiperbólica de la ecuación (2.26), se muestra en la figura 4.18. Nuevamente y para cada localidad, la letra (a) hace referencia a los datos procedentes de las series reales completas, la (b) a los correspondientes a las series reales de menor duración, y la (c) a las series sintéticas de lluvia. En el eje de abscisas de cada gráfica, se representa la duración de los diferentes eventos de lluvia T_E (horas), mientras que en ordenadas aparece el número de eventos de una determinada duración $N(T_E)$ (eventos/hora). La cola de las distintas representaciones o distribuciones, se ha ajustado a la ecuación (2.26) a partir de un determinado valor de T_E . Todos los ajustes pueden considerarse aceptables según los valores del coeficiente de determinación r^2 , que oscilan entre 0,92370 y 0,99927.

Los valores del exponente τ_E característico de la zona ajustada, son mayores para los datos reales (figura 4.18 (a) y (b)) que para los datos sintéticos (figura 4.18 (c)). Aunque el máximo valor de la duración de un evento de lluvia es mayor para las series sintéticas que para las reales en todas las localidades, el número de eventos de cada duración es mayor cuando se trata de datos observados de lluvia, lo que explicaría la existencia de exponentes mayores para estos últimos datos. Sin embargo, los valores mínimos de T_E a partir de los cuales se ha conseguido el mejor ajuste, son similares para las series de datos de longitud similar, tanto reales como sintéticas (figura 4.18 (b) y (c)).

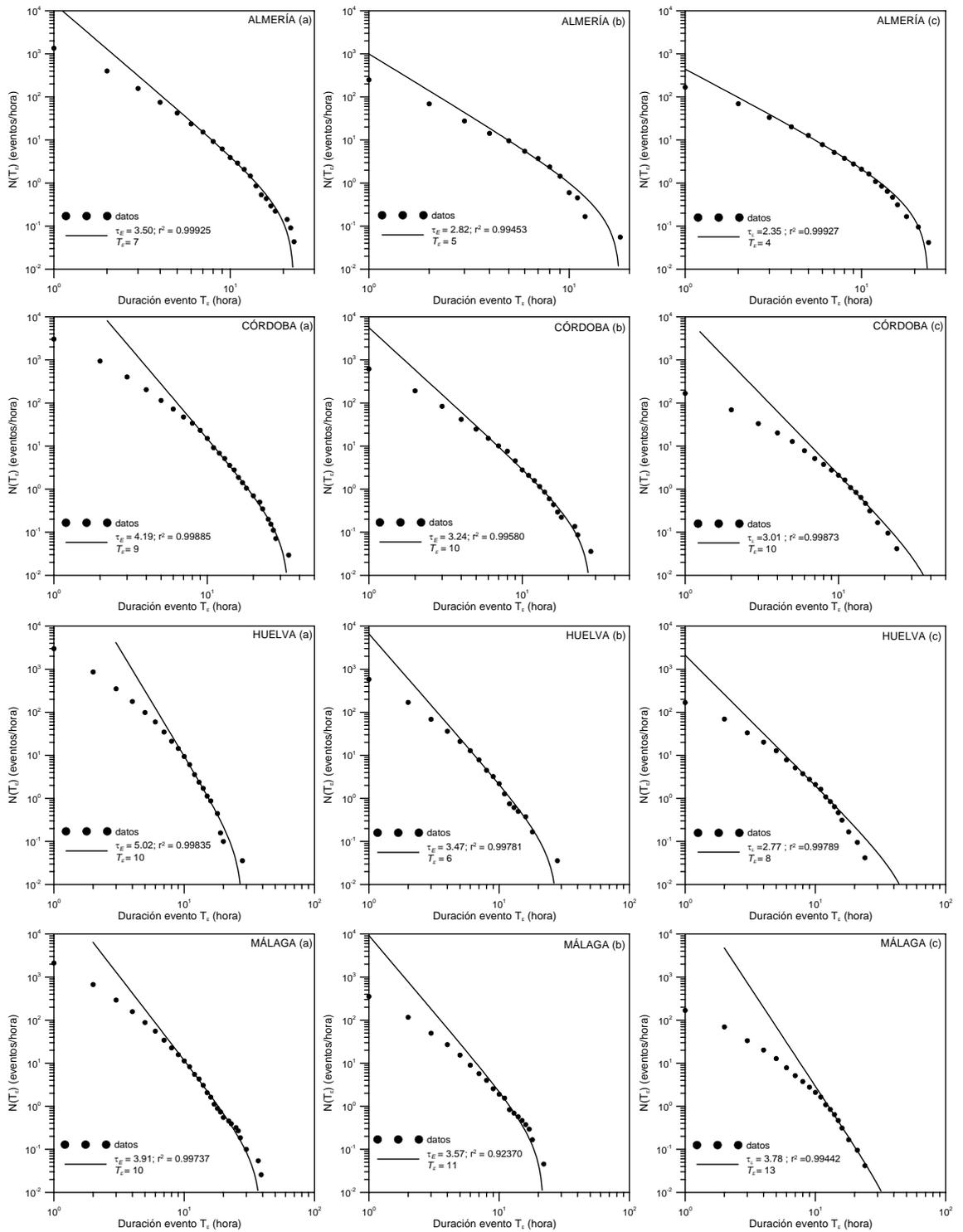


Figura 4.18. Ajustes de la duración de los eventos de lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

La duración de los eventos secos para cada localidad y serie de datos, y el ajuste de sus máximos a la ecuación (2.26), se muestra en la figura 4.19, donde las letras a, b y c hacen referencias a las diferentes series de datos tal y como se explicó para figuras anteriores. El eje de abscisas representa la duración de los períodos sin lluvia, mientras que el de ordenadas recoge el número de eventos secos de cada duración.

Los valores obtenidos para el exponente característico de cada ajuste τ_S son similares para cada tipo de serie de datos en cada localidad (figura 4.19). Del mismo modo, todos los valores del coeficiente de determinación r^2 pueden considerarse representativos de buenos ajustes a la función hiperbólica. Los valores mínimos de T_S a partir de los cuales se ha conseguido el mejor ajuste son también similares para todas las series de datos en cada localidad.

Los valores mínimos de T_E y T_S observados en las figuras 4.18 y 4.19 para todas las localidades y series de datos analizadas, fueron previamente detectados por autores como Veneziano y Iacobellis (2002). Estos autores justifican la existencia de estos valores gracias a un proceso multifractal emergente que explicaría los eventos de lluvia y su variabilidad interna dentro del rango de escalas compatibles con las localidades descritas en este trabajo, y a un modelo externo no fractal que explicaría la renovación de dichos eventos. Cada una de las localidades analizadas puede considerarse representativa de diferentes climas que coexisten en Andalucía. El patrón general de lluvias en esta región está caracterizado por la presencia de frentes principalmente de Octubre a Mayo, y por lluvias de tipo convectivo que suelen estar concentradas a finales de verano y principios de otoño. En general, la precipitación es casi inexistente en los meses de julio y agosto. Por lo tanto, los períodos secos o sin lluvia, están claramente definidos en todas las localidades, lo que concuerda con la obtención de valores similares del exponente τ_S tanto para las series de datos reales de lluvia como para las sintéticas.

Como ya otros autores detectaron (e.g. Pelino *et al.*, 2006), los exponentes obtenidos en los ajustes de las duraciones extremas de los eventos de lluvia (figura 4.18) tienen valores más elevados que los obtenidos para la duraciones de los mayores períodos secos (figura 4.19).

A la vista de estos últimos resultados puede concluirse que los datos procedentes del modelo PROMES siguen el mismo comportamiento que sus equivalentes reales para todas las localidades. Esta similitud es claramente independiente de la longitud de la serie de datos analizada, sobre todo cuando se trabaja con períodos entre lluvias o períodos secos.

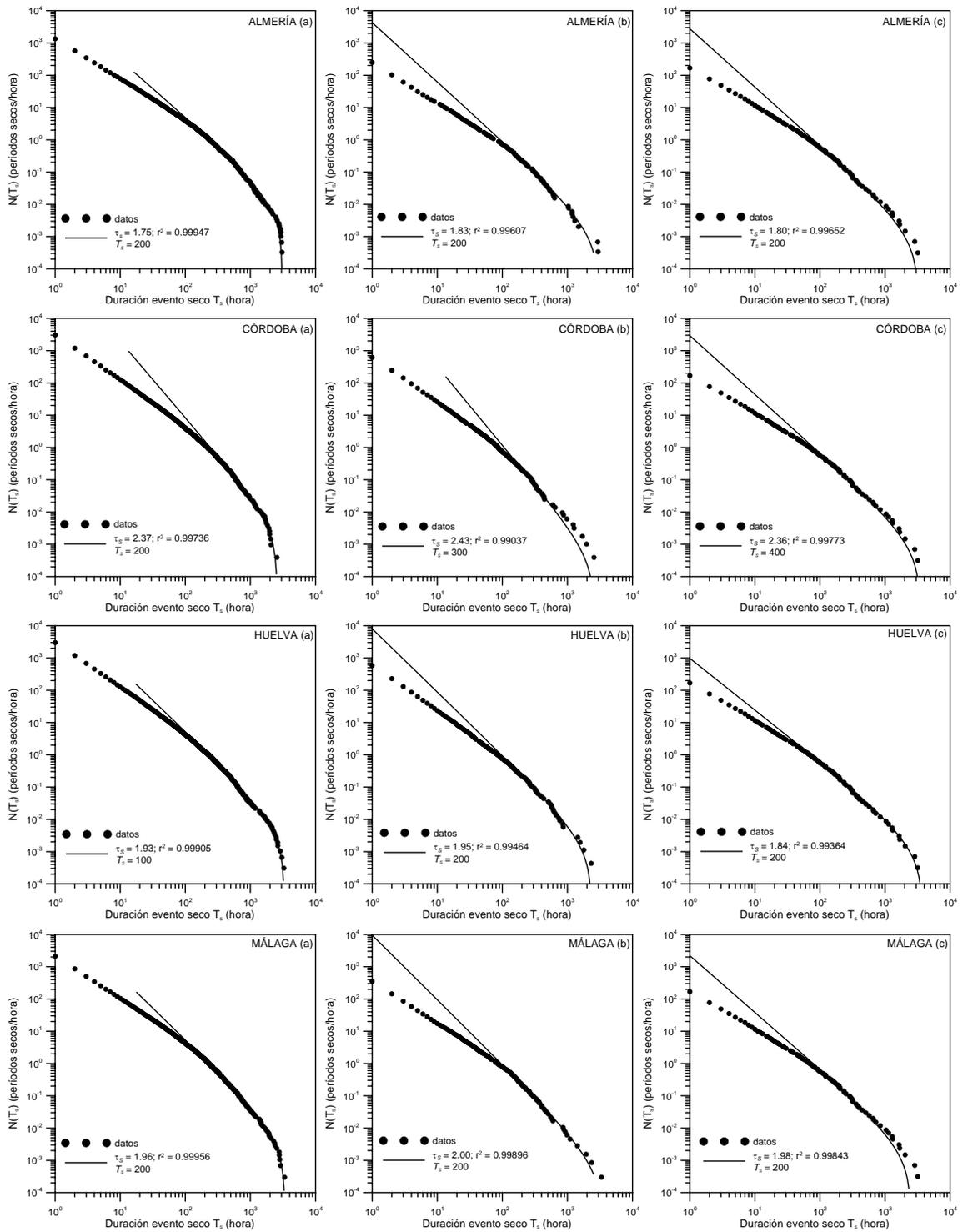


Figura 4.19. Ajustes de la duración de los períodos sin lluvia a la función de distribución empírica de probabilidad: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

4.2.4 Análisis de la función exponente escaladora de momentos

Las figuras 4.20 y 4.21 muestran la representación doblemente logarítmica de diversos momentos de la intensidad de lluvia ε_λ para escalas temporales que oscilan desde 1 hora ($\lambda = 4096$) hasta casi 6 meses ($\lambda = 1$), frente a la razón de escala λ , para Almería y Córdoba (figura 4.20), y para Huelva y Málaga (figura 4.21). Para cada localidad aparecen tres gráficas: la primera de ellas (a) muestra los momentos calculados con la serie completa de datos reales de lluvia, la segunda (b) representa los mismos resultados pero procedentes de la serie de datos reales de menor longitud, y la última (c) recoge los momentos calculados a partir de los datos sintéticos de precipitación horaria. En cada una de estas tres partes (a, b y c), la gráfica superior representa los momentos de orden mayor que 1 y la inferior los momentos de órdenes inferiores a la unidad. Como ya se comentó en el apartado 4.1.3., en el cálculo de momentos pueden detectarse ciertas irregularidades relacionadas con las lluvias extremas (tanto máximas como mínimas), que provocan un cierto grado de incertidumbre en dicho cálculo. Por este motivo se calcula un amplio rango de momentos para todas las localidades y series de datos analizadas.

En ambas figuras (4.20 y 4.21), puede verse como ha sido posible ajustar líneas rectas para los diversos valores de los momentos y de λ . Estas líneas rectas muestran un comportamiento de escala para los momentos calculados que oscila desde 1 hora hasta 42 días en Almería, y desde 1 hora hasta 21 días en Córdoba, Huelva y Málaga. Este comportamiento escalado aparece tanto para las series de datos reales como para las sintéticas. La ruptura en el régimen de escala a los 21 y 42 días en función de la localidad, se relaciona con el concepto de máximo sinóptico ya comentado con anterioridad (e.g. Kolesnikov y Monin, 1965; Pandey *et al.*, 1998). Otros autores encontraron valores similares para este máximo sinóptico, comprendidos entre 16 días y un mes.

La estimación de los momentos de mayor orden está dominada por las observaciones más elevadas y es altamente variable, mientras que las intensidades de lluvia muy bajas no se suelen estar representadas correctamente debido a la resolución del aparato de medida (en este caso 0,1 mm tanto para datos reales como sintéticos). Estas influencias se aprecian claramente cuando se comparan los resultados obtenidos con las series reales de datos y con las series sintéticas.

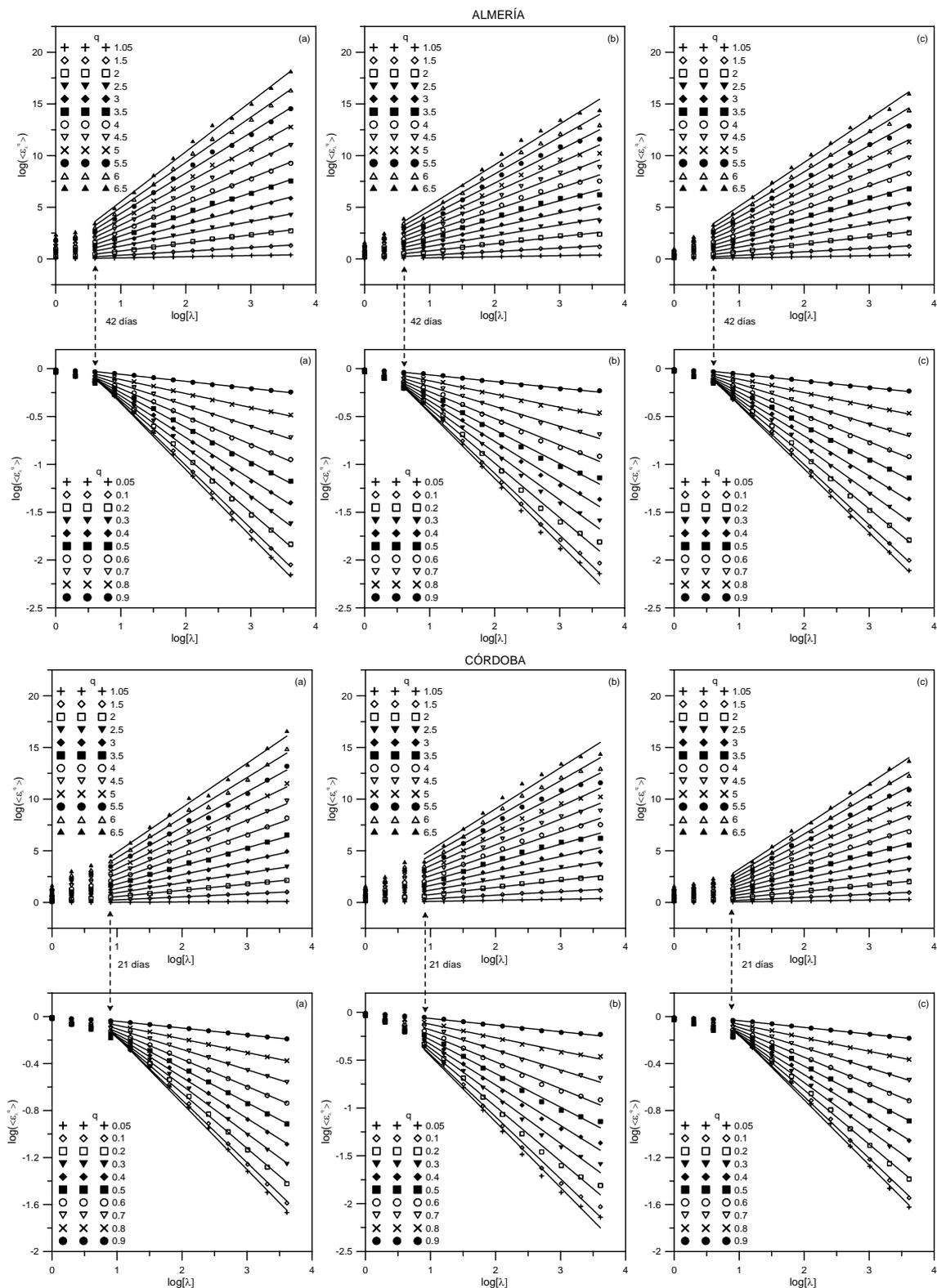


Figura 4.20. Curvas de momentos para Almería y Córdoba: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

Los momentos de mayor orden obtenidos con datos de lluvia sintéticos y con las series reales más cortas (Figuras 4.20 y 4.21, (b) y (c)) se desvían más respecto de las líneas rectas que los obtenidos con las series reales completas de precipitación (Figuras 4.20 y 4.21, (a)). Una explicación para este hecho puede residir en que las series de datos más cortas (reales y sintéticas) tienen menos eventos de gran magnitud en comparación con las series de datos reales de mayor longitud. Sin embargo, no aparecen diferencias cuando se comparan los ajustes de los momentos menores que la unidad, ya que todas las series tienen la misma resolución (0,1 mm). A pesar de estas diferencias y desviaciones, el rango de comportamiento de escala o máximo sinóptico para cada localidad, es independiente del tipo de datos de lluvia utilizados (reales y sintéticos) y de la longitud de las series analizadas.

La figura 4.22 muestra la representación de la función exponente escaladora de momentos $K(q)$ para todas las localidades, y para las series reales completas (a), reales de menor duración (b) y para las series de datos sintéticos (c). Dicha función describe el escalado de los momentos de las series de datos para las escalas detectadas, que oscilan entre 1 hora y 42 días para Almería, y entre 1 hora y 21 días para el resto de localidades. En el eje de abscisas se representa el valor de los momentos q , mientras que en ordenadas aparece el valor de la función $K(q)$, obtenido como la pendiente de las líneas rectas ajustadas en las curvas de momentos (figuras 4.20 y 4.21).

Las formas convexas en la representación de esta función indican la naturaleza multifractal del proceso analizado. Esta forma se aprecia claramente en las funciones $K(q)$ representativas de las series de datos reales en cada localidad (Figura 4.22 (a) y (b)), siendo más evidente a medida que las series aumentan en longitud (figura 4.22 (a)). Esta forma convexa es prácticamente inapreciable al trabajar con datos sintéticos (figura 4.22 (c)), donde el cambio en los valores de las pendientes (γ) de las zonas de $K(q)$ casi no se distingue en comparación con las series de datos reales de la misma longitud. Por lo tanto, los datos generados por el modelo PROMES no reproducen el comportamiento multifractal de la lluvia. Esto sugiere que la forma de la función $K(q)$, a diferencia de otros métodos, es un indicador muy preciso a la hora de analizar el comportamiento multifractal de un conjunto de datos.

Para todas las gráficas que representan datos reales en la figura 4.22 puede diferenciarse un comportamiento lineal para valores de $q > q_D$, siendo q_D el momento crítico, y adoptando diferentes valores para cada localidad. Para ambas series de datos reales los valores de q_D son muy parecidos, lo que induce a pensar que la longitud de la serie de datos no influye en el valor obtenido para el momento crítico.

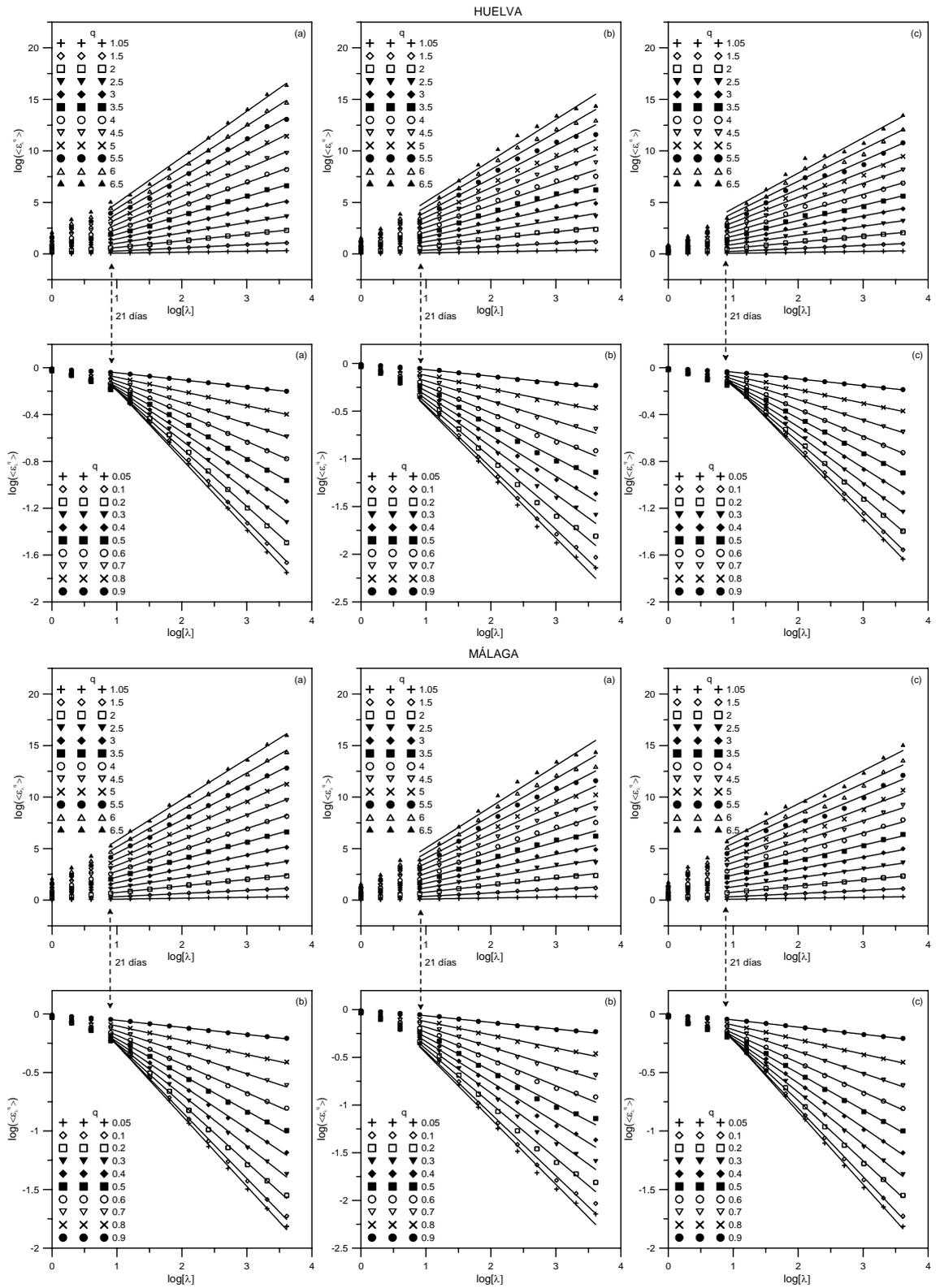


Figura 4. 21. Curvas de momentos Huelva y Málaga: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

Al comparar los valores de q_D entre localidades, se comprueba que Huelva es la localidad en la que se obtiene un mayor valor para todas las series (3,0 y 3,85 para la serie real completa y la real de menor duración), seguida de Córdoba (2,9 y 2,8), Málaga (2,4 y 2,35) y Almería (2,2 y 2,0). Por lo tanto, la tendencia en los valores de los exponentes se mantiene independientemente de la longitud de la serie de datos de precipitación analizada.

A pesar de las diferencias entre los distintos valores del momento crítico, todos ellos oscilan entre 2 y 3, siendo esta la franja en la que se encuentran otros valores obtenidos por diversos autores en otras zonas y climas diferentes a las analizadas aquí (e.g. Ladoy *et al.*, 1993; Svensson *et al.*, 1996; de Lima y Grassman, 1999; Sivakumar, 2001; Bove *et al.*, 2006; Pelino *et al.*, 2006).

El comportamiento lineal detectado en la función $K(q)$ para valores superiores al momento crítico q_D , es la evidencia empírica de la existencia de una transición de fase multifractal de primer orden. La pendiente γ_{max} de esta zona lineal es una estimación del máximo orden de singularidad presente en una muestra finita (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Tessier *et al.*, 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995). Los valores de γ_{max} son diferentes entre localidades y en función de la longitud de la serie de datos, siendo mayores los valores obtenidos al trabajar con las series reales de mayor duración.

Todos los valores de q_D obtenidos para cada localidad y serie de datos reales (Figura 4.22), son similares a sus respectivos valores del exponente τ_Q (figura 4.17). Dicha coincidencia de valores, es la consecuencia de la multifractalidad (e.g. Schertzer *et al.*, 1993; Schertzer y Lovejoy, 1994) y evidencia la caracterización de la precipitación como un proceso críticamente autoorganizado (Bak *et al.*, 1987, 1988).

Con todos los resultados anteriormente expuestos, puede concluirse que la coincidencia entre los valores de τ_Q y q_D , es una característica de la lluvia en todas las localidades analizadas, independientemente de la longitud de los registros reales analizados en las mismas. Por lo tanto, cualquier modelo de precipitación que se utilice para generar datos de lluvia en alguna de las localidades analizadas, debe reproducir esta característica. Sin embargo, esta similitud entre τ_Q y q_D no aparece al trabajar con las series de datos de lluvia generadas con el modelo PROMES.

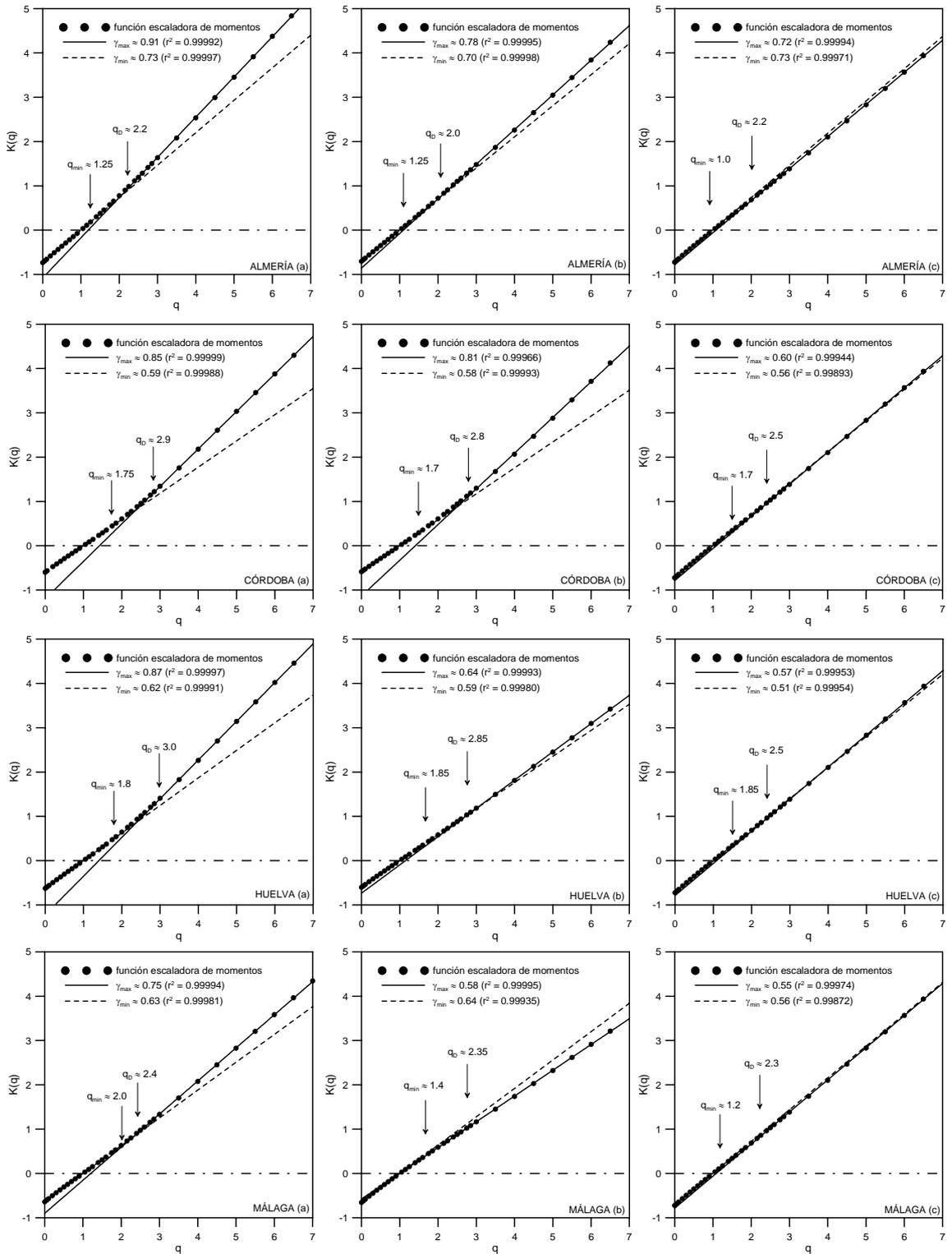


Figura 4.22. Función exponente escaladora de momentos: (a) serie real completa, (b) serie real corta y (c) serie sintética

4.2.5 Agrupación de los eventos de lluvia en el tiempo

En apartados anteriores ha quedado demostrado como la precipitación horaria en Almería, Córdoba, Huelva y Málaga, es un proceso multifractal y críticamente autoorganizado. Los procesos o sistemas SOC alcanzan su estado estable gracias a fluctuaciones en los eventos que los componen y donde se libera la energía que contienen. Dichas fluctuaciones pueden detectarse gracias a la presencia de agrupación temporal de los eventos en el tiempo.

Como ya se describió en el apartado 2.2.3, pueden realizarse múltiples análisis para determinar estas agrupaciones temporales. El grado de agrupación se obtiene a partir del valor del parámetro α , conocido como exponente fractal. El valor de este exponente proporciona también información acerca de si el proceso que se estudia es de tipo cascada, y de la presencia o ausencia de escalas de tiempo características en el proceso (es decir, de su naturaleza mono o multifractal). Por ejemplo, la condición para que un proceso sea el resultado de una cascada ilimitada es que $\alpha < 1$. Este tipo de cascadas también pueden producir procesos caracterizados por $\alpha > 1$, pero dichos procesos no se consideran multifractales (Sivakumar, 2001). Un proceso multifractal con $\alpha > 1$ puede obtenerse utilizando una cascada ilimitada modificada (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987).

En este apartado se analiza el grado de agrupación en los datos de precipitación horaria en el tiempo, en las localidades citadas anteriormente. Para ello se utilizará uno de los métodos existentes de análisis espectral y se compararán sus resultados con los derivados del cálculo del factor de Fano. Estas dos metodologías se van a aplicar solo a las series sintéticas de lluvia y a las series reales de precipitación de mayor longitud. Si se detecta la presencia de agrupación temporal en los datos reales de lluvia, debe reproducirse el mismo tipo de comportamiento en los datos simulados por el modelo PROMES. Es más, si la lluvia real resulta ser el resultado de un proceso de tipo cascada ilimitada ($\alpha < 1$), también deben serlo los datos sintéticos.

La tabla 4.7 muestra los resultados de los exponentes α_{PG} obtenidos para los distintos periodogramas calculados con los dos tipos de series de datos de lluvia analizados en cada localidad. La identificación de regímenes de escala y la estimación de valor del exponente fractal mediante el uso de periodogramas o cualquier metodología de análisis espectral, depende en gran parte del criterio individual, por lo que es inevitable que exista siempre un cierto grado de incertidumbre en los resultados. Por ello, se han calculado seis periodogramas para cada tipo de serie de datos de lluvia considerando diferentes valores de N_w (oscilando

entre 1.024 y 32.768) con sus correspondientes valores de T_w . De esta manera se intenta minimizar la incertidumbre que aparece al calcular el valor del exponente fractal α_{PG} cuando se trabaja con diferentes valores de N_w . Como puede verse en la tabla 4.7, los valores del exponente fractal son similares para ambos tipos de series de datos para los periodogramas obtenidos con valores cercanos de T_w .

Tabla 4.7. Resultados de los periodogramas para cada localidad considerando datos reales y sintéticos de lluvia

Almería					Córdoba				
Reales			Sintéticos		Reales			Sintéticos	
N_w	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}	N_w	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}
1.024	208	0,32	32	0,33	1.024	208	0,43	32	0,59
2.048	104	0,32	16	0,33	2.048	104	0,47	16	0,47
4.096	52	0,37	8	0,36	4.096	52	0,55	8	0,46
8.192	26	0,35	4	0,31	8.192	26	0,55	4	0,42
16.384	13	0,36	2	0,36	16.384	13	0,49	2	0,44
32.768	6	0,32	1	0,37	32.768	6	0,36	1	0,36
$\overline{\alpha_{PG}}$		0,34	0,34		$\overline{\alpha_{PG}}$		0,48	0,46	

Huelva					Málaga				
Reales			Sintéticos		Reales			Sintéticos	
N_w	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}	N_w	T_w	α_{PG}	T_w	α_{PG}
1.024	208	0,63	32	0,51	1.024	208	0,36	32	0,42
2.048	104	0,65	16	0,49	2.048	104	0,52	16	0,37
4.096	52	0,65	8	0,33	4.096	52	0,49	8	0,32
8.192	26	0,57	4	0,34	8.192	26	0,47	4	0,32
16.384	13	0,47	2	0,35	16.384	13	0,46	2	0,30
32.768	6	0,40	1	0,37	32.768	6	0,37	1	0,30
$\overline{\alpha_{PG}}$		0,56	0,40		$\overline{\alpha_{PG}}$		0,45	0,34	

En la misma tabla se muestra también el valor medio del exponente fractal $\overline{\alpha_{PG}}$. Para Almería, su valor es el mismo para ambos tipos de series de datos. Los valores son similares también en el caso de Córdoba, mientras que en Málaga y Huelva se detectan ciertas diferencias, obteniéndose un valor superior al tratarse de las series de datos reales de lluvia. Para todas las localidades y tipos de datos, los valores de $\overline{\alpha_{PG}}$ son menores que 1. Por lo tanto, un proceso de tipo cascada ilimitada puede ser suficiente para representar el proceso de la lluvia, para ambos tipos de datos en las localidades analizadas.

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

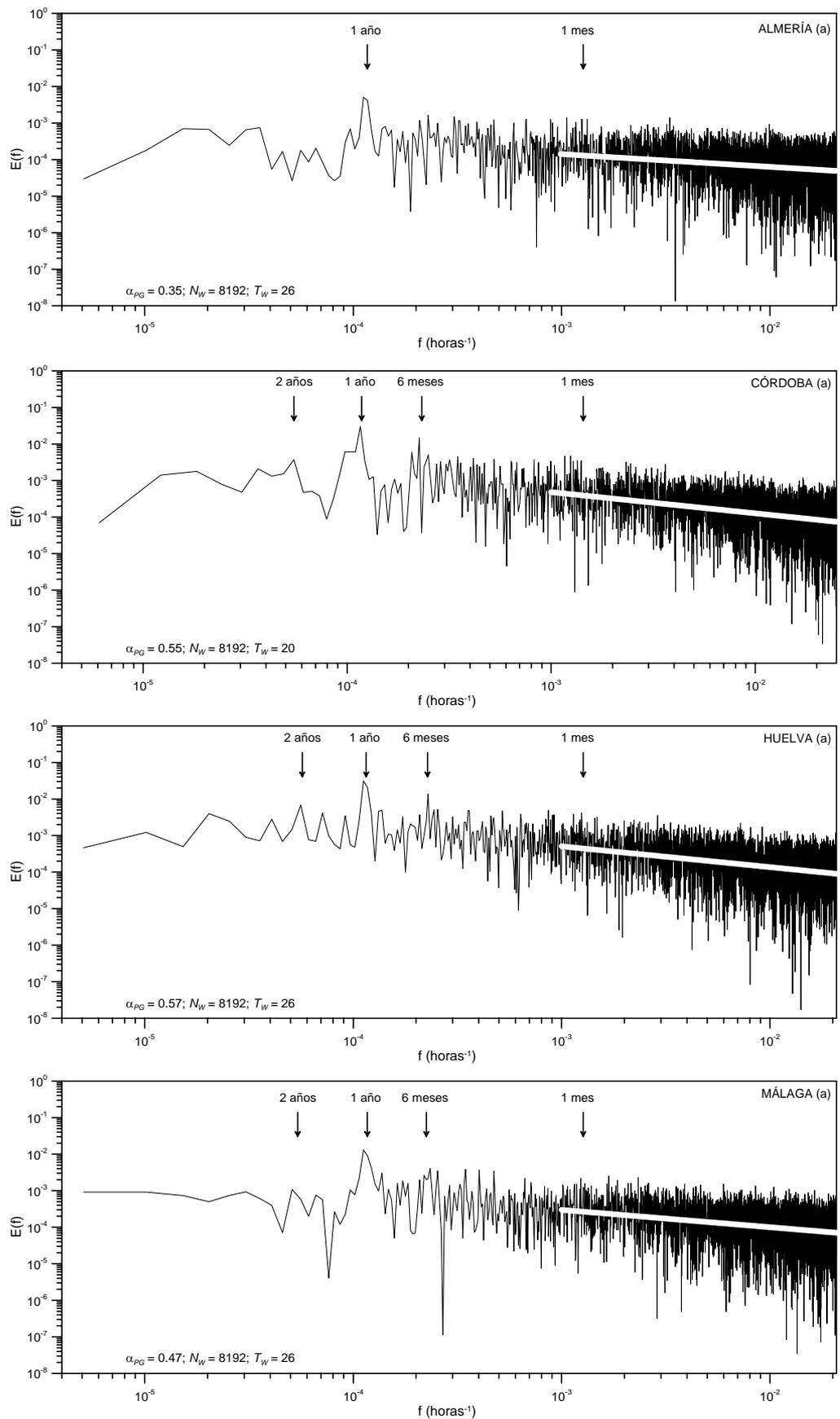


Figura 4.23. Periodogramas obtenidos con series de datos reales de lluvia

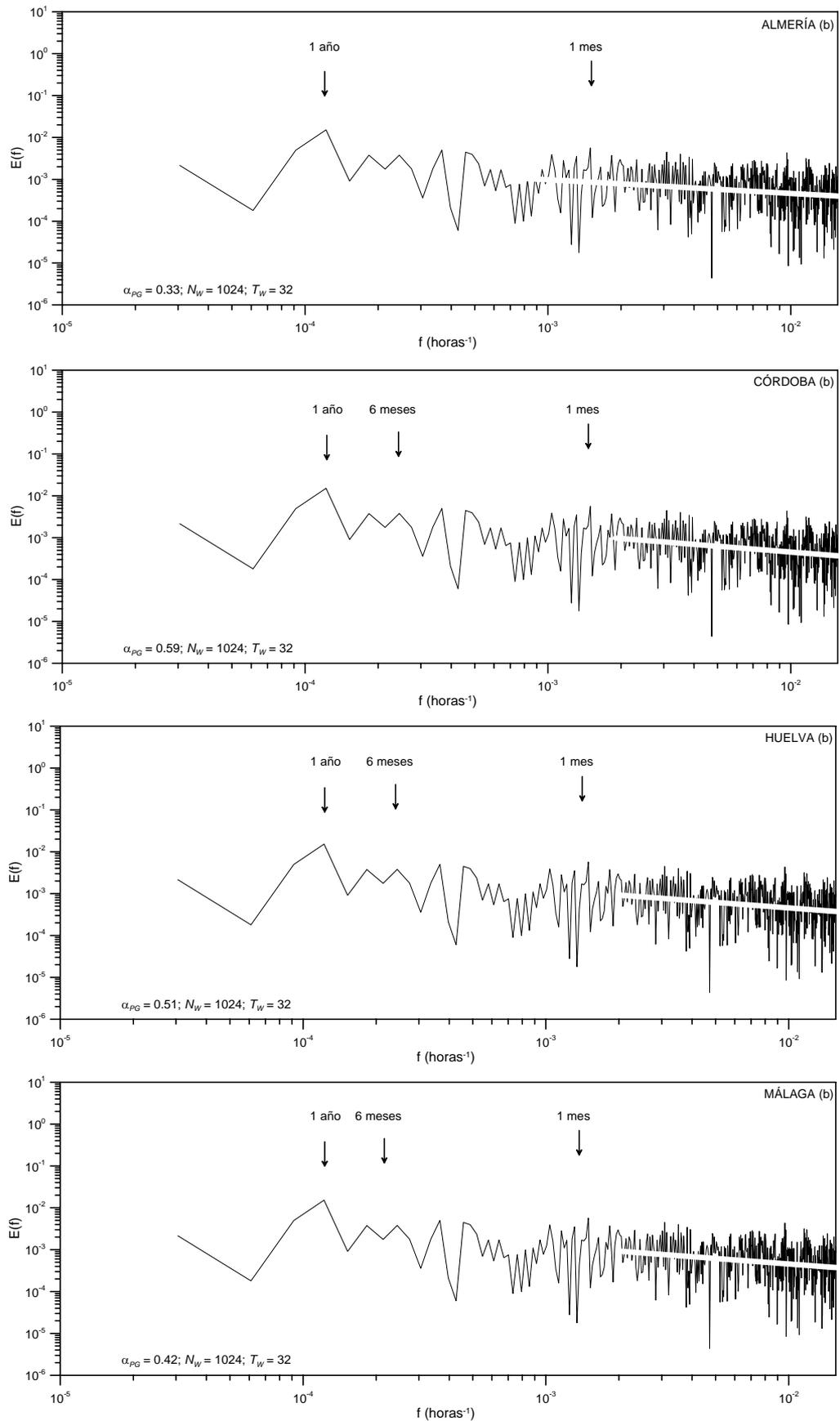


Figura 4.24. Periodogramas obtenidos con series de datos sintéticos de lluvia

La figura 4.23 muestra los periodogramas obtenidos con las series de datos reales de lluvia para $N_w = 8.192$. La figura 4.24 muestra la misma información pero para las series de datos sintéticas de lluvia para todas las localidades. En todos los periodogramas se diferencian dos regímenes. El rango para el que se han ajustado los valores de α_{PG} se extiende hasta $f \approx 9 \times 10^{-4}$ horas⁻¹ para Almería, y hasta $f \approx 1 \times 10^{-3}$ horas⁻¹ para Córdoba, Huelva y Málaga, siendo un indicador de la amplitud del comportamiento fractal. Para frecuencias más bajas, puede distinguirse en los periodogramas de ambas figuras, una región para la que $\alpha_{PG} \approx 0$, y que, como ya se ha comentado, se conoce como llanura espectral (e.g. Fraedrich y Larnder, 1993).

En estas zonas del espectro pueden distinguirse una serie de periodicidades en los datos de lluvia, que coinciden con picos o máximos de energía. En los periodogramas obtenidos para las series reales de precipitación (Figura 4.23), pueden diferenciarse periodicidades a los dos años ($f \approx 0,057 \times 10^{-3}$ horas⁻¹), un año ($f \approx 0,114 \times 10^{-3}$ horas⁻¹) y seis meses ($f \approx 0,231 \times 10^{-3}$ horas⁻¹), para Córdoba, Huelva y Málaga. El máximo a los seis meses se diferencia con menos claridad para esta última localidad. En Almería solo se distingue claramente un máximo de energía para un año. Por lo tanto, parece que en aquellas zonas donde predomina la precipitación de tipo convectivo y el carácter estacional es menos importante, se detecta un menor número de periodicidades y con mayor dificultad.

Para los datos de lluvia sintéticos (Figura 4.24), solo puede verse claramente una periodicidad para un año ($f \approx 0,114 \times 10^{-3}$ horas⁻¹), aunque la correspondiente a seis meses se aprecia ligeramente en todas las localidades salvo en Almería. El menor número de periodicidades observado con los datos de lluvia sintéticos está relacionado con la longitud de las series analizadas.

Como ya se comentó en el apartado 2.2.3, el factor de Fano no es adecuado como medida de exponentes fractales mayores que 1 (Lowen y Teich, 1996; Lowen *et al.*, 2001). Mediante el uso de los periodogramas, se ha obtenido una primera aproximación al valor del exponente fractal, siendo en todos los casos menor que la unidad (tabla 4.7). Por este motivo, puede utilizarse el factor de Fano, sin tener que recurrir a otros métodos que proporcionen valores del exponente fractal en un rango de valores más amplio (por ejemplo, el factor de Allan).

La figura 4.25 muestra los resultados obtenidos para el exponente de Fano (α_{FF}) en todas las localidades, para las series de datos reales (a) y sintéticas (b). Para ambos tipo de datos, el valor obtenido del exponente fractal es similar a su correspondiente valor de $\overline{\alpha}_{PG}$ obtenido mediante el análisis de los periodogramas (tabla 4.7).

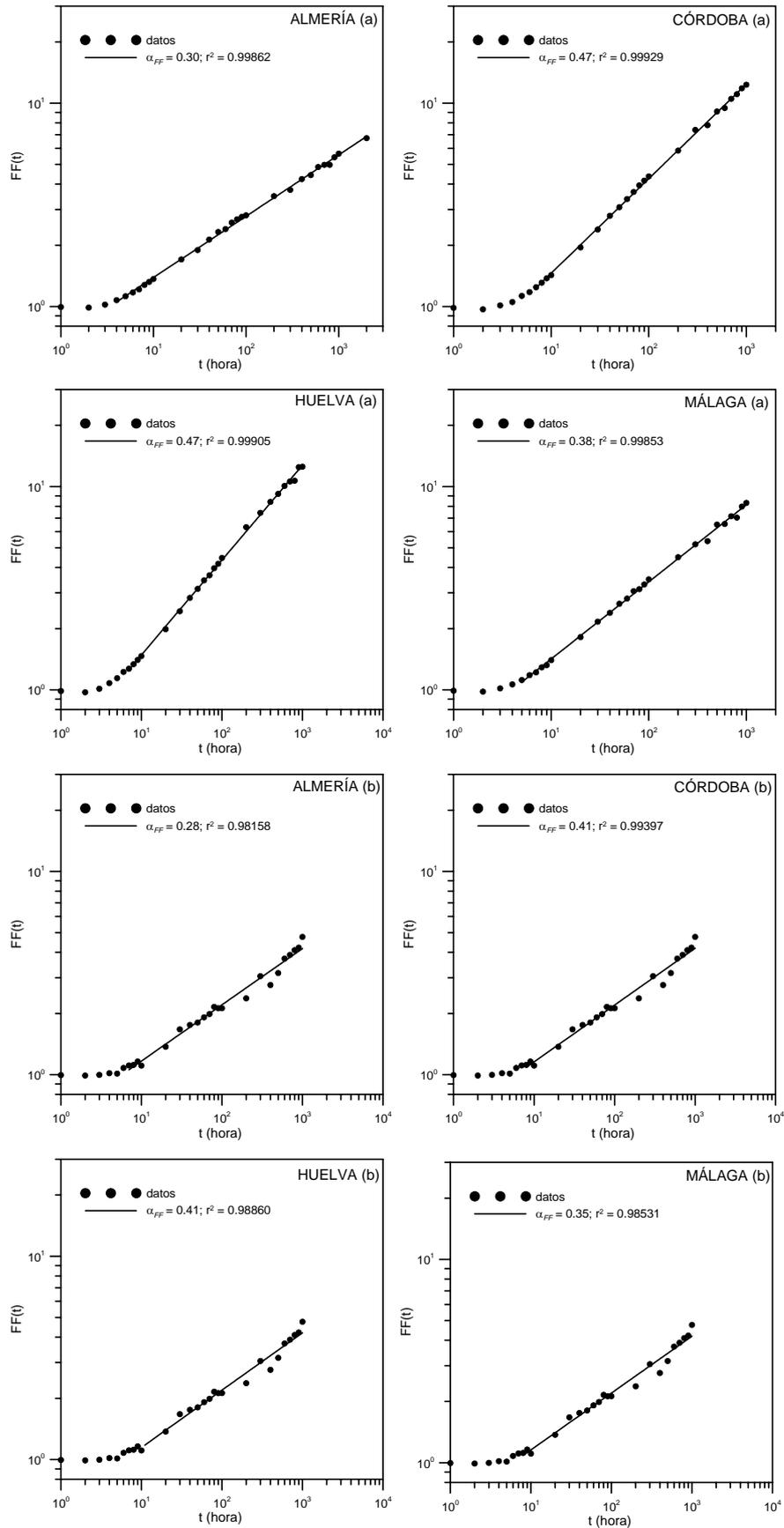


Figura 4.25. Factor de Fano para las series (a) reales y (b) sintéticas de precipitación

El hecho de que ambos exponentes sean similares para un determinado tipo de datos de lluvia en una localidad concreta ($\alpha_{FF} \approx \alpha_{PG} \approx \alpha$), no es más que la evidencia de la agrupación temporal de la precipitación para el régimen de escala detectado en ambos tipos de datos de lluvia.

Los resultados que aparecen en las figuras 4.23, 4.24 y 4.25, pueden utilizarse para contrastar el comportamiento multifractal obtenido del análisis de los momentos de la precipitación (Figuras 4.20 y 4.21). El rango para el que se ajustaron los valores de α_{PG} en los periodogramas en las figuras 4.23 y 4.24 ($f \approx 9 \times 10^{-4}$ horas⁻¹ para Almería, y $f \approx 1 \times 10^{-3}$ horas⁻¹ para el resto de localidades), es similar a la escala máxima para la que el factor de Fano exhibe una tendencia lineal (figura 4.25). Estas frecuencias no son más que una estimación del máximo sinóptico (figuras 4.20 y 4.21), cuyo valor era de 42 días para Almería y 21 días para Córdoba, Huelva y Málaga.

4.2.6 Conclusiones

El análisis multifractal llevado a cabo en varias localidades de Andalucía con series de datos de lluvia reales y sintéticas de diferente longitud, ha mostrado resultados y tendencias similares, excepto para el método del escalado de momentos.

Para el tamaño de los eventos de lluvia discriminados en cada serie y localidad, se encontraron valores similares en el tamaño medio de los mismos y en su duración. Lo mismo sucede con los coeficientes de variación de ambas variables. Los periodos secos, caracterizados por sus duraciones máximas y medias, presentaron también valores similares para todos los tipos de datos analizados. Según estos resultados, parece que el modelo PROMES reproduce bastante bien estos aspectos estadísticos de la precipitación en las localidades analizadas.

La cola de la función de distribución de probabilidad del tamaño de los eventos sigue una ley potencial para todas las series de datos analizadas en cada lugar, obteniéndose valores del exponente τ_Q superiores a 2. Estos valores hacen referencia a la multifractalidad de la precipitación tanto real como sintética, independientemente de la longitud de las series de datos analizadas. Al analizar las distribuciones de probabilidad de las duraciones de los eventos, los exponentes obtenidos fueron superiores para las series de datos observados. Sin embargo, se obtuvieron valores similares de dichos exponentes al analizar las duraciones de los periodos sin lluvia en cada localidad, tanto con las series de datos reales como las sintéticas.

A través del análisis de los momentos de las diferentes series de precipitación se detectó un abanico similar de comportamiento escalado para la lluvia, que oscilaba entre 1 hora y 42 días en Almería, y entre 1 hora y 21 días para Córdoba, Huelva y Málaga, en todas las series de datos. Los límites superiores de los intervalos anteriores no son más que las estimaciones del valor del máximo sinóptico en cada localidad. El método del escalado de momentos permitió la determinación de la función $K(q)$. Para los datos reales se obtuvieron formas convexas de dicha función, lo que corrobora el comportamiento multifractal de los datos reales en todas las localidades. Sin embargo, la función obtenida para los datos sintéticos fue casi lineal, lo que acerca a las series sintéticas a la monofractalidad. Por lo tanto, el modelo PROMES no reproduce la multifractalidad de la lluvia cuando se trata de detectar con la función $K(q)$. Este hecho sugiere que la forma de esta función es un buen indicador para detectar si los datos generados por cualquier modelo de lluvia son multifractales. Por otro lado, puede también concluirse que este comportamiento multifractal se hace más evidente al trabajar con series de datos de mayor longitud.

Del análisis de la función $K(q)$ para cada serie de datos reales, se obtuvieron los valores de los correspondientes momentos críticos q_D . La coincidencia de estos valores con los correspondientes de τ_Q al ajustar las funciones de distribución de probabilidad a los tamaños de eventos máximos, permite afirmar que la precipitación real es un proceso críticamente autoorganizado.

Del análisis de agrupación temporal de los eventos de lluvia en cada localidad para las series reales más largas y para los datos sintéticos de lluvia, se obtuvieron diversas estimaciones del valor del exponente fractal. Los valores de este exponente procedentes de los periodogramas, fueron diferentes para ambos tipos de datos debido a los diferentes valores de la variable T_w . Sin embargo, los valores medios para cada tipo de datos fueron similares a las estimaciones del exponente fractal mediante el método del Factor de Fano. Los periodogramas obtenidos en cada localidad mostraron una serie de periodicidades para determinadas frecuencias. El número de periodicidades fue mayor para las series de datos reales que para las sintéticas, como consecuencia de la diferente longitud de las mismas. El modelo PROMES, por lo tanto, reproduce aceptablemente el comportamiento agrupado de los eventos de lluvia.

Todos los resultados anteriores indican que el análisis multifractal puede ser una buena herramienta para evaluar la calidad de las series de datos de lluvia generadas por cualquier modelo, de forma que se complete la información suministrada por otras metodologías.

4.3 Aplicaciones del formalismo multifractal de turbulencia

La lluvia es uno de los factores más importantes a la hora de estudiar determinados procesos que tienen un significativo impacto medioambiental: inundaciones, sequías, escorrentía, erosión, transporte de contaminantes. Sin embargo, su gran variabilidad tanto espacial como temporal, limita el uso de determinados modelos determinísticos y estocásticos desarrollados para describirla. Según de Lima (1998), en dichos modelos se realizan separaciones entre las diferentes escalas del proceso, de forma que cada escala se estudia de manera independiente a las demás. Por este motivo, muchos de estos modelos no se usan correctamente ya que no se tiene en cuenta su aplicación restringida para diversas escalas. Además, dichos modelos conceptualizan la lluvia de manera muy simple considerando por ejemplo la cantidad media de lluvia para un área determinada o durante un periodo concreto. Estas variables carecen normalmente de resolución temporal y espacial suficiente como para permitir un modelado detallado de un proceso tan complejo como es la precipitación (e.g. de Lima, 1998).

La aproximación multifractal conocida como formalismo de turbulencia o modelo Multifractal Universal (MU), fue desarrollado por Schertzer y Lovejoy (1987) para modelar la variabilidad de la lluvia como un proceso multiplicativo de tipo cascada, en el que el flujo de agua se transfiere de las zonas (escalas) mayores a las más pequeñas de la atmósfera (e.g. Over y Gupta, 1994) de forma similar a la que tiene lugar en los modelos de turbulencia, en los que se asume la transferencia de energía entre escalas en el mismo sentido descendente. El formalismo de la turbulencia ha sido ampliamente utilizado para llevar a cabo diversos análisis de la estructura temporal de la lluvia (e.g. Ladoy *et al.*, 1993; Hubert *et al.*, 1993; Svensson *et al.*, 1996; Tessier *et al.*, 1993, 1996; de Lima y Grassman, 1999).

En esta sección se desarrollan dos análisis diferentes con un mismo objetivo: contribuir a la consolidación del conocimiento que ya existe de la naturaleza multifractal de la precipitación. En ambos se utiliza la serie temporal de precipitaciones horarias de Córdoba. En el primero de los análisis se aplica el formalismo de la turbulencia para analizar la citada serie de precipitación horaria, con objeto de comparar los resultados con otros ya existentes para estudios realizados en otras localidades. El segundo análisis utiliza la misma metodología pero con la serie diaria de horas sin lluvia de Córdoba.

4.3.1 Análisis de la serie histórica de precipitación horaria en Córdoba

4.3.1.1 El comportamiento de escala de la precipitación horaria

Uno de los métodos más robustos para caracterizar la multifractalidad de un proceso es el escalado de momentos estadísticos. Si se aplica al caso de la precipitación, el primer paso consiste en dividir la serie temporal de registros de lluvia en intervalos diferentes de tiempo que no se solapan. Siguiendo después la metodología planteada en el apartado de teoría, se obtiene el valor del momento estadístico medio conjunto $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ para diferentes valores de q .

La figura 4.26 muestra la representación doblemente logarítmica de los q -ésimos momentos de la intensidad de lluvia ε_λ para escalas temporales que oscilan desde 1 hora ($\lambda = 4096$) hasta casi 6 meses ($\lambda = 1$), frente al cociente de escala λ , para la serie temporal de precipitación horaria de Córdoba. Tal y como puede observarse, se detecta un comportamiento algo diferente para los momentos más pequeños y mayores, debido a la incertidumbre que se tiene al calcularlos (de Lima y Grassman, 1999). La estimación de los momentos de mayor orden está condicionada por las observaciones de mayor tamaño (eventos de lluvia mayores) y es altamente variable. Las intensidades de lluvia más pequeñas pueden no estar bien representadas en la serie de datos debido a la resolución del pluviómetro (0,1 mm). Sin embargo, en la figura 4.26 se representan tanto los momentos mayores (a) como los más pequeños (b), con objeto de obtener una descripción detallada de la dinámica de los datos de lluvia analizados.

Las líneas rectas que se observan en ambas partes de la figura 4.26 muestran el rango de comportamiento de escala de los momentos de la intensidad de lluvia, que varía desde 1 hora hasta 21 días. Los puntos que representan los momentos de mayor orden (figura 4.26a) se desvían aparecen situados relativamente por encima y por debajo de las citadas líneas rectas para todos los valores de $q > 3$. La misma tendencia puede observarse en la figura 4.26b para $q \leq 0,4$. Según de Lima y Grassman (1999), este hecho revela que las intensidades de lluvia más pequeñas y mayores están sobreestimadas e infravaloradas, respectivamente, en las series temporales de datos de lluvia.

La desaparición del comportamiento de escala a los 21 días (figura 4.26 a y b) se considera una manifestación del máximo sinóptico, concepto que puede definirse como la duración típica de las estructuras atmosféricas de escala planetaria (e.g. Kolesnikov y Monin, 1965).

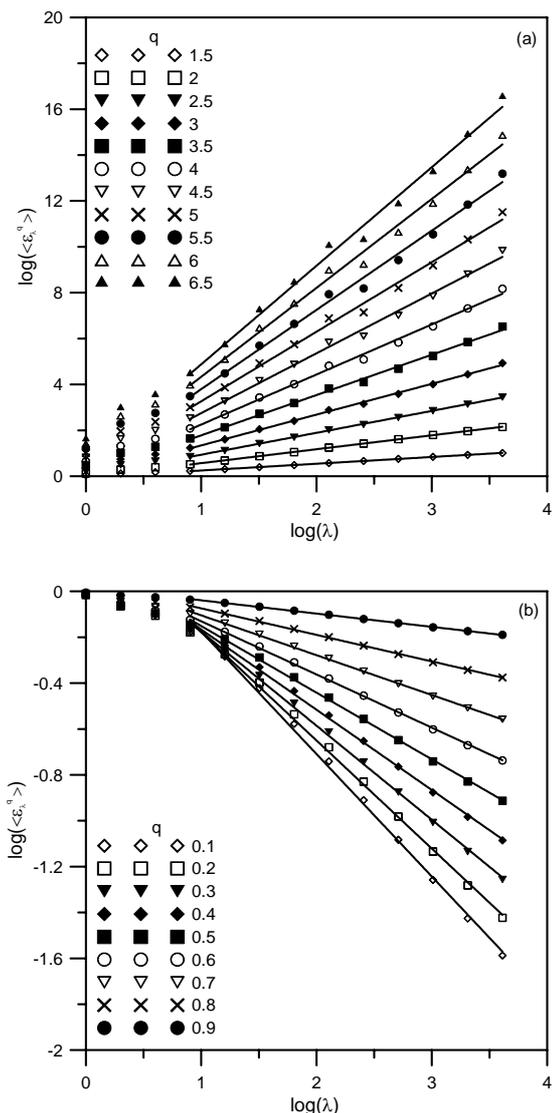


Figura 4.26. Curvas de momentos de orden (a) mayor y (b) menor que 1. Córdoba, datos horarios.

Seguindo la ecuación (2.4), puede obtenerse la función exponente escaladora de momentos $K(q)$, que describe el comportamiento de escala para los momentos obtenidos en la figura 4.26, desde 1 hora hasta 21 días. La figura 4.27 muestra la representación de la función $K(q)$, y como puede observarse, presenta una forma básicamente convexa. Esta forma no lineal en la función $K(q)$, implica que la serie de datos de lluvia horaria para Córdoba puede considerarse multifractal. Sin embargo, puede observarse un comportamiento lineal para $q > q_{\max} = q_D \approx 3$. Este valor obtenido para el momento crítico q_D es similar al estimado por de Lima y Grasman (1999), 3,1, para Vale Formoso, una región semiárida de Portugal.

El comportamiento lineal detectado a partir del valor del momento crítico, es la evidencia de la existencia de una transición de fase multifractal de primer orden. Para

$q > q_{\max}$, la pendiente de la zona lineal de la función $K(q)$ es una estimación del orden de singularidad máximo γ_{\max} presente en una muestra finita de datos (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Tessier *et al.*, 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995). Según la figura 4.27, $\gamma_{\max} \approx 0.85$.

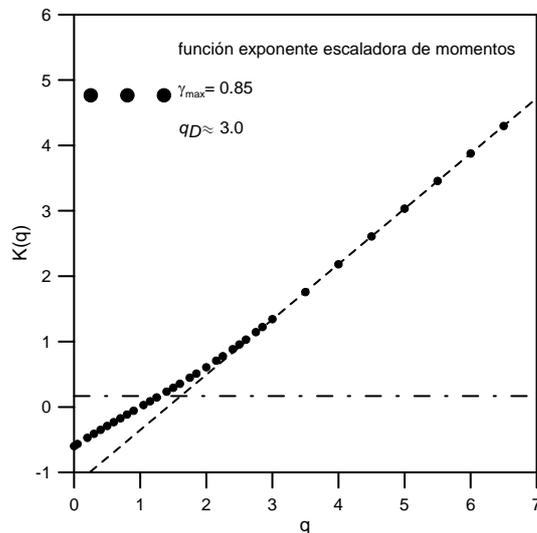


Figura 4.27. Función exponente empírica escaladora de momentos. Córdoba, datos horarios.

4.3.1.2 El modelo Multifractal Universal

Una vez detectado el comportamiento multifractal de la serie de datos horarios de lluvia en Córdoba, puede aplicarse la metodología propuesta por Schertzer y Lovejoy (1987) para obtener los parámetros que caracterizan al modelo Multifractal Universal.

Para calcular el valor de los parámetros α y C_1 , se aplica la técnica del momento de traza doble (DTM). Para ello, deben obtenerse los valores de la función $K(q, \eta)$, para diversos valores de q y η , como resultado de la pendiente de la parte lineal obtenida al representar en un gráfico doblemente logarítmico $\left\langle \left(\varepsilon_{\lambda}^{\eta} \right)_{\lambda}^q \right\rangle$ frente a λ . Es decir, se trata de aplicar la ecuación (2.15).

La figura 4.28 muestra la representación doblemente logarítmica del valor de $\left\langle \left(\varepsilon_{\lambda}^{\eta} \right)_{\lambda}^q \right\rangle$ frente a λ , para $q = 2$ y diversos valores de η . La linealidad que se observa en los puntos correspondientes a cada valor de η , muestra el comportamiento de escala de la serie de lluvia analizada. La pendiente de cada una de esas líneas rectas

obtenidas, es una estimación del valor de $K(q, \eta)$, para $q = 2$ y su correspondiente valor de η .

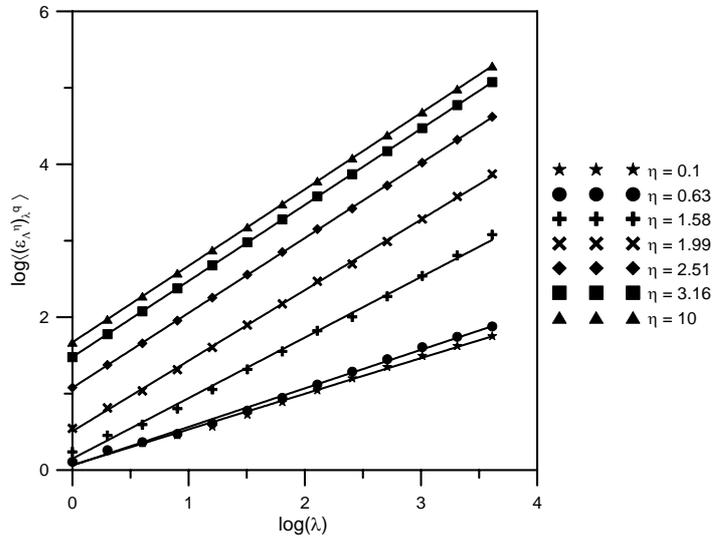


Figura 4.28. Técnica del momento de traza doble para $q = 2$

Repitiendo el procedimiento descrito para diversos valores de q , puede obtenerse la figura 4.29. En dicha figura, se representa el valor de $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para algunos de los valores de q analizados, concretamente aquellos que oscilan entre 1,75 y 3.

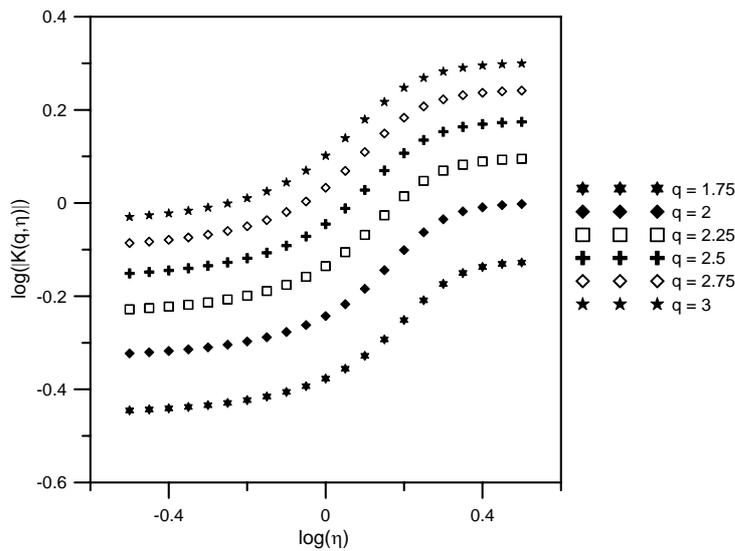


Figura 4.29. Variación de $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para diversos valores de q . Serie de datos horarios de lluvia.

El comportamiento de escala del proceso de la precipitación, puede observarse nuevamente en la figura 4.29, gracias al paralelismo de las curvas representadas en la misma. Del estudio del escalado de diez momentos q , comprendidos dentro del rango 1,75-3, se obtiene el valor de dos de los parámetros del modelo Multifractal Universal. Así la pendiente de los segmentos lineales que se detectan en parte central de las curvas de la figura 4.29 (y de las correspondientes al resto de momentos estudiados, que no aparecen representadas), permite obtener un valor de $\alpha = 0,734 \pm 0,012$. Con estos valores, y aplicando la ecuación (2.17), el valor del siguiente parámetro buscado vendrá dado por $C_1 = 0,443 \pm 0,003$.

Según el valor de α obtenido, el proceso de la precipitación estudiada pertenece a la clase universal con $1 < \alpha < 0$ (e.g. Lovejoy y Schertzer, 1990a), que se corresponde con procesos de tipo Lévy logarítmico con singularidades limitadas, denominados como multifractales condicionadamente fuertes. Este resultado concuerda con los obtenidos por autores como Tessier *et al.* (1993) para una red global de mil estaciones meteorológicas, Hubert *et al.* (1993) para la Isla de Reunión (Océano Índico), Ladoy *et al.* (1993) para Nimes (Francia), y de Lima y Grasman (1999) para Vale Formoso (Portugal).

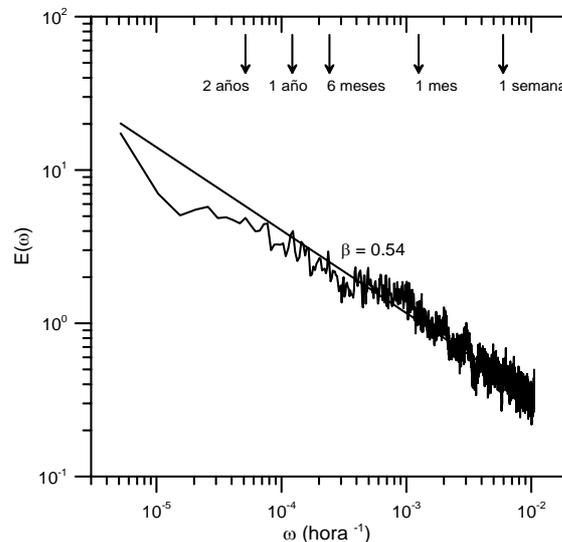


Figura 4.30. Espectro de energía de la serie de datos horarios de lluvia para Córdoba

Para obtener el tercero de los parámetros del modelo Multifractal Universal, es necesario calcular el valor del exponente fractal β , que se obtiene de la ecuación (2.18) al representar en un gráfico doblemente logarítmico el espectro de energía de la serie de lluvia analizada. La figura 4.30, muestra dicho espectro de potencia,

donde aparece el valor obtenido para el exponente fractal: $\beta = 0,54$. Mediante la ecuación (2.20), se calcula el valor del parámetro H . Para ello, una vez conocidos los valores de los parámetros α , β , y C_1 , solo es necesario conocer el valor de la función $K(q)$ para $q = 2$. Según la función exponente empírica escaladora de momentos (figura 4.27), se obtiene un valor de $K(2) = 0,561$. Por lo tanto, $H = 0,05$. Este valor de H , implica que el proceso de la precipitación en Córdoba es no conservativo.

El conocimiento de todos los parámetros del modelo Multifractal Universal, permite obtener la función exponente teórica escaladora de momentos $K(q)$, que viene dada por la ecuación (2.13). En dicha ecuación se observa que la expresión a utilizar es diferente en función del valor del parámetro α . Al haber obtenido un valor distinto a la unidad, debe utilizarse la parte superior correspondiente a $\alpha \neq 1$. Sustituyendo los valores de todos los parámetros multifractales calculados se obtiene la función buscada para los diferentes valores de q . La figura 4.31 muestra las funciones exponente escaladoras de momentos, empírica y teórica. La concordancia entre ambas funciones sólo es aceptable para un rango de momentos limitado por los órdenes más pequeños y el valor del momento crítico $q_{\max} = q_D \approx 3$ asociado con la transición de fase multifractal de primer orden, descrita anteriormente. Un comportamiento similar fue detectado por autores como de Lima y Grasman (1999).

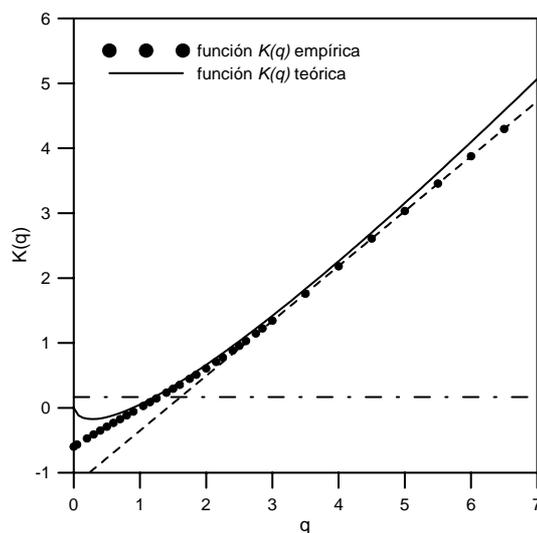


Figura 4.31. Función exponente (empírica y teórica) escaladora de momentos. Serie de datos horarios de lluvia.

4.3.1.3 Conclusiones

Del análisis de la serie de precipitación horaria de 23 años para Córdoba, se concluye que la multifractalidad puede utilizarse a la hora de describir la estructura temporal de la precipitación horaria en la citada localidad. Para llegar a esta afirmación se han explorado escalas de la precipitación que oscilan entre 1 hora y casi 6 meses, lo que ha permitido detectar una transición de fase multifractal de primer orden en la función exponente empírica escaladora de momentos.

El mismo comportamiento está presente en la función teórica escaladora de momentos obtenida tras la aplicación del modelo Multifractal Universal. Salvo para los momentos más pequeños, ambas funciones escaladoras de momentos son similares hasta el valor crítico q_D . Este hecho sugiere que los multifractales universales pueden utilizarse para generar datos sintéticos de lluvia de elevada resolución aunque teniendo siempre presentes una serie de restricciones para las intensidades de lluvia más pequeñas.

A la vista de todos estos resultados, cualquier modelo de lluvia aplicado a Córdoba debe reproducir el comportamiento multifractal de la precipitación.

4.3.2 Análisis de la serie diaria histórica de horas sin lluvia en Córdoba

El análisis de series diarias de horas sin lluvia no es muy frecuente. Sin embargo, es importante conocer su dinámica en zonas como la Mediterránea, donde la ocurrencia de la precipitación muestra una elevada variabilidad. Mediante la aplicación del formalismo de la turbulencia a dichas series se pretende aumentar la información referente a la naturaleza multifractal de la lluvia, ya descrita en apartados anteriores.

Para llevar a cabo este análisis, se parte de la serie temporal de datos de lluvia horaria registrada en Córdoba durante 23 años. Dicha serie puede considerarse homogénea, pues el pluviómetro utilizado para registrar los datos de lluvia ha sido siempre el mismo, y la zona donde está situado no ha sufrido grandes alteraciones en los años considerados. Bajo estas circunstancias puede asumirse que la varianza que exista en la serie temporal de datos de lluvia se deberá principalmente a las condiciones meteorológicas.

Para cada día de todos los presentes en la serie temporal, hay 24 registros de resolución horaria. Para algunos de ellos la cantidad de precipitación registrada será mayor o igual que 0,1 mm (resolución del pluviómetro de medida). Para otros, el

registro será nulo. Pues bien, el siguiente paso consiste en contabilizar el número de horas sin lluvia (con registro de precipitación nulo) que hay para cada día de la serie temporal. Se obtiene así una serie de longitud 365×23 , en la que el valor de los registros oscila ahora entre 0 (ninguna hora sin lluvia ese día) y 24 (todas las horas con lluvia). Aproximadamente el 94% del total de horas de la serie de datos analizada fueron horas sin lluvia.

Se trata pues de caracterizar la nueva serie diaria de horas sin lluvia en Córdoba, desde el punto de vista multifractal.

4.3.2.1 Análisis del comportamiento de escala

La nueva serie de datos disponibles ha de dividirse en intervalos sin solapamiento de determinada resolución para poder así analizar el número de horas secas aplicando el formalismo de la turbulencia. Así, siguiendo la metodología propuesta en la sección (2.3.1) se obtiene el valor de los momentos para diversos valores de la razón de escala, que oscilan entre 1 día ($\lambda = 256$) y 8,5 meses ($\lambda = 256$). La representación doblemente logarítmica de los diversos momentos calculados frente a los valores del cociente de escala, aparece en la figura 4.32.

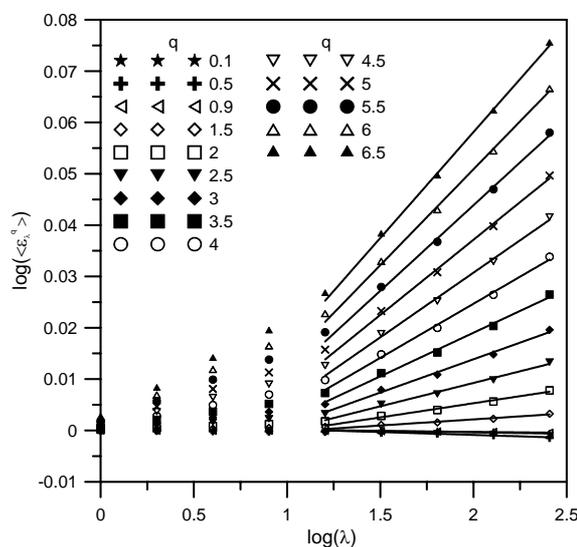


Figura 4.32. Curvas de momentos para la serie diaria de horas sin lluvia

En esta figura puede verse que el comportamiento escalado de los momentos está presente desde la escala diaria ($\log \lambda = 2,408$) hasta los 16 días ($\log \lambda = 1,204$). Esta ruptura del comportamiento de escala a los 16 días no es más que una manifestación

del máximo sinóptico (e.g. Kolesnikov y Monin, 1965). En el caso de la intensidad de lluvia, se han encontrado valores de esta variable que oscilan entre 11 días (de Lima y Grasman, 1999), 16 días (e.g. Ladoy *et al.*, 1993; Tessier *et al.*, 1993) y un mes (e.g. Fraedrich y Larnder, 1993; Svensson *et al.*, 1996). Para las horas sin lluvia, no se ha encontrado referencia alguna para este valor.

Una vez obtenido el rango de comportamiento de escala (16 días) puede obtenerse la función empírica exponente escaladora de momentos $K(q)$, a partir de la ecuación (2.4). Como puede observarse en la figura 4.33, la forma de dicha función es básicamente convexa, lo que se traduce en el comportamiento multifractal de la serie diaria de horas sin lluvia analizada. Sin embargo, se observa un comportamiento lineal de esta función para $q > q_D \approx 2,5$, evidenciando la presencia de una transición de fase multifractal de primer orden. Para $q > q_D$, la pendiente de la sección lineal de $K(q)$ es una estimación del máximo orden de singularidad γ_D presente en una muestra de datos finita (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Tessier *et al.*, 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995). Por lo tanto y según la figura 4.33, $\gamma_D \approx 0.00805$. Los momentos estadísticos de mayor orden divergen debido a la existencia de la transición de fase multifractal asociada con $q_D \approx 2,5$.

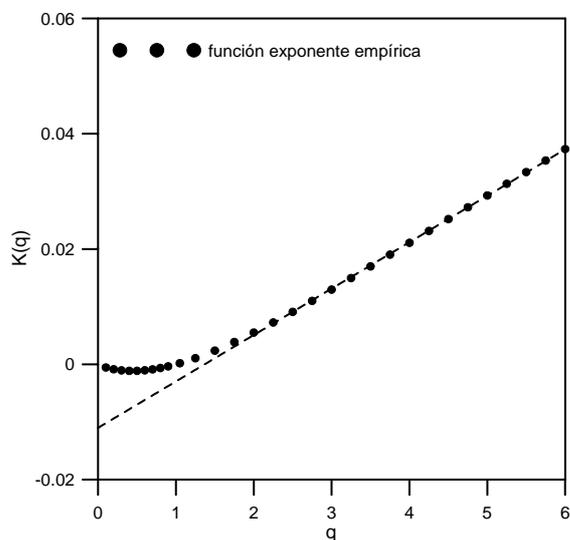


Figura 4.33. Función exponente empírica escaladora de momentos. Serie diaria de horas sin lluvia.

4.3.2.2 El formalismo multifractal de turbulencia

Para obtener los parámetros que caracterizan el modelo multifractal universal se sigue la metodología propuesta en la sección 2.1.4. Los parámetros α y C_1 , se

calculan siguiendo el método del momento de traza doble (DTM). Para ello, debe aplicarse la ecuación (2.15). Siguiendo esta ecuación, se representa en un gráfico doblemente logarítmico $\left\langle \left(\varepsilon_{\lambda}^{\eta} \right)_{\lambda}^q \right\rangle$ frente a λ . La pendiente de la parte lineal obtenida para un valor concreto de q y cada valor de η , es una estimación del valor de $K(q, \eta)$. La figura 4.34 representa los valores de $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para algunos de los valores de q analizados, que oscilan entre $q = 0,75$ y $q = 2,5$.

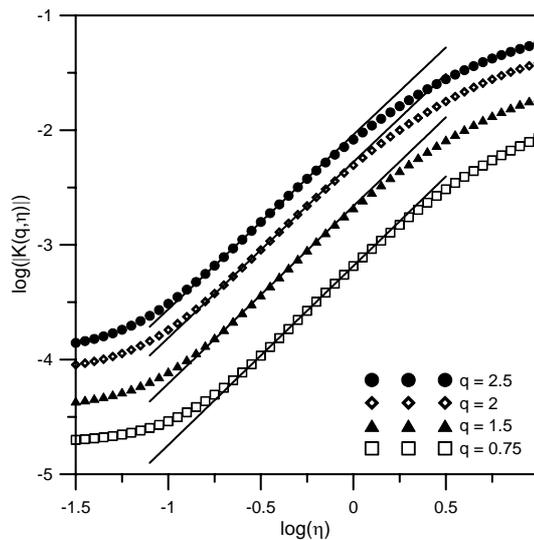


Figura 4.34. Variación de $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para diversos valores de q . Serie diaria de horas sin lluvia.

El valor de la pendiente de cada uno de los segmentos lineales obtenidos en la figura 4.34 junto con los no representados, permite obtener el valor del parámetro α del modelo multifractal universal. Por lo tanto, $\alpha = 1,49 \pm 0,02$. Según este valor, el proceso analizado se incluye en la clase universal para la que $1 < \alpha < 2$ (e.g. Lovejoy y Schertzer, 1990a), que corresponde a procesos logarítmicos de tipo Lévy con singularidades sin límites, denominados multifractales incondicionalmente fuertes.

Con el valor obtenido de α y aplicando la ecuación (2.17) para valores de q que oscilan entre $q = 0,75$ y $q = 2,5$, se obtiene el valor de $C_1 = 0,00316 \pm 8 \times 10^{-5}$. Este valor es similar al obtenido a partir de la derivada para $q=1$ en la función empírica $K(q)$ (figura 4.33), $C_1 = \left[\frac{dK(q)}{dq} \right]_{q=1} \approx 0,00349$.

La estimación del parámetro H requiere el conocimiento del exponente espectral obtenido de la representación doblemente logarítmica del espectro de energía de la

serie de datos analizada (figura 4.35). Aplicando la ecuación (2.20) se obtiene $H = -2,0314 \times 10^{-5}$. Por lo tanto, $H \approx 0$ lo que implica que puede asumirse la conservación del valor medio del número de horas diarias sin lluvia.

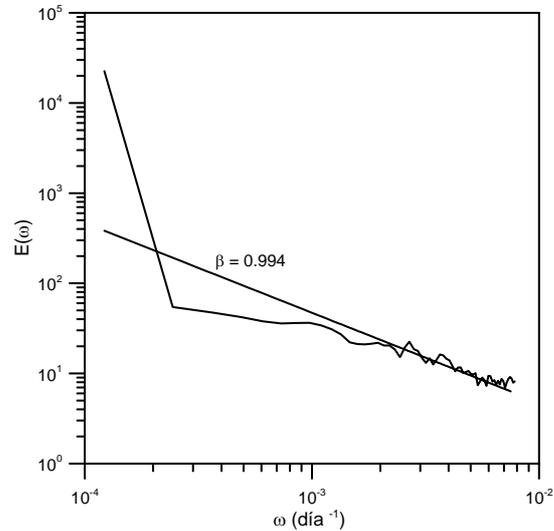


Figura 4.35. Espectro de energía de la serie diaria de horas secas

Obtenidos los valores que caracterizan al modelo multifractal universal, puede calcularse la función exponente teórica escaladora de momentos. Para obtenerla, basta con sustituir en la ecuación (2.13) los valores de los correspondientes parámetros. En la figura 4.36 se representan tanto la función empírica escaladora de momentos como la teórica, obtenida esta última a partir de los valores obtenidos de α , C_1 y $H = 0$. Ambas funciones son similares hasta que se alcanza el valor del momento crítico $q_D \approx 2.5$ asociado con la transición multifractal de fase de primer orden.

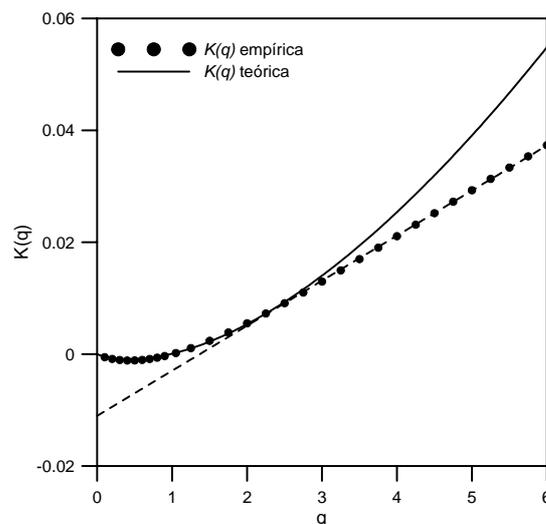


Figura 4.36. Función exponente (empírica y teórica) escaladora de momentos. Serie de diaria de horas secas.

Según de Lima (1998), los parámetros del modelo Multifractal Universal (UM) son útiles para describir el patrón estacional de la lluvia. Si se asume que los procesos estacionales son conservativos tal y como demuestra el valor de $H \approx 0$ encontrado para el período anual completo en Córdoba, es de esperar entonces que el parámetro C_I , que describe la dispersión de la media del proceso, tenga su valor máximo en otoño seguido por el invierno y la primavera, debido a la gran variabilidad en el número de horas sin lluvia detectado en dichos períodos.

Las tormentas o lluvias de tipo convectivo tienen lugar a finales del verano y principios del otoño, y son de corta duración, por lo que no producen mucha variabilidad en la serie temporal, dando como resultado un menor valor para C_I .

En cuanto al valor del parámetro α es de esperar que todos los procesos estacionales pertenezcan a la misma clase multifractal encontrada para el período anual completo.

Aunque las funciones exponente empíricas $K(q)$ son diferentes entre diferentes localidades y como consecuencia también varían los parámetros del modelo UM (e.g. de Lima, 1998), es de esperar un comportamiento similar al detectado para Córdoba en otras localidades con clima parecido.

4.3.2.3 Conclusiones

Del análisis de la serie de 23 años de datos horarios de precipitación de Córdoba, puede concluirse que la multifractalidad puede utilizarse para describir la estructura temporal de la serie diaria de horas sin lluvia de la citada localidad. Se han investigado para ello escalas que oscilan entre 1 día y 8,5 meses, y mediante el estudio de la función exponente empírica escaladora de momentos se ha detectado la existencia de una transición de fase multifractal de primer orden que determina el valor del momento crítico $q_D \approx 2,5$.

Mediante el método del momento de traza doble se han obtenido los parámetros del modelo Multifractal Universal, con los que se simula de manera bastante aceptable la función exponente teórica escaladora de momentos. Esta función puede utilizarse para describir la serie de datos analizada hasta un valor del momento igual al momento crítico.

Una vez conocidos los parámetros del modelo Multifractal Universal, puede concluirse que el proceso analizado es conservativo o estadísticamente estacionario, ya que $H \approx 0$. Esto implica que el valor medio del número diario de horas sin lluvia es el mismo para diferentes razones de escala λ . Este resultado es distinto a los que

se han encontrado con anterioridad al aplicar el análisis multifractal a la descripción de la intensidad de la lluvia. Autores como de Lima y Grasmann (1999) o Tessier *et al.* (1996) encontraron valores de $H \neq 0$, lo que implica que el valor medio de la variable estudiada cambia con la escala.

El análisis multifractal ha resultado ser una buena herramienta para la descripción de la serie de datos diarios de horas sin lluvia obtenida para Córdoba. No obstante, este estudio debe extenderse a otras zonas para completar así los resultados y reforzar las conclusiones. De cualquier manera, los resultados que se han obtenido aquí deben ser útiles a la hora de validar modelos de lluvia, ya que todas las series de datos sintéticos que se utilicen en la zona de estudio deben exhibir el mismo comportamiento multifractal detectado en este trabajo para ser así suficientemente realistas.

4.4 Multifractalidad y relaciones Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF)

Son muchas las ocasiones en que para dar solución a determinados problemas en el ámbito de la ingeniería es necesario conocer valores de intensidad de lluvia que tengan una determinada probabilidad de ocurrencia o período de retorno T . Normalmente, los eventos de precipitación más intensos suelen ser los menos frecuentes, y a la vez, los más demandados en los cálculos hidrológicos. Para poder estimarlos hay que disponer de series históricas de precipitaciones máximas en el lugar para el que se requiere la estimación. Sin embargo, la longitud de las series de registros existentes raramente es suficiente para permitir una estimación realista de los cuantiles. Así, las estimaciones de los cuantiles correspondientes a elevados períodos de retorno albergan cierto grado de incertidumbre al obtenerse a partir de la cola de la función de densidad de la serie de datos disponibles. Por lo tanto, para estimar dichos cuantiles de forma fiable se requiere un número de registros n elevado. No obstante, en muchas de las aplicaciones de ingeniería apoyadas en datos extremos, difícilmente se satisface esta condición, pues normalmente el número de registros con los que se cuenta es inferior a 50 y los períodos de retorno con los que suele trabajarse superan los 100 años (Hosking y Wallis, 1997 §1).

Existen diversas metodologías para obtener datos máximos de precipitación para una duración y un período de retorno concretos, siendo el análisis de frecuencias la herramienta más utilizada. El análisis local de frecuencias permite obtener los datos sintéticos buscados para una localidad a partir del ajuste de sus datos de lluvia reales a funciones de distribución de probabilidad. Debido a la limitación que existe en la longitud de las series históricas de precipitación, suele haber cierto grado de incertidumbre en la estimación de las lluvias de menor frecuencia. Para evitar este problema, puede utilizarse el análisis regional de frecuencias, que suple la carencia de datos en el tiempo con la abundancia de los mismos en el espacio.

Del estudio y análisis de las precipitaciones extremas para diversas duraciones pueden deducirse las relaciones Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF) que se utilizan de modo generalizado en el proyecto de infraestructuras de drenaje de las aguas pluviales, como son las redes de colectores e imbornales, obras de paso y drenaje de carreteras, y estructuras de control de la escorrentía en pequeñas cuencas. Otra gran utilidad de las relaciones IDF es la estimación de los aguaceros de proyecto que requieren muchos modelos hidrológicos para el cálculo de la avenida de diseño.

Son diversas las expresiones matemáticas, que para un observatorio dado, relacionan la intensidad o la altura de lluvia, con la duración y con la probabilidad de ocurrencia o período de retorno, variando desde relaciones empíricas como las propuestas por Bell (1969), Chen (1983), Témez (1987) y Kothyari y Garde (1992), a las ecuaciones matemáticas de tipo hiperbólico (Wenzel, 1982; Chow *et al.*, 1988) que se establecen mediante análisis de regresión de datos de determinada frecuencia del observatorio considerado. Alternativamente, autores como Alila (2000) establecen diversas ecuaciones que relacionan altura-duración-frecuencia a escala regional, para estimar los aguaceros de proyecto en localidades sin datos de precipitación.

La diversidad en los métodos de obtención de datos de precipitación sintética y la gran variedad de expresiones matemáticas para las curvas IDF, hacen que el objetivo de esta sección sea el uso de la multifractalidad de la lluvia como posible herramienta para discriminar, tanto la mejor forma de obtener las series sintéticas de lluvia, como la determinación de las ecuaciones más adecuadas de las curvas IDF para un determinado lugar. Con este propósito, se va a realizar en primer lugar un análisis regional de las precipitaciones máximas en las ocho capitales de provincia de Andalucía. Posteriormente y para cada una de dichas localidades se va a aplicar un análisis regional intraestación. Por último, en aquellas localidades en las que ambos tipos de análisis sean satisfactorios, se llevará a cabo un análisis local de frecuencias con las series de datos máximos de precipitación. Las series de precipitaciones máximas obtenidas por cada uno de los tres procedimientos citados, se ajustarán a diversos modelos paramétricos IDF. La comparación de las propiedades de esas curvas IDF con los resultados del análisis multifractal, ayudará a decidir cual es el análisis de frecuencias y el modelo de curva IDF más adecuado para cada localidad.

4.4.1 Las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF)

La forma más usual de presentar los datos de lluvia consiste en relaciones entre la altura media (h) o intensidad media de lluvia (I) para varias duraciones (t) e intervalos de recurrencia (F) (Chen, 1983; Chow *et al.*, 1988). En ingeniería suele expresarse la probabilidad de ocurrencia de un evento especificando su período de retorno (T), que se define como el intervalo medio de tiempo que separa dicho evento del más cercano que lo iguale o lo supere en magnitud.

Para obtener las curvas IDF en una determinada localidad pueden seguirse varios procedimientos. Para períodos de retorno inferiores a la longitud de la serie de datos de lluvia disponible, las curvas IDF pueden estimarse directamente a partir de los

registros de lluvia máximos anuales simplemente usando una fórmula de representación de posición (e.g. Singh, 1992). Sin embargo, el procedimiento más ampliamente utilizado consiste en usar un modelo paramétrico que proporcione un valor de intensidad media de lluvia para una duración y período de retorno determinados. Los parámetros del modelo se estiman utilizando diversos criterios (por ejemplo, mínimos cuadrados) para ajustar las series de datos de lluvia extremos anuales observados.

El procedimiento general de obtención de las curvas IDF en localidades donde se disponga de datos de registros de lluvias se realiza del siguiente modo (Wenzel, 1982):

1. Establecer el número de series de duración a analizar. Un análisis completo incluiría series de duraciones de 5, 10, 20, 30 minutos, y 1, 2, 6, 12 y 24 horas.
2. Identificar para cada duración del análisis el máximo valor anual registrado, obteniéndose de esta forma la serie de máximos anuales para cada duración.
3. Cada una de las series de máximos obtenidas debe ajustarse a una función de distribución de probabilidad de valores extremos, de manera que puedan calcularse los cuantiles de lluvia correspondientes a la duración analizada y a diversos períodos de retorno (Di Baldassarre *et al.*, 2006). Entre las funciones de distribución más utilizadas se encuentran la General de Valores Extremos, la Pearson Tipo III, Normal Generalizada, Logística Generalizada y Pareto Generalizada (Apéndice 1).
4. Finalmente, han de ajustarse los cuantiles obtenidos al tipo de curva IDF seleccionada. Dicho ajuste puede realizarse en papel o a través de una ecuación (modelo paramétrico) caracterizada por un número variable de parámetros que normalmente oscila entre 2 y 4. Existen diversos tipos de ecuaciones aunque básicamente las más utilizadas son dos, según se ajuste la intensidad en función de la duración para cada período de retorno,

$$i = \frac{a}{t+b} \quad i = \frac{a}{t^b} \quad i = \frac{a}{t^c + b} \quad i = \frac{a}{(t+b)^b} \quad (4.2a)$$

o bien se realice un ajuste con la intensidad como variable dependiente y la duración y el período de retorno como variables independientes. En este último caso se obtiene en una sola ecuación toda la familia de curvas IDF,

$$i = \frac{aT^b}{t^c + d} \quad (4.2b)$$

Para obtener estimaciones fiables de un cuantil de precipitación para una duración y un período de retorno determinados, es necesario que la longitud de las series de datos analizadas tenga una longitud suficientemente larga. Cuando los cálculos hidrológicos requieren pequeños períodos de retorno, la longitud de la serie no es un factor determinante y un análisis local de frecuencia es suficiente. Los problemas aparecen al trabajar con períodos de retorno superiores, para los que se necesitarían series de datos de elevada longitud. Para subsanar este problema, puede recurrirse al análisis regional de frecuencias (Hosking y Wallis, 1997). Este análisis suple la carencia de datos en el tiempo con la abundancia de registros en el espacio. A continuación se presenta una descripción detallada de esta metodología.

4.4.2 Análisis regional de frecuencias (AR)

El objetivo fundamental del análisis de frecuencias es la estimación de sucesos extremos correspondientes a diferentes periodos de retorno mediante el uso de funciones de distribución de probabilidad. El análisis regional de frecuencias permite calcular datos para un determinado sitio de interés utilizando datos de otros lugares diferentes a los del sitio en cuestión. Si se cuenta con N sitios cada uno de ellos con n años de registro de eventos máximos, puede suponerse que $N \times n$ datos darán estimaciones más precisas de cuantiles tan extremos como Q_{Nn} .

En la práctica surgen problemas ya que las distribuciones de frecuencias en lugares diferentes no son idénticas, y las series de registros en dichos emplazamientos pueden no ser estadísticamente independientes. Sin embargo, un buen uso del análisis regional de frecuencias conducirá a estimaciones suficientemente precisas y de gran utilidad en diversos problemas reales.

El análisis regional utiliza el método del Índice de Avenida y el estudio de los Momentos Lineales (momentos-L) para obtener el valor de los cuantiles de lluvia buscados. Puede encontrarse una información más detallada en Hosking y Wallis, 1997 y García, 2000.

4.4.2.1 El método del índice de avenida

Este método se aplicó por primera vez a datos hidrológicos de grandes avenidas (Dalrymple, 1960), de ahí su nombre. No obstante, puede aplicarse a cualquier tipo de datos. El procedimiento del índice de avenida aumenta la longitud de los registros

disponibles mediante la transferencia de información de las diferentes estaciones pluviométricas que componen una supuesta región y desarrolla una relación entre los cuantiles sin dimensiones ó índice de avenida (relaciones entre la estimación de la variable asociada a un cierto periodo de retorno y la media anual) y el periodo de retorno (T), que se conoce con el nombre de curva regional de frecuencia.

El principio que subyace en este método (Hosking y Wallis, 1997 §1) es que la distribución de los eventos máximos en una región es la misma excepto por un factor de escala que refleja las características de las precipitaciones de cada estación. Conocidos los cuantiles a escala regional y los valores medios locales, se pueden extrapolar extremos locales con cierta fiabilidad.

Si se dispone de datos en N estaciones, cada estación i con un tamaño muestral n_i y Q_{ij} , $j=1, \dots, n_i$ datos observados, $Q_i(F)$, $0 < F < 1$ será la función cuantil de la distribución de frecuencia en cada lugar. Según el principio descrito en que se basa el método del índice de avenida, puede escribirse,

$$Q_i(F) = \mu_i q(F), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

donde μ_i es el índice de avenida que tomará el valor de la media de la distribución de frecuencia en la estación considerada; $q(F)$, es la curva regional de frecuencia, y es la distribución de Q_{ij} / μ_i . La base para estimar la curva regional de frecuencia es el cálculo de $q_{ij} = Q_{ij} / \mu_i$, $j=1, \dots, n_i$, $i=1, \dots, N$. Esta curva es función de un conjunto de parámetros ($\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$) indeterminados, que pueden ser el coeficiente de variación y de sesgo, por ejemplo, expresados como cocientes de determinados momentos lineales. Una vez calculados para cada estación, se combinarán para dar una estimación regional, a modo de una media ponderada, de manera que la estación i tendrá un peso proporcional a n_i :

$$\mathcal{G}_K^R = \sum_{i=1}^N n_i \mathcal{G}_K^{(i)} / \sum_{i=1}^N n_i \quad (4.4)$$

Sustituyendo los K parámetros medios calculados en $q(F)$ se obtiene una estimación de la curva regional de frecuencia:

$$q(F) = q(F; \mathcal{G}_1^R, \dots, \mathcal{G}_K^R) \quad (4.5)$$

Los nuevos cuantiles para cada lugar vendrán dados por la ecuación (4.3).

Hay que tener en cuenta que este procedimiento da por supuestas una serie de condiciones:

- Las observaciones en cualquier estación, se distribuyen de manera idéntica, y son independientes.
- Observaciones en estaciones diferentes son independientes.
- Las distribuciones de frecuencia en distintos lugares son idénticas excepto por un factor de escala.
- La forma de la curva regional de frecuencias se especifica correctamente desde el punto de vista matemático.

4.4.2.2 Los Momentos Lineales

Los momentos lineales constituyen un sistema alternativo al método tradicional de los momentos convencionales para describir las formas de las funciones de distribución y surgen de combinaciones lineales de los momentos ponderados probabilísticamente (MPP) introducidos por Greenwood *et al.* (1979). Los MPP de la variable aleatoria χ con una función de distribución $F(\cdot)$ quedan definidos por la expresión:

$$M_{ijk} = E \left[x^i F^j (1 - F)^k \right] \quad (4.6)$$

Son particularmente útiles $\alpha_r = M_{1,0,k}$ y $\beta_r = M_{1,j,0}$.

En términos de momentos de probabilidad ponderada, los cuatro primeros momentos lineales λ_i vienen dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_0 = \beta_0 \\ \lambda_2 &= \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0 \\ \lambda_3 &= \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0 \\ \lambda_4 &= \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

El momento lineal de primer orden (λ_1) es el parámetro de localización o media de la distribución. λ_2 mide la escala de la distribución indicando el grado de dispersión entre los datos.

Es conveniente definir los momentos lineales de forma adimensional para poder comparar así entre estaciones. Para ello, se dividen los momentos lineales de mayor orden entre el parámetro de escala λ_2 . Se definen así los cocientes de momentos lineales como,

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, \quad r = 3, 4, \dots \quad (4.8)$$

que dan una idea de la forma de una distribución con independencia de su escala de medida. Se pueden definir coeficientes lineales de variación, de asimetría o sesgo, y de curtosis:

$$\begin{aligned} LC_v &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ LC_s &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \\ LC_k &= \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Conceptualmente son semejantes a los coeficientes de momentos convencionales. Así por ejemplo, el coeficiente de variación lineal expresa la dispersión de la distribución como una proporción de la media de la misma.

4.4.2.3 Pasos a seguir en el Análisis Regional de Frecuencias

El análisis regional de frecuencias consta básicamente de cinco etapas:

1. *Análisis y filtrado de los datos primarios de observaciones.*

Este es el primer paso en cualquier análisis estadístico. Es útil cualquier información externa acerca de los métodos de toma de datos y medidas, o sobre cualquier cambio en el tiempo que haya podido afectar a la distribución de frecuencia en alguna de las estaciones de estudio.

2. *Identificación de regiones homogéneas.*

Consiste en asignar los diferentes lugares a regiones. La región es la unidad fundamental del análisis regional de frecuencias. Las estaciones no podrán incluirse en regiones en las que el criterio de homogeneidad no se satisfaga exactamente. Pero una homogeneidad aproximada es suficiente para asegurar que el análisis regional es mucho más preciso que el local. Las regiones no tienen por qué ser geográficas pero deberán incluir lugares que tengan valores similares de aquellas características que determinen la distribución de frecuencia.

Calculando diversos estadísticos en cada lugar y comparando su variabilidad entre estaciones, así como con los valores esperados para la región, puede

estudiarse el grado de homogeneidad de la misma. Los momentos lineales son buenos estadísticos para realizar la prueba de heterogeneidad.

3. *Elección de una distribución de frecuencia para la región.*

Tras identificar una región, el siguiente paso consiste en elegir una distribución regional de frecuencia, $q(F)$, apropiada. Para ello es necesario realizar pruebas de bondad de ajuste a diversas distribuciones posibles. Es necesario determinar el grado de similitud existente entre los estadísticos referentes a los datos observados y los que se esperarían si estos procediesen de una muestra aleatoria extraída en una población que obedeciese a una función de distribución de frecuencias conocida.

4. *Estimación de los cuantiles regionales de frecuencia.*

Una vez escogida una función de distribución se estimarán los cuantiles asociados a un cierto periodo de retorno. Para ello la distribución se ajustará separadamente en cada estación, combinándose después las estaciones de cada lugar para obtener una media regional. Se seguirá el procedimiento del índice de avenida.

5. *Análisis de robustez de los modelos estadísticos seleccionados.*

Para que los resultados obtenidos alcancen la mayor utilidad práctica posible y para calibrar su fiabilidad, se debe evaluar la magnitud de la incertidumbre de los cuantiles estimados. Para ello puede usarse el método de simulación de Montecarlo, que permite comprobar si los cuantiles estimados mediante análisis regional de frecuencias se encuentran dentro de un determinado intervalo de confianza previamente establecido.

4.4.3 Resultados

4.4.3.1 Análisis Regional de las precipitaciones máximas en las capitales de Andalucía

El primer paso antes de comenzar con cualquier tipo de análisis es ver con qué datos se cuenta. En este caso se dispone de series históricas de precipitación suministradas por el Instituto Nacional de Meteorología (INM) para las ocho capitales de provincia de Andalucía. La tabla 4.8 muestra el número de años con registros para cada localidad.

Tabla 4.8. Registros en cada estación

Capital	Periodo de años en que existen registros	Nº. de años
CÓRDOBA	1982/2004	23
SEVILLA	1980/2004*	25
CÁDIZ	1982/2004	23
HUELVA	1980/2004	25
MÁLAGA	1981/2004	24
ALMERIA	1981/2004	24
JAEN	1982/83 – 89/92 – 94/2004	17
GRANADA	1980/2004	25

*varían para cada duración

Una vez conocidos los datos de partida, hay que extraer las series de precipitaciones máximas anuales para diferentes duraciones. Las duraciones elegidas son de 10, 20, 30, 60, 120, 180, 360, 720 y 1440 minutos. De esta forma se analiza para qué duraciones se puede considerar que las estaciones estudiadas forman una región desde el punto de vista de las precipitaciones máximas.

Hablando en términos de análisis regional, la posible región será Andalucía, y las estaciones que la forman, las ocho capitales de provincia recogidas en la tabla 4.8. Se realizará un análisis regional para cada una de las duraciones.

La primera prueba estadística para realizar un análisis regional es la medida de la discordancia D_i , que permite identificar estaciones inusuales en comparación con el resto de las componentes de la posible región. Para ello, es necesario calcular los momentos lineales para cada una de las series de precipitaciones máximas obtenidas en cada localidad.

Se considera que el vector de momentos lineales (LC_v, LC_s, LC_k) correspondiente a una serie de datos de una estación determinada constituye un punto en un espacio tridimensional. De esta forma, un grupo de estaciones producirá una nube de puntos en este espacio. Cualquier punto que se ubique lejos del centro de gravedad del conjunto de estos puntos deberá ser considerado como discordante y habrá de eliminarse del análisis.

Numéricamente, la medida de discordancia D_i se define a partir de un estadístico:

$$D_i = \frac{1}{3} N(u_i - \bar{u})^T A^{-1} (u_i - \bar{u}) \quad (4.10)$$

Siendo $A = \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(u_i - \bar{u})$, y \bar{u} el valor medio, $\bar{u} = N^{-1} \sum_{i=1}^N u_i$, de las observaciones u_i , $u_i = [LC_v^i, LC_s^i, LC_k^i]$, cuyo número total, N , es igual al de estaciones.

Para una región determinada, una estación se considerará discordante si el valor del estadístico D_i , es superior a un límite que viene establecido en función del número de estaciones de la posible región (Tabla 4.9).

Tabla 4.9. Valores críticos de discordancia. (Hosking y Wallis, 1997 § 3)

Número de lugares	Valor crítico
5	1,333
6	1,648
7	1,917
8	2,140
9	2,329
10	2,491
11	2,632
12	2,757
13	2,869
14	2,971
≥ 15	3,000

El número de estaciones en la región de Andalucía es de ocho. Por lo tanto, el valor crítico a considerar es de 2,140. En la tabla 4.10 se muestran los valores del estadístico en cuestión para cada duración y estación analizadas.

Tabla 4.10. Valores de discordancia para las estaciones andaluzas

	INTERVALOS DE TIEMPO (minutos)								
	10	20	30	60	120	180	360	720	1440
ALMERÍA	0,29	1,24	1,42	0,58	0,77	0,73	0,99	1,11	1,08
CÁDIZ	1,23	0,77	1,16	0,54	1,45	0,83	0,97	1,76	0,67
CÓRDOBA	1,33	1,44	0,84	1,36	1,18	1,20	0,84	0,57	2,00
GRANADA	1,24	0,83	0,66	0,28	0,53	0,31	0,31	0,72	0,51
HUELVA	0,15	1,09	1,47	1,73	0,70	1,44	1,00	0,82	0,58
JAEN	0,32	0,52	0,18	1,61	0,24	0,12	0,16	0,41	0,76
MÁLAGA	1,36	1,24	1,17	0,84	0,89	1,38	1,77	0,96	0,95
SEVILLA	2,08	0,87	1,09	1,06	2,24	2,00	1,96	1,64	1,44

Tal y como puede verse, tan solo Sevilla debe considerarse discordante y por lo tanto excluirse del análisis regional al considerar la duración de 2 horas. Los nuevos

valores de discordancia para dicha duración y para las siete localidades que permanecen en el análisis, se muestran en la tabla 4.11. Para siete estaciones, el valor límite de discordancia es de 1,917 (Tabla 4.9). Por lo tanto, una vez excluida la estación discordante, las que quedan dentro del análisis para la duración de 2 horas cumplen con el valor de discordancia requerido.

Tabla 4.11. Valores de discordancia para las estaciones andaluzas para 2 horas y una vez excluida Sevilla

	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga
D_i	0,63	1,87	1,20	0,55	0,66	1,01	1,09

El siguiente paso, una vez determinadas y excluidas del análisis en su caso, las estaciones que se consideren discordantes, es determinar la homogeneidad de la región desde el punto de vista de la precipitación máxima para una determinada duración.

Para evaluar cuando una región propuesta puede considerarse homogénea debe realizarse una prueba de heterogeneidad H . Este estadístico evalúa cuando un grupo de estaciones pueden ser tratadas en su conjunto como una región homogénea. Compara la variabilidad de los momentos-L muestrales de las estaciones con la esperada tras emplear técnicas de simulación. La prueba empleada utiliza la varianza ponderada del coeficiente de variación lineal de cada una de las estaciones según el estadístico:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^N n_i (t^{(i)} - t^R)^2 / \sum_{i=1}^N n_i \right\}^{1/2} \quad (4.11)$$

Siendo, $t^R = \sum_{i=1}^N n_i t^{(i)} / \sum_{i=1}^N n_i$, N el número de estaciones, n_i el número de registros y

$t^{(i)}$ el valor de los momentos lineales de la muestra.

Se trata ahora de calcular la media y la desviación estándar de $V (\mu_v, \sigma_v)$ para una serie de simulaciones N_{sim} . El número de simulaciones se selecciona de manera que las estimaciones de μ_v y σ_v resulten fiables. Hosking y Wallis (1997 § 4) consideran que un valor de $N_{sim}=500$ es adecuado para obtener tales resultados.

Una vez calculado V , la medida de la heterogeneidad vendrá dada por:

$$H = \frac{(V - \mu_v)}{\sigma_v} \quad (4.12)$$

Una región podrá considerarse homogénea si $H < 1$, posiblemente heterogénea si $1 \leq H < 2$, y heterogénea para valores de H superiores a 2 (Hosking y Wallis, 1997)

Tabla 4.12. Valores del estadístico H para Andalucía

	10min	20min	30min	1h	2h	3h	6h	12h	24h
H	6,16	4,63	3,21	3,00	1,45	2,00	2,42	1,85	1,87

La tabla 4.12 recoge los valores del estadístico H para cada una de las duraciones de precipitación analizadas. Como puede verse, Andalucía no puede considerarse una región homogénea desde el punto de vista de la precipitación máxima para ninguna de las duraciones analizadas. Tan solo para las duraciones de 2, 12 y 24 horas, puede calificarse como posiblemente heterogénea. Además, para la duración de 2 horas debe recordarse que la región de estudio cuenta con solo siete estaciones.

Los factores que influyen en la distribución de la lluvia son muchos, de ahí los valores obtenidos para el estimador de la homogeneidad. Parece conveniente por lo tanto, dar un paso más y dividir la región Andalucía, en dos nuevas posible regiones, cada una de ellas con cuatro estaciones. La determinación de estas dos regiones se va a hacer siguiendo la división política existente entre Andalucía Occidental y Oriental. La primera de estas regiones, está formada por las estaciones de Cádiz, Córdoba, Huelva y Sevilla, mientras que la región de Andalucía Oriental la compondrán las restantes capitales andaluzas.

Volviendo a repetir el procedimiento ya descrito, hay que obtener para cada región y duración, el valor de la discordancia. Dicho valor es siempre igual a 1 en regiones con cuatro estaciones (Hosking y Wallis, 1997 § 3). De hecho, la prueba de discordancia no es de gran ayuda para regiones con menos de siete estaciones (Hosking y Wallis, 1997 § 3), por lo que debe esperarse a los resultados de las siguientes pruebas del análisis regional para determinar si Andalucía Oriental y Occidental pueden ser consideradas regiones, desde el punto de vista de la precipitación máxima.

La tabla 4.13 recoge el valor del estadístico H para las diversas duraciones en cada una de las dos nuevas posibles regiones. Andalucía Occidental es heterogénea para las duraciones de 10, 20 y 60 minutos, mientras que para el resto de duraciones se debe considerar como posiblemente heterogénea. Andalucía Oriental, sin embargo, se comporta como homogénea para las duraciones de 20, 30, 60 y 720 minutos, como heterogénea para una duración de 24 horas, siendo para el resto de duraciones posiblemente heterogénea pero con valores más cercanos a 1. Según Hosking y

Wallis (1997), cuando se obtienen valores inferiores a 2 puede aceptarse la homogeneidad de la región. A la vista de los resultados, se considera Andalucía Oriental como región homogénea desde el punto de vista de la precipitación máxima para todas las duraciones. El valor de H obtenido para la duración de 24 horas es prácticamente igual a 2, por lo que lo se incluye esta duración en la consideración de homogeneidad.

Tabla 4.13. Valor del estadístico H para Andalucía Occidental y Oriental

Andalucía	10min	20min	30min	1h	2h	3h	6h	12h	24h
Occidental	5,71	2,63	1,88	2,25	1,73	1,51	1,75	1,91	1,08
Oriental	1,02	0,01	-0,03	0,54	1,27	1,13	1,49	0,75	2,01

Una vez estudiada la homogeneidad de la región, ha de encontrarse una función de distribución a la que ajustar todos los datos de lluvia máxima para una misma duración. Generalmente no existe una única distribución posible. Si se dispone de una serie de distribuciones candidatas, que ajustan los datos adecuadamente, cualquiera de ellas puede ser una elección razonable, pero la mejor elección vendrá dada por aquella que proporcione una mejor estimación de los cuantiles, incluso aunque los valores futuros de precipitación se ajusten a una distribución algo diferente a la elegida.

La bondad del ajuste juzgará en qué medida los coeficientes lineales de sesgo y curtosis de la distribución seleccionada se ajustan bien al promedio regional de tales coeficientes con los datos observados. Para medir la bondad del ajuste a una distribución de tres parámetros (Hosking y Wallis, 1997 § 5) debe calcularse el estadístico:

$$Z^{DIST} = (\tau_4^{DIST} - t_4^R + B_4) / \sigma_4 \quad (4.13)$$

Siendo τ_4^{DIST} , el coeficiente lineal de sesgo para la distribución propuesta; t_4^R el coeficiente lineal de curtosis para la región; σ_4 la desviación estándar de t_4^R , y B_4 un coeficiente función del número de simulaciones para mejorar el ajuste, y de t_4^R .

Se considera que el ajuste de una determinada distribución es adecuado si el estadístico Z^{DIST} es suficientemente cercano a cero, siendo un valor razonable para este criterio un grado de significación del 90%, que corresponde a un valor absoluto de Z^{DIST} menor o igual a 1,64 (Hosking y Wallis, 1997).

Las funciones de distribución elegidas como posibles candidatas a proporcionar un buen ajuste a los datos de la región Andalucía Oriental son (Apéndice 1):

- Logística generalizada (LOGGEN)
- General de valores extremos (GEV)
- Normal generalizada (NORGEN)
- Pearson tipo III (PT3)
- Pareto generalizada (PARGEN)

La tabla 4.14 recoge el valor del estadístico Z^{DIST} obtenido para cada función de distribución con los datos de lluvia máxima de cada una de las duraciones analizadas. En gris aparecen los valores que en valor absoluto son menores o iguales a 1,64.

Tabla 4.14. Valor del estadístico Z^{DIST} para Andalucía Oriental

Z^{DIST}	DURACIÓN (minutos)								
	10	20	30	60	120	180	360	720	1.440
FUNCIÓN									
LOGGEN	3,18	2,62	2,44	1,94	0,91	0,75	1,12	0,58	1,38
GEV	2,31	1,89	1,76	1,37	0,51	0,30	0,51	-0,02	0,52
NORGEN	1,97	1,49	1,34	0,92	0,04	-0,12	0,15	-0,34	0,30
PT3	1,35	0,79	0,61	0,15	-0,74	-0,84	-0,48	-0,92	-0,15
PARGEN	0,21	0,03	0,00	-0,18	-0,70	-0,98	-1,05	-1,53	-1,46

Como puede verse en la tabla anterior, las dos funciones de distribución que a priori pueden proporcionar un ajuste satisfactorio de los datos de lluvia para todas las duraciones, son la Pearson Tipo III y la función Pareto Generalizada.

Para poder discriminar cual es la función de distribución que mejor se ajusta a los datos disponibles, es necesario realizar un análisis de precisión de los cuantiles que se obtendrían con cada una de ellas. Para ello se utiliza el método de simulación de Montecarlo. Éste es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante simulación de variables aleatorias. Su algoritmo tiene una estructura muy sencilla. Se elabora primero un programa para realizar una prueba aleatoria que se repetirá M veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes. Se tomará la media de los resultados de todos los experimentos (Sóbol, 1976). La idea es ver hasta qué punto los datos disponibles en una región pueden dar resultados dentro de un margen de confianza suficiente.

Para cada una de las duraciones analizadas se parte del número de registros de cada estación, así como de los coeficientes de variación y de sesgo de cada una de las series. Con estos datos, la aplicación del método de Montecarlo permite obtener los valores de sesgo y de raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), de los

cuantiles que se estiman a partir de una determinada función de distribución. Serán estos valores los que permitan elegir la función de distribución más precisa para la región Andalucía Oriental.

Según Hosking y Wallis (1997) la raíz cuadrada del error cuadrático medio es la mejor medida de precisión. Por ello se establece este dato como referente (tabla 4.15) para elegir la función de distribución más adecuada para ajustar los datos de la región de estudio.

Tabla 4.15. Valor RMSE para las funciones en estudio

Duración (min)	Pearson	Pareto
10	0,995	1,066
20	0,849	0,960
30	0,868	0,918
60	0,956	1,016
120	1,154	1,177
180	1,116	1,146
360	1,015	1,035
720	0,964	0,987
1440	0,868	0,884

Para todas las duraciones, el valor del error es inferior al trabajar con la función de distribución Pearson Tipo III, por lo que será esta la función que se utilice para obtener los valores de los cuantiles para diversas duraciones y períodos de retorno en cada una de las estaciones que componen la región Andalucía Oriental.

Una vez decidida la función de distribución que mejor ajuste proporciona a los datos existentes en la región Andalucía Oriental, el objetivo es ajustar dicha función de distribución de frecuencias a las observaciones máximas de cada estación de la región, teniendo en cuenta un factor de escala, el índice de avenida. Una vez dado este paso, pueden estimarse los cuantiles asociados a determinados periodos de retorno, tanto para la región como para cada una de sus estaciones. Para cada una de las M estaciones de la región se determinan los cuatro primeros momentos lineales λ_j , adimensionalizándolos posteriormente al dividir cada uno de ellos por la media de la serie λ_1 . Con los valores obtenidos se calculan los valores regionales λ_j^R

$$\lambda_{(j)}^R = \sum_{s=1}^M \lambda_{(j)s} [N_s / L] \quad (4.14)$$

$$L = \sum_{j=1}^M N_j \quad (4.15)$$

La contribución de cada estación con N_i observaciones al promedio se pondera en función de la longitud de la serie, a través de L (ecuación 4.15). Obtenidos los momentos lineales y caracterizada, gracias a ellos, la función de distribución acumulada, puede plantearse $X = X(F)$ para distintos periodos de retorno y obtener los cuantiles dividiendo estos valores extremos de la variable por la media anual muestral (Álvarez *et al.*, 1999)

Las tablas 4.16 a 4.19 recogen los valores de precipitación máxima para diversos periodos de retorno, calculados mediante la función de distribución Pearson Tipo III tras ajustar los datos máximos existentes en cada una de las estaciones a dicha función de distribución.

Tabla 4.16. Alturas de lluvia para diversas duraciones y periodos de retorno obtenidas mediante AR. Almería.

Almería	Período de retorno (años)								
	t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25
10	6,54	8,40	9,56	10,46	13,15	14,49	15,73	16,54	19,02
20	9,80	12,74	14,61	16,07	20,48	22,68	24,74	26,09	30,24
30	12,11	15,85	18,25	20,13	25,83	28,70	31,38	33,14	38,56
60	15,80	20,80	24,03	26,59	34,36	38,29	41,97	44,39	51,87
120	20,33	26,49	30,59	33,89	44,11	49,36	54,31	57,59	67,78
180	23,02	29,72	34,12	37,62	48,39	53,88	59,04	62,45	73,01
360	28,42	35,80	40,48	44,14	55,15	60,67	65,80	69,18	79,54
720	31,65	39,91	45,15	49,26	61,6	67,78	73,53	77,32	88,93
1.440	34,01	42,20	47,30	51,26	63,03	68,86	74,27	77,82	88,64

Tabla 4.17. Alturas de lluvia para diversas duraciones y periodos de retorno obtenidas mediante AR. Granada.

Granada	Período de retorno (años)								
	t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25
10	5,84	7,50	8,53	9,34	11,74	12,93	14,04	14,76	16,98
20	7,98	10,38	11,90	13,10	16,69	18,49	20,16	21,26	24,64
30	9,14	11,97	13,78	15,20	19,50	21,67	23,69	25,02	29,11
60	10,78	14,19	16,40	18,14	23,44	26,13	28,64	30,29	35,39
120	13,70	17,85	20,62	22,84	29,72	33,26	36,60	38,81	45,67
180	15,81	20,41	23,43	25,83	33,22	36,99	40,54	42,88	50,13
360	20,93	26,37	29,82	32,52	40,63	44,70	48,48	50,97	58,60
720	25,09	31,64	35,79	39,05	48,83	53,73	58,29	61,29	70,50
1.440	28,02	34,76	38,96	42,23	51,92	56,73	61,19	64,11	73,03

Tabla 4.18. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Málaga.

Málaga	Período de retorno (años)								
t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25	50
10	10,64	13,66	15,55	17,02	21,40	23,57	25,58	26,91	30,94
20	15,07	19,60	22,48	24,73	31,51	34,90	38,07	40,14	46,53
30	17,77	23,27	26,78	29,55	37,91	42,12	46,04	48,63	56,58
60	21,27	28,00	32,36	35,80	46,26	51,55	56,51	59,77	69,84
120	29,19	38,04	43,94	48,67	63,35	70,89	78,00	82,71	97,35
180	33,54	43,30	49,71	54,81	70,50	78,50	86,02	90,99	106,37
360	44,18	55,65	62,93	68,62	85,75	94,32	102,30	107,55	123,65
720	49,92	62,95	71,21	77,68	97,15	106,90	115,97	121,94	140,25
1.440	54,64	67,78	75,97	82,34	101,25	110,62	119,31	125,00	142,39

Tabla 4.19. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AR. Jaén.

Jaén	Período de retorno (años)								
t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25	50
10	5,57	7,15	8,14	8,91	11,20	12,33	13,39	14,08	16,19
20	8,28	10,76	12,34	13,58	17,30	19,17	20,90	22,05	25,55
30	10,39	13,61	15,66	17,28	22,17	24,63	26,92	28,44	33,09
60	15,76	20,75	23,98	26,53	34,28	38,21	41,88	44,3	51,76
120	19,47	25,37	29,3	32,46	42,25	47,27	52,02	55,16	64,92
180	21,74	28,06	32,22	35,53	45,69	50,88	55,75	58,97	68,94
360	27,93	35,19	39,79	43,39	54,21	59,64	64,68	68,00	78,18
720	31,94	40,28	45,57	49,71	62,17	68,41	74,21	78,03	89,75
1.440	38,21	47,40	53,13	57,58	70,80	77,36	83,43	87,41	99,57

Los datos de lluvia de las tablas anteriores pueden utilizarse directamente para diversos cálculos hidrológicos e hidráulicos que los requieran, o bien ajustarse a alguno de los modelos paramétricos IDF existentes previa conversión a valores de intensidad.

4.4.3.2. Análisis Regional Intraestación (ARI)

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el análisis regional de frecuencias establece regiones que pueden considerarse homogéneas desde el punto de vista de una determinada variable. La región se compone de una serie de estaciones, cuyos

datos conforman el volumen total de datos a analizar en la misma. En el análisis descrito en la sección 4.4.3.1 la región final establecida ha sido Andalucía Oriental, compuesta por cuatro estaciones que coinciden con cuatro capitales de provincia: Almería, Granada, Málaga y Jaén.

Como variante del análisis regional descrito, se presenta ahora un análisis regional intraestación. Se parte nuevamente de las series de datos de precipitación máxima existentes en cada una de las localidades citadas en la tabla 4.8. Todas estas localidades se establecieron como estaciones de una primera posible región denominada Andalucía. Pues bien, en el presente análisis, cada una de las localidades es una supuesta región, y sus estaciones son las series de datos de precipitaciones máximas existentes en cada una de ellas. De esta forma, se cuenta con ocho posibles regiones, cada una de ellas con nueve estaciones. Se trata por lo tanto, de realizar ocho análisis regionales.

Para poder estudiar si cada una de las ocho localidades constituyen en si misma una región homogénea, el primer paso es analizar la posible discordancia de alguna de las estaciones que la componen. Es decir, para cada localidad, se busca si alguna de sus series de datos máximos es discordante respecto al resto.

La tabla 4.20 muestra los valores de la discordancia para cada una de las estaciones que componen cada posible región.

Tabla 4.20. Valores de discordancia para las estaciones de las ocho regiones de estudio

Estación	Región							
	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Málaga	Jaén	Sevilla
10	0,38	2,13	0,99	1,95	2,30	2,31	1,15	2,90
20	1,34	0,35	1,36	0,95	0,20	0,29	0,32	0,59
30	1,42	0,42	0,45	1,27	0,86	0,68	0,80	0,55
60	0,71	0,36	1,79	1,16	1,10	0,62	1,72	1,58
120	1,29	1,06	1,13	1,56	0,35	0,96	0,80	0,44
180	0,57	1,05	1,07	1,03	1,04	0,77	0,68	1,32
360	2,21	1,51	0,77	0,36	1,04	1,89	1,15	0,60
720	0,40	1,81	1,29	1,03	0,64	0,16	0,40	1,13
1.440	1,50	0,40	0,71	1,20	2,30	0,77	2,08	0,62

Tal y como se comentó con anterioridad, el valor crítico de la discordancia depende del número de estaciones de la región que se analice. Según la tabla 4.9, para nueve estaciones, dicho valor es de 2,329. Según este límite, para seguir analizando si

Sevilla puede considerarse una región homogénea desde el punto de vista de la precipitación, ha de eliminarse del análisis la estación “10 min”, es decir, ha de realizarse un nuevo análisis de discordancia considerando todas las series de precipitación máxima excepto la de diez minutos. Los resultados de este nuevo análisis se muestran en la tabla 4.21, donde puede observarse que todos los valores de discordancia se encuentran por debajo del límite establecido para 8 estaciones (Tabla 9).

Tabla 4.21. Valores de discordancia para las estaciones de la región Sevilla

		Estación							
Región	Sevilla	20	30	60	120	180	360	720	1.440
		1,15	1,17	1,66	0,37	1,16	0,73	0,99	1,30

Una vez estudiada la posible discordancia de cada una de las estaciones componentes de las regiones de estudio, ha de obtenerse el valor del estadístico H , indicador del grado de homogeneidad de cada una de las regiones.

Tabla 4.22. Valor de homogeneidad para cada una de las regiones de estudio

	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Málaga	Jaén	Sevilla
H	-2,45	-0,66	-0,82	0,38	-1,40	-0,42	-1,00	4,43

Siempre que el valor de H sea inferior a la unidad, puede hablarse de homogeneidad en la región analizada. A la vista de los resultados que aparecen en la tabla 4.22, todas las regiones, excepto Sevilla, pueden considerarse como homogéneas desde el punto de vista de las precipitaciones máximas. El valor de H obtenido en Sevilla excede holgadamente el límite que marca la heterogeneidad de la región.

A partir de este momento, podría continuarse con el análisis regional de cada una de las siete regiones establecidas, de forma que al final se obtendrían una serie de cuantiles máximos correspondientes a diversas duraciones y períodos de retorno. Sin embargo, el objetivo que se persigue en esta sección (4.4) es la comparación de los cuantiles obtenidos en una misma localidad siguiendo diversas metodologías de análisis, para obtener el modelo paramétrico IDF más preciso. En función de los resultados obtenidos hasta este momento con los análisis regionales de frecuencias, ha de elegirse una localidad en la que se centrarán el resto de metodologías. Del análisis regional de Andalucía, se extrajo la región Andalucía Oriental, compuesta por cuatro estaciones. Del análisis regional intraestación, se ha visto que esas cuatro

estaciones también forman una región en si mismas desde el punto de vista de la variable analizada. Por lo tanto, ha de elegirse entre Almería, Granada, Málaga y Jaén. Granada y Jaén no han sido incluidas en ningún análisis anterior en este trabajo, por lo que se descarta su uso en este momento. De las dos localidades restantes, nos decantamos por Málaga, y descartamos Almería, por estar esta última estación más caracterizada por su régimen de sequía que por la lluvia. Por lo tanto, se continúa el análisis regional intraestación de precipitación para la región de Málaga. Para determinar las funciones de distribución más adecuadas a la hora de ajustar los datos máximos disponibles en la región, ha de calcularse el valor del estadístico Z^{DIST} . La tabla 4.23 recoge el valor de este estadístico para las mismas funciones utilizadas con anterioridad. Solo los valores correspondientes a las funciones Pearson Tipo III y Pareto Generalizada cumplen la condición establecida para el valor del estadístico en cuestión, es decir, para estas funciones el valor absoluto de Z^{DIST} es inferior a 1,64.

Tabla 4.23. Valor del estadístico Z^{DIST} para Málaga

Función	LOGGEN	GEV	NORGEN	PT3	PARGEN
Z^{DIST}	4,64	3,69	2,90	1,55	1,09

Nuevamente se presentan dos posibles funciones de distribución y ha de determinarse cual es la más apropiada. Para ello, se aplica de nuevo un análisis de precisión de los cuantiles que se obtendrían con ambas funciones, mediante la aplicación del método de simulación de Montecarlo. Según los valores obtenidos para la raíz cuadrada del error cuadrático medio, se comprueba que es la función de distribución Pearson Tipo III la que genera los valores más pequeños de este indicador para la mayoría de períodos de retorno estudiados (Tabla 4.24).

Tabla 4.24. Valor RMSE para las funciones en estudio

T (años)	Pearson	Pareto
2	0,077	0,064
3	0,035	0,044
4	0,021	0,034
5	0,027	0,031
10	0,067	0,051
15	0,086	0,071
20	0,101	0,092
25	0,111	0,107
50	0,136	0,153
100	0,156	0,202
total	0,233	0,266

Los cuantiles calculados para Málaga utilizando la función de distribución Pearson Tipo III se muestran en la tabla 4.25. Estos datos pueden nuevamente ajustarse a cualquier modelo de curva IDF para obtener así los datos necesarios en cualquier tipo de cálculo.

Tabla 4.25. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante ARI. Málaga.

Málaga	Período de retorno (años)								
	t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25
10	10,02	13,39	15,58	17,32	22,64	25,34	27,87	29,55	34,71
20	14,48	19,35	22,52	25,03	32,72	36,63	40,29	42,71	50,18
30	17,27	23,07	26,84	29,84	39,01	43,66	48,03	50,91	59,82
60	20,91	27,93	32,50	36,13	47,23	52,87	58,15	61,64	72,43
120	29,18	38,98	45,37	50,43	65,93	73,80	81,18	86,05	101,11
180	32,92	43,97	51,17	56,89	74,36	83,24	91,57	97,06	114,05
360	41,56	55,52	64,61	71,83	93,89	105,10	115,61	122,56	144,00
720	47,01	62,80	73,08	81,24	106,20	118,88	130,76	138,62	162,87
1.440	58,93	78,72	91,61	101,84	133,13	149,02	163,92	173,76	204,17

4.4.3.3. Análisis Local de frecuencias (AL)

En el análisis de frecuencias de cualquier variable hidrológica siempre es necesario seleccionar una función de distribución de probabilidad basada en los datos de la muestra, y hacer predicciones de la probabilidad para un valor seleccionado de la variable objeto de estudio, o estimar el valor de la variable hidrológica para una probabilidad determinada. Los datos de la muestra pueden usarse para identificar una función de distribución de probabilidad que pueda representar de forma válida a la población. Dicha función podrá entonces usarse para hacer las predicciones necesarias.

Las distribuciones de valores como caudales máximos anuales o precipitaciones máximas anuales, por ejemplo, tienden a seguir alguna de las tres formas de la función de distribución de valores extremos, llamadas:

- Tipo I. Las propiedades de la distribución de valores extremos tipo I fueron desarrollados por Gumbel.
- Tipo II. Las propiedades de la distribución de valores extremos tipo II fueron desarrollados por Frechet.

- Tipo III. Las propiedades de la distribución de valores extremos tipo III fueron desarrollados por Weibull.

Las tres formas límites son casos especiales de la función de distribución denominada *Distribución de Valores Extremos Generalizada* (GEV). La función de distribución GEV, viene dada por:

$$F(x) = \exp \left[- \left(1 - k \frac{x-u}{\alpha} \right)^{1/k} \right] \quad (4.16)$$

donde k , u , y α son los parámetros a determinar.

Los tres casos límite son:

1. Para $k = 0$ Valores extremos tipo I (EVI), la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[- \frac{x-u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \quad -\infty < x < \infty \quad (4.17)$$

Distribución de Gumbel

2. Para $k < 0$ Distribución de valores extremos tipo II, la función de densidad es

$$f(x) = \exp \left[- \left(1 - k \frac{x-u}{\alpha} \right)^{1/k} \right] \quad \left(u + \frac{\alpha}{k} \right) \leq x \leq \infty \quad (4.18)$$

Distribución de Frechet

3. Para $k > 0$ Distribución de valores extremos tipo III, la función de densidad es

$$f(x) = \exp \left[- \left(1 - k \frac{x-u}{\alpha} \right)^{1/k} \right] \quad -\infty \leq x \leq \left(u + \frac{\alpha}{k} \right) \quad (4.19)$$

Distribución de Weibull

La función de distribución de valores extremos tipo I o de Gumbel es una de las más utilizadas en el análisis de frecuencias de variables hidrológicas extremas. Por ello, será la que se utilice para el análisis local de frecuencias de las precipitaciones máximas en Málaga.

A partir de los datos de lluvia disponibles en Málaga, se seleccionan las mismas series de datos máximas utilizadas en los análisis regionales llevados a cabo

anteriormente para la misma localidad. Se cuenta por lo tanto con nueve series de precipitaciones máximas, para duraciones que oscilan entre 10 y 1440 minutos.

Para cada serie de máximos se realiza el análisis de frecuencias mediante la función de distribución de probabilidad de Gumbel (citado por Chow *et al.*, 1988, § 12),

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-e^{\alpha(x-\beta)}} \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (4.20)$$

siendo P la probabilidad de que un valor extremo anual X , sea inferior a un cierto valor x . La relación entre probabilidad P y el periodo de retorno es,

$$T = \frac{1}{1 - P(X \leq x)} \quad (4.21)$$

Para cada una de las series de precipitaciones máximas, se asigna la probabilidad de excedencia mediante la fórmula de Gringorten,

$$P(X \leq x_m) = \frac{m - 0,44}{n + 0,12} \quad (4.22)$$

donde P denota la probabilidad de excedencia del m -ésimo mayor valor, x_m ; m , el ordinal de cada calado de lluvia dispuesta en orden decreciente de magnitud; y n el número de datos de la serie. Para datos distribuidos según la ley de distribución de Gumbel, Chow *et al.* (1988) recomiendan la utilización de esta expresión.

Los valores de los parámetros α y β que caracterizan a la función de distribución de Gumbel para cada una de las series de datos máximas analizadas, se muestran en la tabla 4.26.

Tabla 4.26. Valores de los parámetros α y β para cada serie analizada en Málaga

	Intervalos de tiempo (minutos)								
	10	20	30	60	120	180	360	720	1.440
α	0,154	0,105	0,087	0,074	0,051	0,046	0,042	0,038	0,034
β	8,606	12,369	14,636	18,864	24,748	27,933	37,410	42,681	55,441

La expresión que relaciona la altura de lluvia de un episodio X_T con el período de retorno T viene dada por,

$$x_T = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (4.23)$$

Con la expresión anterior pueden obtenerse los valores de altura de lluvia para cada duración y período de retorno (Tabla 4.27).

Tabla 4.27. Alturas de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno obtenidas mediante AL. Málaga.

Málaga	Período de retorno (años)								
	t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25
10	10,99	14,47	16,70	18,35	23,22	25,97	27,89	29,37	33,94
20	15,86	20,96	24,22	26,64	33,78	37,81	40,63	42,80	49,49
30	18,86	25,05	29,01	31,94	40,60	45,48	48,90	51,54	59,65
60	23,81	31,04	35,67	39,10	49,22	54,93	58,93	62,01	71,50
120	31,89	42,33	49,02	53,96	68,58	76,83	82,60	87,05	100,75
180	35,97	47,74	55,27	60,84	77,30	86,59	93,10	98,11	113,54
360	46,16	58,96	67,16	73,22	91,14	101,25	108,33	113,78	130,58
720	52,34	66,47	75,51	82,20	101,97	113,13	120,94	126,95	145,49
1.440	66,28	82,13	92,28	99,79	121,98	134,49	143,26	150,01	170,81

4.4.3.4. Multifractalidad y curvas IDF

El escalado de las curvas IDF es una característica ampliamente estudiada (e.g. Veneziano y Furcolo, 2002; Langousis y Veneziano, 2007). Autores como Schertzer y Lovejoy (1987, 1996) y Veneziano y Furcolo (2002), han obtenido relaciones de escala para la probabilidad de excedencia de medidas multifractales estacionarias, cuya generalización es la base para relacionar la multifractalidad de la lluvia con las propiedades de escala simple de las curvas IDF.

Según Veneziano y Furcolo (2002), el valor de la singularidad máxima (γ_{max}) asociada al valor del momento crítico q_D en la representación de la función exponente empírica escaladora de momentos $K(q)$ (ecuación 2.4), puede relacionarse con el valor de la pendiente de las curvas IDF de un mismo lugar ajustadas para duraciones superiores a una hora y determinados períodos de retorno. Así, el valor de la pendiente de la curva correspondiente a cada período de retorno debe estar próximo al valor de γ_{max} obtenido para la misma localidad.

De igual forma, si se representa en un diagrama doblemente logarítmico la relación entre los valores de intensidad media de lluvia para un determinado valor de período de retorno, debe obtenerse una línea recta cuya pendiente ha de ser próxima a $1/q_D$.

En la literatura pueden encontrarse gran variedad de expresiones analíticas para las curvas IDF (Chow, 1964; Bell, 1969; Chen, 1983; Garcia-Bartual y Scheider, 2001), caracterizadas por un número variable de parámetros, normalmente entre 2 y 4 (Di

Baldassarre *et al.*, 2006). La elección correcta del modelo de curva IDF utilizado en un lugar concreto, puede mejorar el cálculo de la tormenta de diseño necesaria para realizar determinados cálculos hidrológicos. Por este motivo, se trata en esta sección de analizar una serie de modelos de curvas IDF existentes, para ver cuales son más adecuados para ajustar los datos de lluvia obtenidos para Málaga mediante los diversos análisis de frecuencias realizados, teniendo en cuenta su proximidad a los resultados multifractales obtenidos para la lluvia en la misma localidad.

a. Análisis multifractal de la lluvia horaria en Málaga

Para obtener la función exponente empírica escaladora de momentos $K(q)$ ha de obtenerse previamente la representación doblemente logarítmica de los q -ésimos momentos de la intensidad de lluvia ε_λ para escalas temporales que oscilan desde 1 hora ($\lambda = 4.096$) hasta casi 6 meses ($\lambda = 1$), frente a la razón de escala λ , para Málaga. En la figura 4.37 (a) puede verse tal representación de los momentos. Las líneas rectas que se observan tanto para los momentos de mayor como de menor orden que la unidad, muestran el comportamiento de escala de los momentos, que se produce desde el valor de 1 hora hasta 21 días. La representación de la función exponente escaladora de momentos $K(q)$, para el intervalo de escala detectado en los datos de lluvia horaria en Málaga, se recoge también en la figura 4.37 (b). Como puede verse, la forma de la función $K(q)$ es básicamente convexa, lo que implica la multifractalidad de los datos de lluvia analizados. El valor obtenido para el momento crítico q_D es de 2,4 mientras que el valor de la singularidad asociada al mismo es de 0,75. Estos dos últimos valores característicos del análisis multifractal, serán los que se comparen con las características de las diversas curvas IDF calculadas para Málaga.

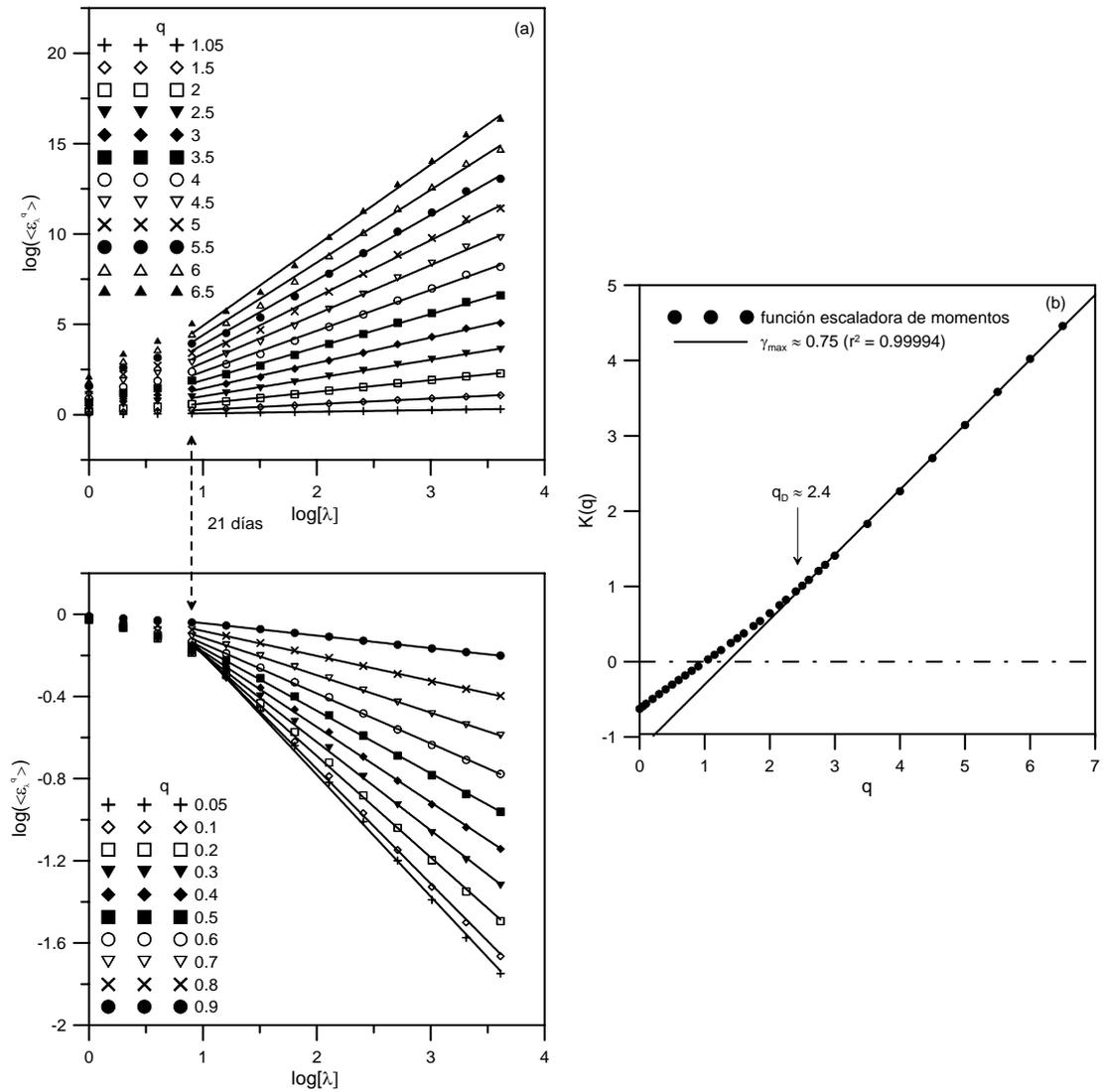


Figura 4.37. Obtención de los parámetros de escala para la lluvia horaria en Málaga

b. Obtención de las relaciones IDF

Como se ha mencionado con anterioridad son muchos los modelos paramétricos existentes que relacionan la intensidad media de lluvia con su duración y su probabilidad de ocurrencia. En esta sección no se pretende obtener un nuevo modelo, sino comprobar si alguno de los existentes resulta más adecuado para describir la precipitación en Málaga. Por ello, tres de las curvas IDF consideradas se han seleccionado a partir de los resultados obtenidos por Di Baldassarre *et al.* (2006) y la cuarta es la propuesta por Chow *et al.* (1988). Todas ellas, junto con sus parámetros, se muestran en la tabla 4.28.

Tabla 4.28. Modelos de curvas IDF utilizados

IDF	Modelo	Parámetros
1	$i = at^b$	2
2	$i = ab^{(28^{0.1} - t^{0.1})^{2.5}}$	2
3	$i = a(t + c)^{-b}$	3
4	$i = (aT^b)/(t^c + d)$	4

La ecuación 1 se conoce también como curva de Montana y es una de las más utilizadas. La segunda, también conocida como ecuación de Témez, fue propuesta por el centro español de estudios hidrográficos, CEDEX en 1987, y es ampliamente utilizada en España para todo tipo de estudios hidrológicos. La ecuación 3 es un caso particular de la curva de cuatro parámetros propuesta por Koutsoyiannis *et al.* (1998).

Para ajustar los parámetros de cada una de las funciones anteriores se utiliza el método de mínimos cuadrados (Chow *et al.*, 1988), siendo la función objetivo $U = \min \sum (i_{obs} - i_{pred})^2$. Para todas las curvas, excepto para la de cuatro parámetros, los ajustes se hacen independientemente para cada período de retorno.

Los datos de lluvia que se utilizan para efectuar los ajustes son los obtenidos mediante análisis de frecuencias, bien regional (los dos llevados a cabo, AR y ARI) o local (Tablas 4.18, 4.25 y 4.27). No obstante, al ser estos datos alturas de lluvia (mm) hay que transformarlos previamente en intensidades (mm/h), dividiéndolos entre la duración que les corresponda.

Las figuras 4.38, 4.39 y 4.40, muestran la representación de las curvas IDF obtenidas a partir de los datos resultantes del análisis regional, del análisis regional intraestación y del análisis local de frecuencias de los datos de lluvia de Málaga. En el eje de abscisas se representa la duración, mientras que en el eje de ordenadas aparecen los valores de intensidad media de lluvia. Cada período de retorno se representa por una línea independiente de las demás.

Los parámetros obtenidos para cada uno de los modelos paramétricos utilizados se recogen en las tablas 4.29, 4.30, 4.31 y 4.32. La información de las tres primeras tablas, hace referencia a las curvas 1, 2 y 3, para los datos obtenidos mediante análisis regional, intraestación y local respectivamente. Para todos los datos, los parámetros de la curva 4 se muestran en la tabla 4.32.

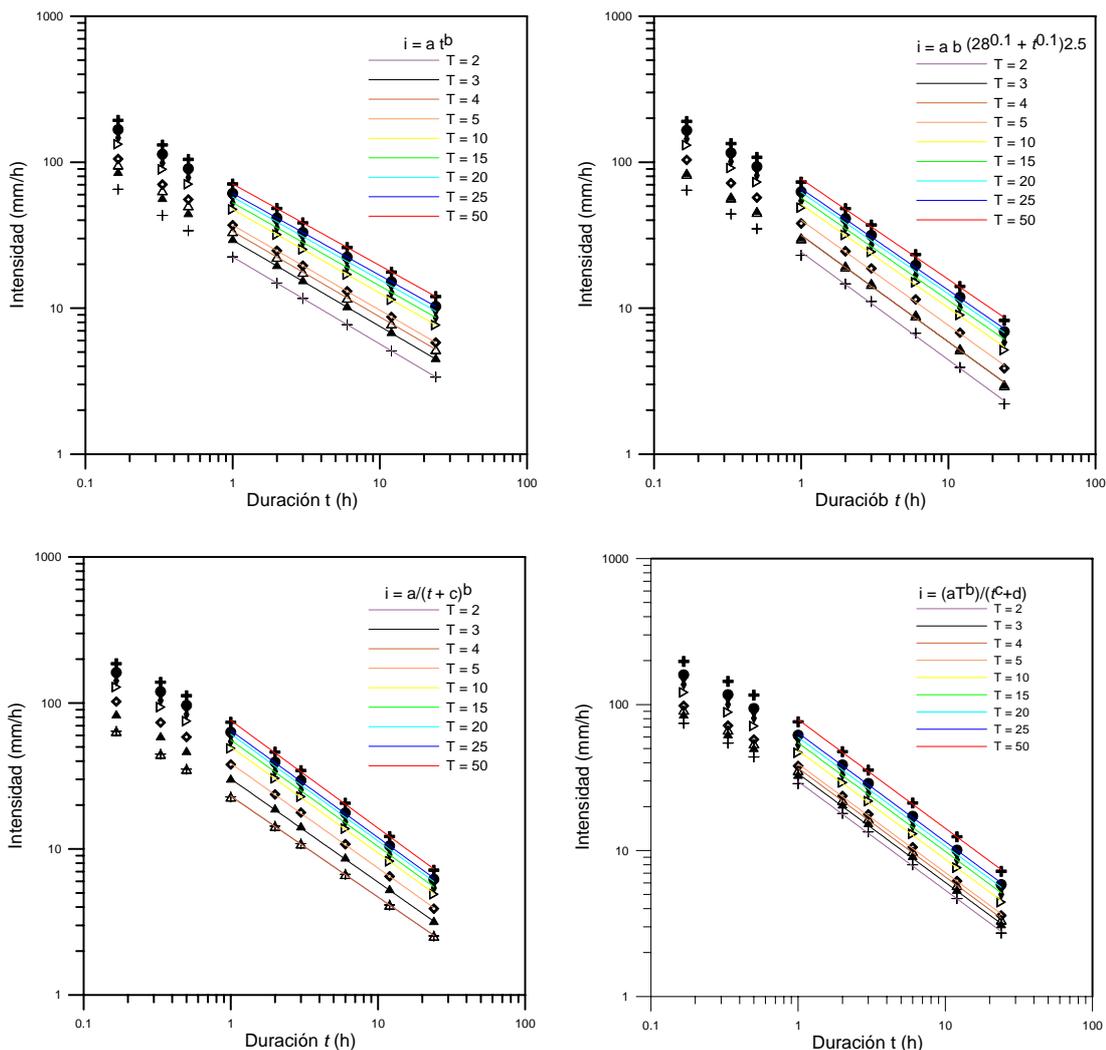


Figura 4.38. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis regional.

Tabla 4.29. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis regional

	Curva							
	1		2		3			
	a	b	a	b	a	b	c	
T	2	257,686	-0,596	36,440	5,281	436,328	0,707	5,071
	3	327,844	-0,590	47,279	5,186	633,580	0,728	6,504
	4	370,394	-0,586	54,184	5,118	765,577	0,738	7,285
	5	402,997	-0,583	59,602	5,066	872,206	0,743	7,843
	10	498,433	-0,574	75,930	4,929	1208,219	0,757	9,293
	15	544,916	-0,570	84,111	4,869	1385,663	0,762	9,939
	20	587,668	-0,567	91,736	4,819	1558,759	0,767	10,518
	25	609,618	-0,561	96,761	4,791	1667,810	0,769	10,815
	50	700,897	-0,559	112,166	4,709	2032,402	0,776	11,805

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

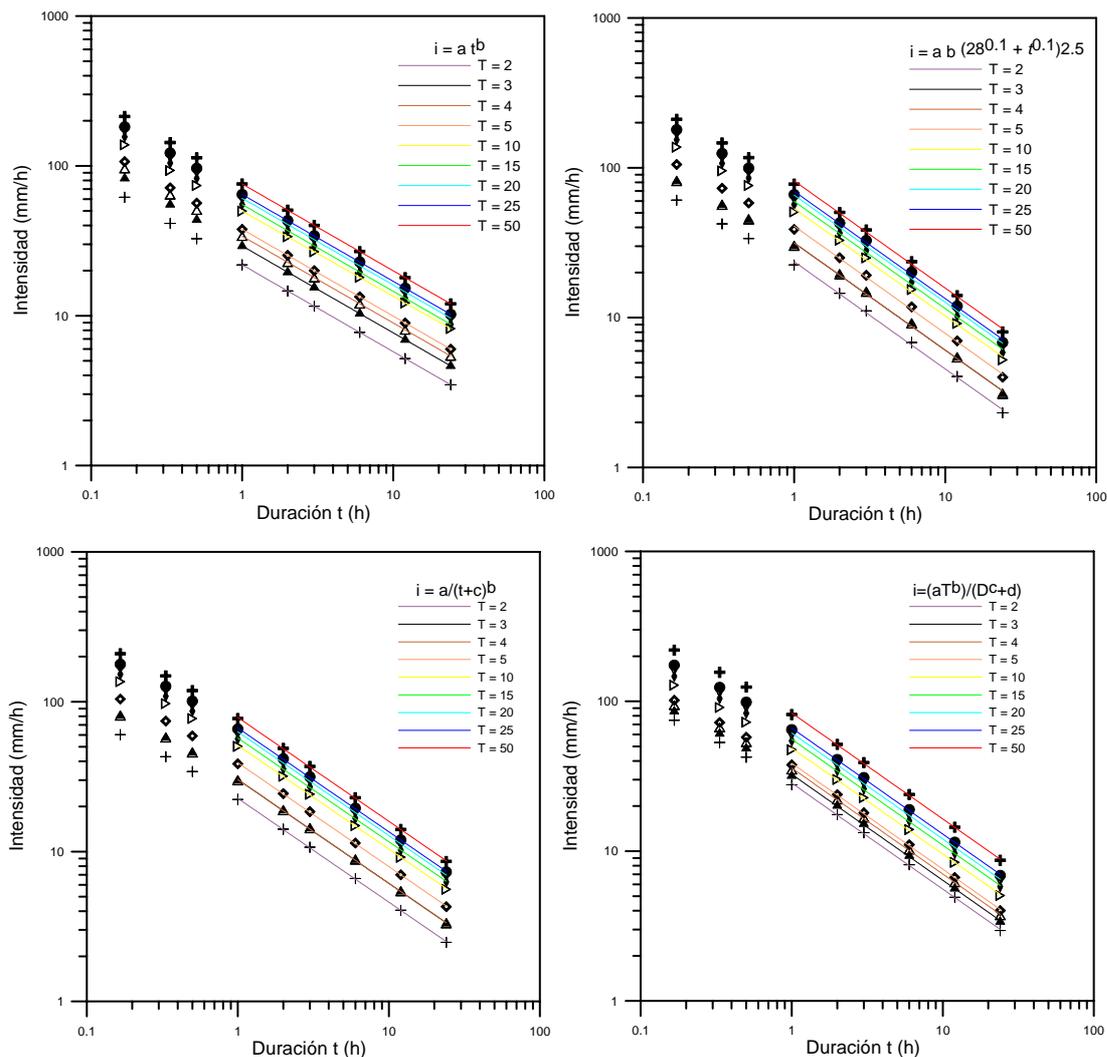


Figura 4.39. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis intraestación.

Tabla 4.30. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis intraestación

	Curva							
	1		2		3			
	a	b	a	b	a	b	c	
T	2	234,689	-0,580	35,072	5,018	444,677	0,713	6,484
	3	313,758	-0,580	46,859	5,021	594,666	0,713	6,484
	4	365,006	-0,580	54,529	5,020	691,393	0,713	6,479
	5	405,802	-0,580	60,615	5,020	768,760	0,713	6,480
	10	511,342	-0,568	79,238	5,020	1004,777	0,713	6,481
	15	593,615	-0,580	88,694	5,019	1125,156	0,713	6,487
	20	652,842	-0,580	97,557	5,018	1238,548	0,713	6,497
	25	692,325	-0,580	103,420	5,020	1311,694	0,713	6,481
	50	812,990	-0,580	121,505	5,019	1542,481	0,713	6,499

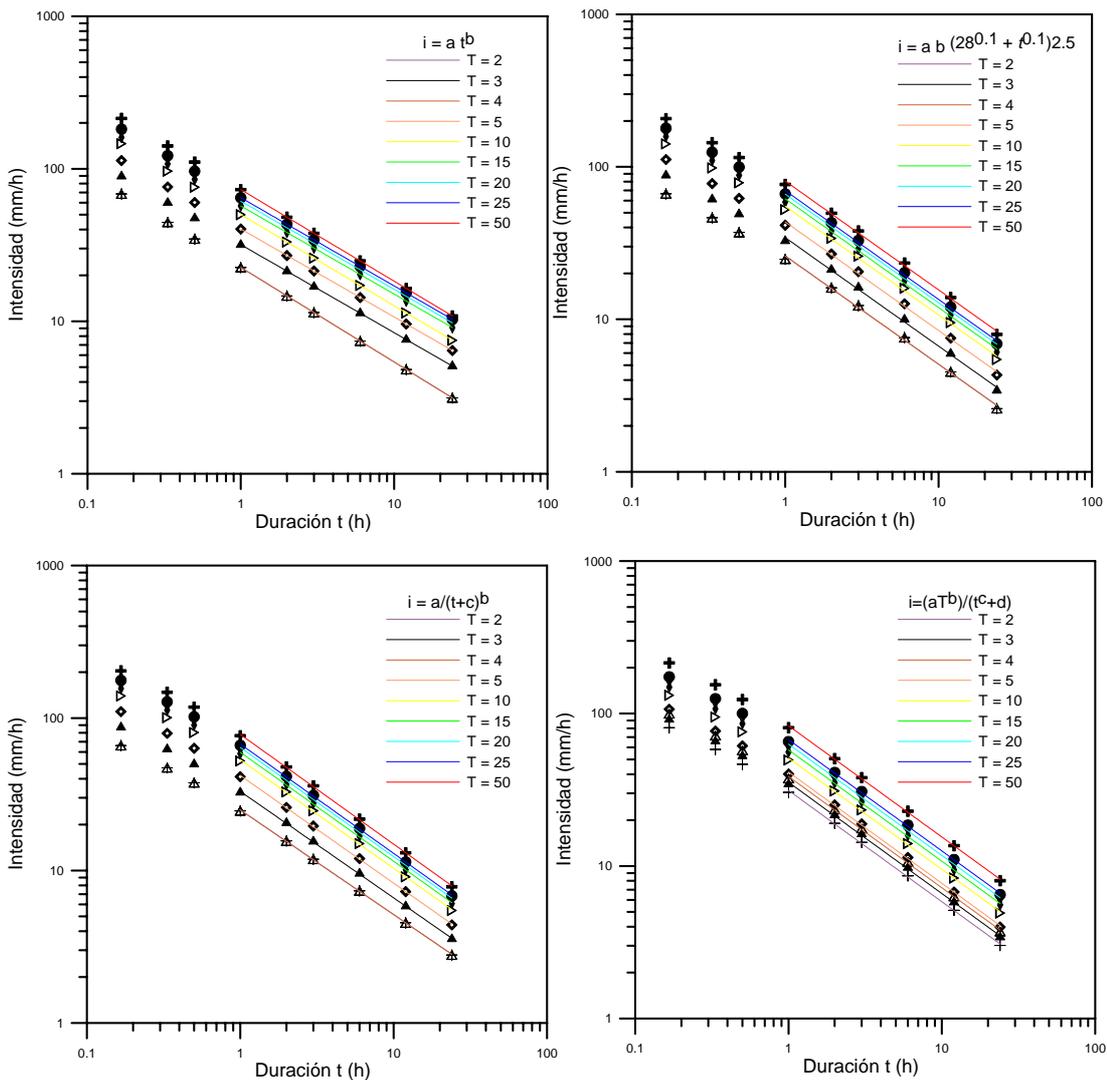


Figura 4.40. Curvas IDF para Málaga obtenidas con datos procedentes del análisis local de frecuencias.

Tabla 4.31. Parámetros de las curvas IDF. Datos análisis local

	Curva							
	1		2		3			
	a	b	a	b	a	b	c	
T	2	285,440	-0,619	38,581	4,959	477,987	0,707	6,446
	3	337,043	-0,580	50,866	4,971	674,684	0,721	7,139
	4	389,000	-0,580	58,729	4,977	800,782	0,727	7,416
	5	428,600	-0,580	64,552	4,980	895,953	0,730	7,595
	10	117,650	-0,597	81,746	4,986	1178,032	0,738	7,981
	15	137,910	-0,580	91,448	4,989	1337,006	0,741	8,127
	20	162,880	-0,580	98,236	4,989	1449,800	0,743	8,227
	25	183,560	-0,580	103,466	4,989	1536,819	0,744	8,296
	50	285,320	-0,600	119,585	4,993	1801,355	0,747	8,435

Tabla 4.32. Parámetros de la curva IDF de cuatro parámetros. Todos los análisis.

	Curva 4			
	a	b	c	d
AR	778,995	0,303	0,804	6,544
ARI	559,801	0,335	0,751	3,813
AL	728,548	0,304	0,781	5,081

Como puede verse en todas las figuras, los ajustes de las curvas representativas de cada período de retorno se han hecho para duraciones superiores a una hora. Este mínimo se justifica por varios motivos. Por un lado, se ha demostrado que en el comportamiento de escala de la lluvia puede observarse una transición para duraciones de una hora (Olsson y Burlando, 2002; Marani, 2003). Por otro lado, el objetivo de esta sección es comparar los resultados de las curvas IDF con los obtenidos a partir de la curva $K(q)$, para cuya obtención se han utilizado datos horarios de precipitación en Málaga. No se cuenta por lo tanto con información del comportamiento multifractal de la lluvia para duraciones inferiores, por lo que de esta manera se justifica la duración mínima ajustada en las curvas IDF.

c. Análisis del comportamiento de escala de las relaciones IDF

Una vez ajustadas las diversas relaciones IDF, puede obtenerse para cada período de retorno, el valor de la pendiente de la recta a la que se ajustan los valores de intensidad media de lluvia para diversas duraciones, es decir, las pendientes de cada una de las líneas rectas representadas en las figuras 4.38, 4.39 y 4.40. Según la teoría descrita por Veneziano y Furcolo (2002), los valores de dichas pendientes deben ser próximos al valor obtenido para la singularidad máxima (γ_{max}) en el análisis multifractal de los datos reales de lluvia. La figura 4.41 representa para cada análisis de frecuencias de datos de lluvia llevado a cabo, los valores de las pendientes de las curvas IDF y el valor de la singularidad máxima. En el eje de abscisas se representa al periodo de retorno mientras que en ordenadas se muestran los valores de la pendiente. El valor de la singularidad máxima (γ_{max}), aparece como una recta de pendiente cero para un valor de 0,75 en el eje de ordenadas. La tabla 4.33 muestra para cada tipo de análisis y cada curva IDF, el valor obtenido al sumar el cuadrado de las diferencias entre el valor de singularidad y la pendiente para cada período de retorno.

Tabla 4.33. Diferencias entre la singularidad máxima y las pendientes de las curvas IDF

Curva	$\sum (\gamma_{\max} - Pte.IDF_{T_i})^2$			
	AR	ARI	AL	Σ
1	0,20090	0,20706	0,19900	0,60696
2	0,00871	0,00828	0,01043	0,02742
3	0,01109	0,02294	0,01661	0,05064
4	0,00018	0,01294	0,00309	0,01621
Σ	0,22088	0,25122	0,22913	

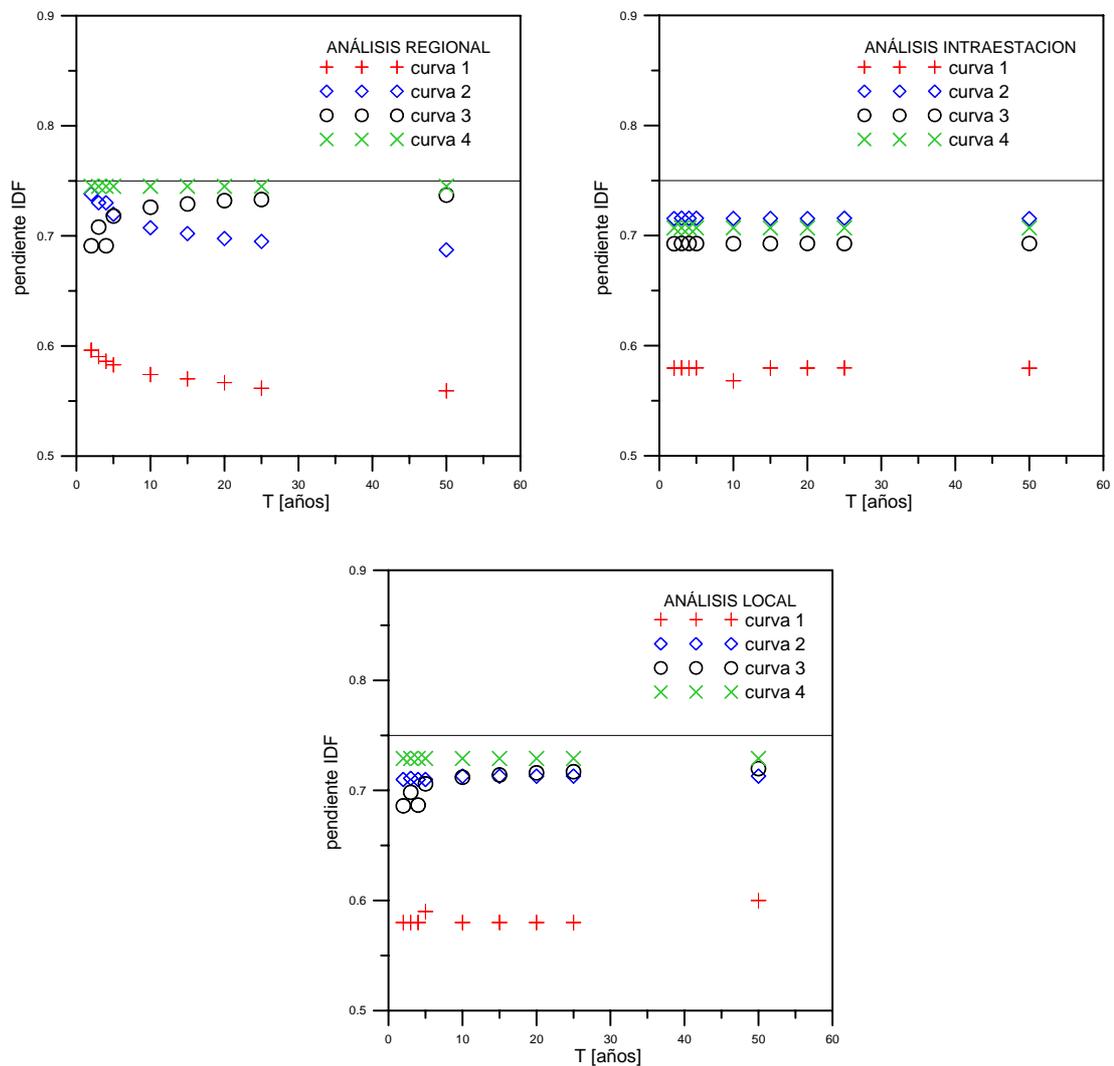


Figura 4.41. Comparación de las pendientes de las curvas IDF con el valor de la singularidad máxima (0,75) obtenida en el análisis multifractal

Para el análisis regional los mejores resultados (figura 4.41) se obtienen con la curva de cuatro parámetros, pues para todos los períodos de retorno se obtienen valores muy próximos al valor de singularidad. Esta curva es la que proporciona también mejores resultados cuando se trata del análisis local de frecuencias. Para el análisis regional intraestación es la curva 2 la que presenta valores más próximos al de la singularidad. En los tres tipos de análisis, los valores más alejados de la singularidad se obtienen al trabajar con la curva 1.

A partir de los resultados de la tabla 4.33, puede comprobarse que para la curva de cuatro parámetros, el análisis regional es el más adecuado. Lo mismo sucede con la curva de tres parámetros. En ambos casos, le sigue el análisis local en cuanto a calidad de resultados. Para la curva dos, el mejor análisis es el intraestación, seguido muy de cerca por el análisis regional. El análisis local resulta el más adecuado a la hora de ajustar la curva tipo uno.

De los resultados anteriores puede afirmarse que a medida que aumenta el número de parámetros de la curva IDF elegida, se hace necesario partir de datos obtenidos mediante análisis de frecuencias algo más complejos que el análisis local.

Siguiendo con la teoría descrita por Veneziano y Furcolo (2002), la línea que une los valores de la intensidad media geométrica para un determinado período de retorno, debe tener una pendiente cuyo valor sea similar al recíproco del momento crítico ($1/q_D$) obtenido a partir del análisis multifractal de los datos de reales de lluvia. La figura 4.42 muestra para cada análisis de frecuencias y tipo de curva IDF, los valores de intensidades medias geométricas para diversos períodos de retorno junto con el valor de la pendiente de la recta a la que mejor se ajustan.

El valor obtenido para q_D fue 2,4, por lo que $1/q_D = 0,417$. Con este valor y los resultados de la figura 4.42, se observa que para los valores de período de retorno cubiertos por los registros históricos de lluvia horaria ($T = 20$ años), las curvas IDF de cuatro parámetros son las que más se alejan del valor de $1/q_D$, con valores muy similares para los tres tipos de análisis de frecuencias. Con los valores procedentes de las curvas IDF de menor número de parámetros, las pendientes son más próximas al valor de referencia 0,417.

La tabla 4.34 recoge las diferencias en valor absoluto, entre el valor de la pendiente de la recta obtenida al ajustar los datos procedentes de cada tipo de análisis y curva IDF, y el recíproco del momento crítico. De esta forma, puede discriminarse con más exactitud el mejor tipo de análisis de frecuencias y la ecuación IDF más adecuada. Independientemente del tipo de ecuación, el análisis regional intraestación resulta ser el más adecuado, pues las diferencias entre los valores que se comparan son

mínimas; le siguen el análisis regional y local. Por ecuación, las menores diferencias aparecen al trabajar con las curvas de menos parámetros.

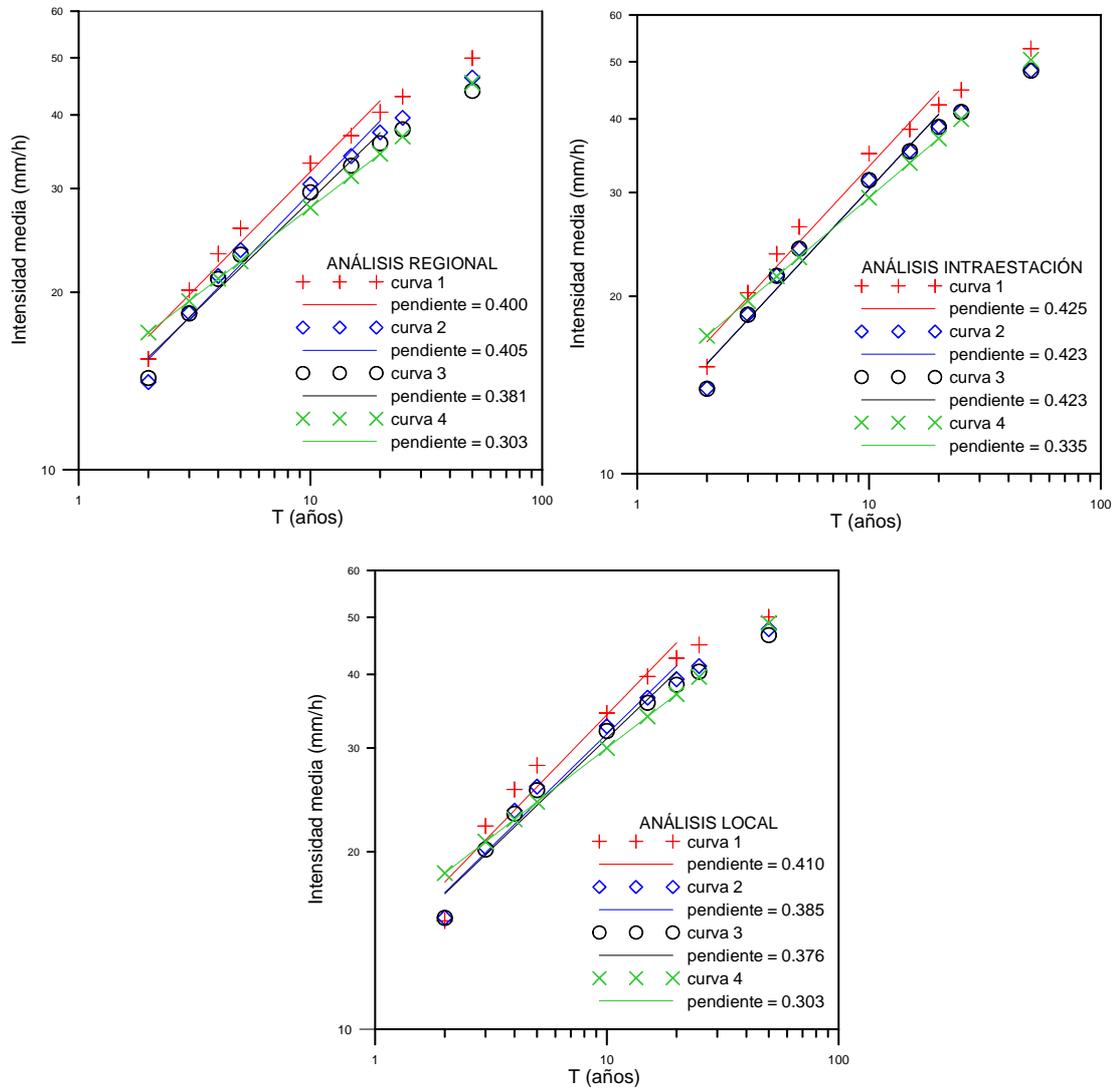


Figura 4.42. Variación de la intensidad media de lluvia con el período de retorno para las curvas ajustadas

Tabla 4.34. Valor absoluto de la diferencia entre las pendientes de las curvas y el valor del momento crítico

Curva	$ (pte_{curva}) - (1/q_D) $			Σ
	AR	ARI	AL	
1	0,017	0,008	0,007	0,007
2	0,012	0,006	0,032	0,032
3	0,036	0,006	0,041	0,041
4	0,114	0,082	0,114	0,114
Σ	0,179	0,102	0,194	

Según los resultados de las tablas 4.33 y 4.34, puede llegarse a un compromiso entre los valores obtenidos, de forma que pueda elegirse el mejor análisis de frecuencias y el mejor modelo paramétrico para las curvas IDF. Así, de todos los valores, la curva tipo dos obtenida mediante análisis regional o intraestación, es la que mejor cumple con las condiciones impuestas por la naturaleza multifractal de los datos reales de lluvia horaria analizados en Málaga.

4.4.4 Conclusiones

A la vista de todos los resultados anteriores queda patente la importancia que tiene la naturaleza multifractal de la precipitación a la hora de analizarla. Las curvas IDF, en cualquiera de sus formas, deben también reproducir o al menos mostrar cierta similitud con determinados parámetros relacionados con esa naturaleza multifractal de la lluvia.

Existe una gran variedad de modelos para las relaciones intensidad-duración-frecuencia. De los cuatro tipos analizados en esta sección, sugiere que uno de los modelos de dos parámetros, concretamente la ecuación propuesta por Témez, es la que más se adecua a las características multifractales de la lluvia horaria en Málaga.

De la misma forma, de los métodos usados para obtener los cuantiles de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno, el análisis regional y el análisis regional intraestación, han resultado los métodos de análisis de frecuencias más precisos desde el punto de vista de la multifractalidad de la lluvia en Málaga.

Por todo esto, el análisis multifractal de la precipitación es una herramienta eficaz para discriminar el mejor método de análisis de frecuencias o el mejor modelo paramétrico de las relaciones IDF.

5 Conclusiones generales

La lluvia es un fenómeno complejo con una alta variabilidad espacial y temporal. Como muchos otros fenómenos, puede estudiarse aplicando diversas metodologías. En este estudio se ha analizado la precipitación desde la óptica de la multifractalidad y de los sistemas críticamente autoorganizados. Ambos enfoques, si bien no son novedosos desde el punto de vista teórico, aportan nuevos datos en la descripción de fenómenos como la lluvia.

Se ha explorado la influencia de la resolución temporal de los datos de lluvia analizados en los resultados obtenidos. Para una misma localidad, el comportamiento multifractal y críticamente autoorganizado de la lluvia, es independiente de la resolución de los datos. No obstante, al pasar de escala horaria a diaria, una de las más comunes en hidrología, los valores de los parámetros obtenidos cambian, debido a la agrupación de los datos y a la consiguiente pérdida de información. Se ha observado que esta naturaleza multifractal de la lluvia también está presente en series de datos históricos de localidades con condiciones climáticas diferentes.

El análisis de la agrupación temporal de los eventos de lluvia ha permitido detectar periodicidades su frecuencia. Independientemente de la localidad y escala temporal, el ciclo anual es el más determinante. Este resultado confirma la necesidad de utilizar datos máximos anuales a la hora de trabajar con métodos hidrológicos que requieran el uso de datos extremos de precipitación.

La escasez de series temporales de lluvia de cierta longitud y resolución temporal, hace necesario el uso de modelos generadores de datos de precipitación. La mayor parte de estos modelos, consideran las características locales que más influyen en la generación de los patrones de lluvia. Al haberse detectado el carácter multifractal y críticamente autoorganizado de la precipitación, parece lógico considerar estas características a la hora de validar cualquier modelo de lluvia. Por ello, se ha propuesto el análisis multifractal como una metodología válida para evaluar la calidad de las series temporales de datos generados por modelos de lluvia.

El modelo Multifractal Universal considera que la lluvia es un fenómeno tipo cascada y su aplicación al análisis de las series de datos de lluvia horaria y de número de horas secas diarias, proporciona una muy buena descripción de estos procesos. Este hecho sugiere que el citado modelo puede usarse para generar datos de lluvia en una determinada localidad.

Cualquiera que sea la fuente de procedencia de los datos de lluvia, en ingeniería son muy útiles a la hora de ajustar las curvas Intensidad – Duración – Frecuencia (IDF). Dichas curvas permiten obtener valores extremos de lluvia asociados a una determinada probabilidad de ocurrencia. Para una localidad concreta en la que se disponía de datos reales de lluvia horaria se ha comprobado la relación existente entre la multifractalidad de la lluvia y las curvas IDF. Así, mediante los parámetros que caracterizan la multifractalidad de la lluvia, se ha discriminado el mejor modelo paramétrico de curva IDF entre varios analizados, así como el método de análisis de frecuencias de los datos reales de lluvia más adecuado a la hora de obtener dichas curvas.

Los resultados que se han obtenido en esta tesis contribuyen a mejorar la descripción de la variabilidad temporal de la lluvia. La aplicación a estudios hidrológicos de las metodologías explicadas en este trabajo, tiene un futuro prometedor ya que carecen de algunas de las limitaciones existentes en los marcos conceptuales tradicionalmente usados para analizar el fenómeno de la precipitación.

6 Referencias

- Allan DW. 1966. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings IEEE* 54: 221-230.
- Alila Y. 2000. Regional rainfall depth-duration-frequency equations for Canada. *Water Resources Research* 36(7): 1767-1778.
- Álvarez M, Puertas J, Soto B, Díaz F. 1999. Análisis regional de las precipitaciones máximas en Galicia mediante el método del índice de avenida. *Ingeniería del Agua* 6(4): 379-386.
- Andrade RFS, Schellnhuber HJ, Claussen M. 1998. Analysis of rainfall records: possible relation to self-organized criticality. *Physica A* 254: 557-568.
- Arakawa A. 2006. Atmospheric physics - Scaling tropical rain. *Nature Physics* 2: 373-374.
- Bak P. 1997. How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. Springer-Verlag: New York.
- Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. 1987. Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters* 59 (4): 381-384
- Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. 1988. Self-organized criticality. *Physical Review A* 38: 364-374.
- Barnsley MF. 1993. Fractals everywhere. *Academic Press Professional*, Boston, USA, 531 p
- Bell FC. 1969. Generalized rainfall-duration-frequency relationships. *Journal of Hydraulics Engineering* 95(HY1), 311-327
- Bove R, Pelino V, De Leonibus L. 2006. Complexity in rainfall phenomena. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 11(6): 663-776
- Calenda G, Gorgucci F, Napolitano A, Novella A, Volpi E. 2005. Multifractal analysis of radar rainfall fields over the area of Rome. *Advances in Geosciences* 2: 293-299.
- Chen C. 1983. Rainfall intensity-duration-frequency formulas. *Journal of Hydraulics Engineering* 109(12): 1603-1621.
- Chow V T. 1964. Handbook of Applied Hydrology, *McGraw-Hill*, New York
- Chow VT, Maidment DR, Mays LW. 1988. Applied Hydrology. *McGraw-Hill*, New York.
- Christensen K, Olami Z, Bak P. 1992. Deterministic $1/f$ noise in nonconservative models of self-organized criticality. *Physical Review Letters*.

- Cowpertwait PSP, Kilsby CG, O'Connell PE. 2002. A space-time Neyman-Scott model of rainfall: empirical analysis of extremes. *Water Resources Research* 38: art. No. 1131, doi: 10.1029/2001WR000709.
- Dalrymple T. 1960. Flood frequency analysis. *USGS. Water Supply Paper* 1543-A.
- de Lima MIP. 1998. Multifractals and the temporal structure of rainfall. Ph.D Thesis, Wageningen Agricultural Univ., 229 pp.
- de Lima MIP, Grasman J. 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology* 220: 1-11.
- Di Baldassarre G, Brath A, Montanari A. 2006. Reliability of different depth-duration-frequency equations for estimating short-duration design storms. *Water Resources Research* 42, W12501, doi: 10.1029/2006WR004911
- Falconer K J, 1990. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. *John Wiley & Sons*, Chichester, England, 288 pp.
- Fano U. 1947. Ionization Yield of Radiations. II. The Fluctuations of the Number of Ions. *Physical Review* 72: 26-29.
- Fraedrich K, Larnder C. 1993. Scaling regimes of composite rainfall time series. *Tellus Series A-Dynamic Meteorology and Oceanography* 45A: 289-298.
- Frisch U, Parisi G. 1985. On the singularity structure of fully developed turbulence. In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Ghil M, Benzi R, Parisi G (eds). North-Holland: New York; 84-88.
- García-Bartual R, Schneider M. 2001. Estimating maximum expected short-duration rainfall intensities from extreme convective storms. *Physics and Chemistry of the Earth B*, 26, 675-681
- García-Marin A P. 2000. Análisis regional de las precipitaciones máximas en Andalucía. Estimación de las relaciones IDF. Trabajo Profesional Fin de Carrera. Universidad de Córdoba.
- García-Marin A P, Jiménez-Hornero F J, Ayuso-Muñoz J L. *in press*. Applying multifractality and the self-organized criticality theory to describe the temporal rainfall regimes in Andalucía (Southern Spain). *Hydrological Processes*. DOI: 10.1002/hyp.6603
- García-Marin A P, Jiménez-Hornero F J, Ayuso-Muñoz J L. *in press*. The Multifractal analysis as a tool for validating a rainfall model. *Hydrological Processes*.
- García-Marin A P, Jiménez-Hornero F J, Ayuso-Muñoz J L. *in press*. La criticalidad autoorganizada y el análisis de datos históricos de lluvia en Córdoba (Andalucía) . *Ingeniería del Agua*.

- Greenwood J, Landwehr J, Matalas N, Wallis J. 1979. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressed in inverse form. *Water Resources Research* 15(6): 1049-1054.
- Hastings H M, Sugihara G. 1993. Fractals: a user's guide for the natural sciences. Oxford University Press, Oxford, UK, 235 pp.
- Hosking JRM, Wallis JR. 1997. Regional frequency analysis. *Cambridge University Press*. 224 pp
- Hubert P, Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D, Ladoy P, Carbonnel JP, Violette S. 1993. Multifractals and Extreme Rainfall events. *Geophysical Research Letters* 20, 931-934.
- Instituto Nacional de Meteorología [en línea]. Valores climatológicos normales. [Consulta: 20 mayo 2007]. <<http://www.inm.es>>
- Kantelhardt JW, Koscielny-Bunde E, Rybski D, Braun P, Bunde A, Havlin S. 2006. Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records. *Journal of geophysical research-atmospheres* 111 (D1): Art. No. D01106
- Kiely G, Ivanova K. 1999. Multifractal analysis of hourly precipitation. *Physics and Chemistry of the Earth Part B-Hydrology Oceans and Atmosphere* 24: 781-786.
- Kolesnikov VN, Monin AS. 1965. Spectra of meteorological field fluctuations. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* 1: 653-669.
- Kothyari UC, Garde RJ. 1992. Rainfall intensity-duration-frequency formula for India. *Journal of Hydraulics Engineering* 118(2): 323-336.
- Koutsoyiannis D, Kozonis D, Manetas A. 1998. A mathematical framework for studying rainfall intensity duration frequency relationships. *Journal of Hydrology* 206: 118-135.
- Labat D, Mangin A, Ababou R. 2002. Rainfall-runoffs relations for karstic springs: multifractal analyses. *Journal of Hydrology* 256: 176-195.
- Ladoy P, Lovejoy S, Schertzer D. 1991. Extreme variability of climatological data: Scaling and intermittency. In: Schertzer, D., Lovejoy, S. (Eds.), *Non-linear variability in Geophysics*, Kluwer Acad., Norwell, Mass., pp. 241-250.
- Ladoy P, Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. 1993. The multifractal temporal variability of Nimes rainfall data. *Comptes Rendus del Academie des Sciences Serie II* 317(6): 775-782.
- Langousis A, Veneziano D. 2007. Intensity-duration-frequency curves from scaling representations of rainfall. *Water Resources Research*. 43, W02422, doi: 10.1029/2006WR005245

- Lavallée D, Lovejoy S, Schertzer D, Ladoy P. 1993. Nonlinear variability and Landscape topography: analysis and simulation. In: *Fractals in Geography* (N. Lam and L. De Cola, Eds.) Prentice Hall, Englewood Cliffs, 158-192.
- Lovejoy S, Mandelbrot B. 1985. Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus* 37A: 209-232.
- Lovejoy S, Schertzer D. 1990a. Multifractals, universality classes, satellite and radar measurements of clouds and rain. *Journal of Geophysical Research*. 95(D3): 2021-2034.
- Lovejoy S, Schertzer D. 1990b. Our multifractal atmosphere: a unique laboratory for non-linear dynamics. *Physics in Canada* 46(4): 62-71
- Lovejoy S, Schertzer D. 1995. Multifractals and rain. In: Kundzewicz, A.W. (Ed.), *New uncertainty concepts in Hydrology and Hydrological modelling*, Cambridge Univ. Press, pp. 61-103.
- Lowen SB, Ozaki T, Kaplan E, Saleh BEA, Teich MC. 2001. Fractal features of dark, maintained, and driven neural discharges in the cat visual system. *Methods* 24: 377-394.
- Lowen SB, Teich MC. 1995. Estimation and simulation of fractal stochastic point processes. *Fractals-An Interdisciplinary Journal on the Complex Geometry of Nature* 3: 183-210.
- Lowen SB, Teich MC. 1996. The periodogram and Allan variance reveal fractal exponents greater than unity in auditory nerve spike trains. *Journal of the Acoustical Society of America* 99: 3585-3591.
- Mandelbrot B. 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business of the University of Chicago* 36, 307
- Mandelbrot B. 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62, part II: 331-358
- Mandelbrot B. 1975. *Les objets fractals: forme, hazard et dimension*. Flammarion, Paris.
- Mandelbrot B. 1977. *Fractals: form, chance and dimension*. Freeman, San Francisco, 365 pp.
- Mandelbrot B. 1982. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 460 pp.
- Mandelbrot BB. 1989. A class of multinomial Multifractal measures with negative (latent) values for the “dimension” $f(\alpha)$. In: Pietronero, L. (ed.), *Fractals’ physical origin and properties*. Plenum Press, New York, 3-29

- Mandelbrot BB. 1991. Random multifractals: negative dimensions and the resulting limitations of thermodynamical formalism. *Proc. R. Soc. London A* 434, 79.
- Marani M. 2003. On the correlation structure of continuous and discrete point rainfall, *Water Resources Research*, 39 (5), 1128, doi: 10.1029/2002WR001456
- McLeod AI, Hipel KW. 1995. Exploratory spectral analysis of hydrological times series. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 9: 171-205
- Olsson J. 1995. Limits and characteristics of the Multifractal behaviour of a high resolution rainfall time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2(1): 23-29.
- Olsson J, Burlando P. 2002. Reproduction of temporal scaling by rectangular pulses rainfall model. *Hydrological Processes*, 16, 611-630
- Over TM, Gupta VK. 1994. Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing. *Journal of Applied Meteorology*, 33, 1526-1543.
- Over TM, Gupta VK. 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *Journal of Geophysical Research*. 101: 26319-26331.
- Pandey G, Lovejoy S, Schertzer D. 1998. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometres, one day to 75 years. *Journal of Hydrology*. 208: 62-81.
- Parisi G, Frisch U. 1985. Fully developed turbulence and intermittency Proc. International School of Physics Enrico Fermi, Course LXXXVIII, Italian Physical Society. In: Ghil, M., Benzi, R., Parisi, G. (Eds.). *Turbulence and predicability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, North-Holland, Amsterdam.
- Pelino V, Matera A, Colombo T, Giorgi F. 2006. Validation of precipitation events in a regional climate model simulation using methods from complex systems theory. *Theoretical and Applied Climatology* 84: 213-218
- Peters O, Christensen K. 2002. Rain: relaxations in the sky. *Physical Review E* 66: 036120.
- Peters O, Christensen K. 2006. Rain viewed as relaxational events. *Journal of Hydrology*, 328: 46-55
- Peters O, Neelin JD. 2006. Critical phenomena in atmospheric precipitation. *Nature physics* 2: 393-396.
- Peters O, Hertlein C, Christensen K. 2002. A complexity view of rainfall. *Physical Review Letters* 88: 018701.
- Press WH, Flannery BP Teukolsky SA, Vetterling WT. 1989. *Numerical recipes, The art of scientific computing (Fortran version)*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 702 p.

- Scharf R, Meesmann M, Boese J, Chialvo DR, Kniffki KD. 1995. General relation between variance-time curve and power spectral density for point-processes exhibiting $1/f^\beta$ -fluctuations, with special reference to heart-rate-variability. *Biological Cybernetics* 73: 255-263.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1985. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. In: Bradbury, L. J. S., F. Durst, B. E. Launder, F. W. Schmidt, and J. H. Whitelaw (eds.), *Turbulent shear flow 4. Selected papers from the Fourth International Symposium on "Turbulent Shear Flows"*, Springer-Verlag, Berlin, 7-33.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 92: 9693-9714.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1988. Multifractal simulations and analysis of clouds by multiplicative processes. *Atmospheric research*, 21: 337-361
- Schertzer D, Lovejoy S. 1989. Nonlinear variability in Geophysics: Multifractal simulations and analysis. In: Pietronero, L. (ed.), *Fractals' physical origin and properties*. Plenum Press, New York, 49-79
- Schertzer D, Lovejoy S. 1991b. Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables. In: Schertzer, D., And S. Lovejoy (eds.), *Non-linear variability in Geophysics: scaling and fractals*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 41-82
- Schertzer D, Lovejoy S. 1992. Hard and soft multifractals processes. *Physica A*, 185, 187-194.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1993. Nonlinear variability in Geophysics 3: scaling and multifractal processes. Lecture notes, AGU/EGS Conference, September 10-17. Cargèse, France.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1994. Multifractal generation of self-organized criticality. In: Novak, M.M. (Ed.), *Fractals in the natural and applied sciences*, Elsevier, North-Holland, pp. 325-339.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1996. Resolution dependence and multifractals in remote sensing and geographical information systems, Lecture Notes, McGill Univ., Montreal, Ontario, Canada
- Schertzer D, Lovejoy S. 1997. Universal multifractals do exist!: coment on 'A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade'. *Journal of Applied Meteorology*, 36 (9): 1296-1303.

- Schertzer D, Lovejoy S, Lavallée D. 1993. Generic multifractal phase transitions and self-organized criticality. In: Perdan, J.M., Lejeune, A. (Eds.), *Cellular automata: prospects in astrophysical applications*, World Scientific, pp. 216-227.
- Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F. 1995. Structures in turbulence and multifractal universality. In: Meneguzzi, M., A. Pouquet, and P. L. Sulem (eds.), *Small scale structures in 3D hydro and MHD turbulence. Lecture notes in physics*, 462: 137-144.
- Singh V P. (1992). *Elementary Hydrology*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J.
- Sivakumar B. 2001. Is a chaotic multi-fractal approach for rainfall possible? *Hydrological Processes* 15: 943-955, (with a minor correction in *Hydrological Processes* 15: 2381-2382).
- Sóbol IM. 1976. *Método de Montecarlo*. Edit. MIR, Moscú.
- Strahler AN, Strahler AH. 1978. *Modern Physical Geography*. John Wiley & Sons, Inc.
- Svensson C, Olsson J, Berndtsson R. 1996. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. *Water Resources Research* 32: 2463-2472.
- Telesca L, Colangelo G, Lapenna V, Macchiato M. 2004. On the scaling behavior of rain event sequence recorded in Basilicata region (Southern Italy). *Journal of Hydrology* 296: 234-240.
- Telesca L, Lapenna V, Summa D, Scalcione E. 2005. Time-clustering analysis of rainfall fluctuations. *Fluctuations and noise letters* 5: 17-25.
- Témez JR. 1987. Cálculo hidrometeorológico de caudales máximos en pequeñas cuencas naturales. *Dirección general de carreteras. MOPU*. Madrid.
- Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. 1993. Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 223-250.
- Tessier Y, Lovejoy S, Hubert P, Schertzer D, Pecknold S. 1996. Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 101: 26427-26440.
- Turner S, Lowen SB, Feurstein MC, Heneghan C, Feichtinger HG, Teich MC. 1997. Analysis, synthesis, and estimation of fractal-rate stochastic point processes. *Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society* 5: 565-596.
- Vanderlinden K. 2001. Análisis de procesos hidrológicos a diferentes escalas espacio-temporales. Tesis doctoral. Universidad de Córdoba. 303 p
- Veneziano D, Iacobellis V. 2002. Multiscaling pulse representation of temporal rainfall. *Water Resources Research* 38: 11-38, doi:10.1029/2001WR000522.

Veneziano D, Furcolo P, 2002. Multifractality of rainfall and scaling of intensity-duration-frequency curves. *Water Resources Research* 38 (12), doi: 10.1029/2001WR000372

Veneziano D, Langousis A, Furcolo P. 2006. Multifractality and rainfall extremes: A review. *Water Resources Research* 42(6): Art. No. W06D15

Wenzel HG. 1982. Rainfall for urban stormwater desing. Cap. 2 Urban Stormwater Hydrology. *Water Resources*. Monograph, 7, AGV. Washington D.F.

Lista de símbolos

Todos los símbolos usados en esta tesis se han ido definiendo en el texto. Los más relevantes aparecen en la lista que se muestra a continuación.

A	conjunto fractal de dimensión D
c	codimensión fractal del conjunto A
$c(\gamma)$	función de codimensión, definida para las singularidades γ de la densidad del proceso
C_l	parámetro multifractal que cuantifica el grado de no-homogeneidad de un proceso, definido como la singularidad de la media del proceso
d	dimensión euclídea del espacio geométrico en el que se incluye un conjunto fractal arbitrario A
D	dimensión del espacio que incluye al conjunto A
D_A	dimensión fractal del conjunto A
D_i	discordancia
$D(\gamma)$	función de dimensión, definida para las singularidades γ de la densidad del proceso
$E(\omega)$	espectro de energía
f	frecuencia de un proceso
F	frecuencia de ocurrencia de una variable
$FF(t)$	factor de Fano
$FA(f)$	factor de Allan
h	altura media de lluvia
H	parámetro multifractal que cuantifica el grado de no-conservación del proceso; también coeficiente regional de heterogeneidad
I	intensidad media de lluvia
$K(q)$	función exponente escaladora de momentos
$K(q, \eta)$	función exponente escaladora de momentos de traza doble
L	tamaño de un objeto geométrico definido en un espacio 1-dimensional
LC_k	coeficiente lineal de curtosis
LC_s	coeficiente lineal de sesgo
LC_v	coeficiente lineal de variación
Max	evento máximo detectado en el conjunto de datos analizado

LISTA DE SÍMBOLOS

M_{ijk}	momentos ponderados probabilísticamente de una variable aleatoria x con una función de distribución $F(.)$
n	número de años de registros de datos en una estación concreta
N	número de estaciones de una región
N_w	número de ventanas sin solapamiento en las que se divide la serie temporal de datos de un proceso
N_λ	número de cubos sin solapamiento de lado λ^{-1} necesarios para cubrir una parte del espacio D-dimensional que incluye al conjunto A
$\bar{N}(x)$	función de distribución acumulada de la variable x
$p(t)$	cantidad de precipitación no nula en un intervalo de tiempo dentro de una serie temporal de datos
q	orden del momento estadístico
q_D	orden crítico asociado a la divergencia de momentos
q_s	orden crítico de los momentos estadísticos asociado a la longitud de la muestra de datos
q_{max}	momento crítico definido como $q_{max} = c'(\gamma_{max})$
q_{min}	momento crítico de la función $k(q)$
$q(F)$	curva regional de frecuencias
Q_i	tamaño de un evento de lluvia
$Q_i(F)$	función cuantil de la distribución de frecuencias de una variable
r	factor reductor
$R(\lambda, i)$	intensidad media del proceso analizado para un tiempo i y una valor λ de razón de escala
$\langle R(1, i) \rangle$	intensidad media de la muestra de datos
$S_z(t)$	número de eventos incluidos en cada intervalo z de longitud t en los que se divide el eje de tiempos en el que existen registros del proceso de estudio
t	tiempo [T]
t_A	tiempo mínimo que marca un comportamiento de escala significativo al calcular el factor de Allan
t_F	tiempo mínimo que marca un comportamiento de escala significativo al calcular el factor de Fano
T	período de retorno

T_E	tiempo mínimo a partir del que se obtiene el mejor ajuste para la representación del número de eventos de lluvia de una duración determinada
T_S	tiempo mínimo a partir del que se obtiene el mejor ajuste para la representación del número de eventos de secos de una duración determinada
T_w	longitud de las ventanas sin solapamiento en las que se divide la serie temporal de datos de un proceso
V	varianza ponderada del coeficiente de variación lineal de una estación
Z^{DIST}	estadístico que mide la bondad del ajuste de una serie de datos a una función de distribución
α	parámetro que cuantifica el grado de multifractalidad también conocido como índice de Lévy. También hace referencia a uno de los parámetros que caracterizan la función de distribución Gumbel
α_{FA}	estimador del exponente fractal α calculado a partir del factor de Allan
α_{FF}	estimador del exponente fractal α calculado a partir del factor de Fano
α_{PG}	estimador del exponente fractal obtenido a partir de un periodograma
β	exponente espectral. También hace referencia a uno de los parámetros que caracterizan la función de distribución Gumbel
γ	orden de singularidad de la intensidad de un proceso
γ_I	orden de singularidad que caracteriza a la media del proceso
γ_D	orden crítico de singularidad asociado con la divergencia de momentos estadísticos para órdenes mayores que q_D
γ_{max}	límite superior para los órdenes de singularidad γ
γ_s	orden máximo de singularidad para la intensidad de un proceso
δ	escala de medida de un proceso fractal
ε_λ	intensidad media adimensional del proceso analizado
$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$	q -ésimo momento conjunto del proceso para un valor de q y una resolución λ
ε_λ^η	intensidad del proceso asociada a una resolución Λ y elevada a una potencia η
λ	razón de escala
λ_i	momentos lineales
μ_i	índice de avenida

LISTA DE SÍMBOLOS

τ	exponente de la ley potencial obtenido como la pendiente que relaciona en un gráfico doblemente logarítmico, una cantidad n como potencia de otra cantidad x
τ_E	exponente de la ley potencial obtenido como la pendiente que relaciona en un gráfico doblemente logarítmico, la duración del evento de lluvia con el número de eventos de una duración determinada
τ_Q	exponente de la ley potencial obtenido como la pendiente que relaciona en un gráfico doblemente logarítmico, el tamaño del evento de lluvia con el número de eventos de una cantidad
τ_S	exponente de la ley potencial obtenido como la pendiente que relaciona en un gráfico doblemente logarítmico, la duración de los eventos secos con el número de eventos secos de cada duración
τ_r	cocientes de momentos lineales
\mathcal{G}_i	parámetros necesarios para estimar la curva regional de frecuencias
ω	número de onda para procesos temporales

Abreviaturas

AL	Análisis local de frecuencia
AR	Análisis regional de frecuencias
ARI	Análisis regional intraestación
DTM	Método del momento de traza doble
IDF	Curvas Intensidad-Duración-Frecuencia
INM	Instituto Nacional de Meteorología
MU	Modelo multifractal universal
PROMES	Modelo climático: pronóstico a mesoescala
SOC	Criticalidad autoorganizada

APÉNDICE I. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

Este apéndice recoge, para cada una de las distribuciones que en él aparecen, la forma de la función de distribución de probabilidad $f(x)$, la función de distribución acumulada $F(x)$ y la función $x(F)$, expresiones para los momentos lineales en función de los parámetros de la distribución y de los parámetros en función de los momentos lineales. Los coeficientes de aproximación utilizados en el cálculo de los parámetros de los distribuciones Normal Generalizada y Pearson Tipo III, aparecen descritos detalladamente en Hosking, J.R.M. and Wallis, J.R. (1997). *Regional Frequency Analysis*. Cambridge University Press. New York.

1. Distribución Logística Generalizada

Número de parámetros: 3

ξ = parámetro de posición

α = parámetro de escala

k = parámetro de forma

$$f(x) = \frac{\alpha^{-1} e^{-(1-k)y}}{(1 + e^{-y})^2} \quad y = \begin{cases} -k^{-1} \log\{1 - k(x - \xi)/\alpha\}, k \neq 0 \\ (x - \xi)/\alpha, k = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1/(1 + e^{-y}) \quad x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha [1 - \{(1 - F)/f\}^k] / k, k \neq 0 \\ \xi - \alpha \log\{(1 - F)/F\}, k = 0 \end{cases}$$

Momentos lineales

Definidos para $-1 < k < 1$

$$\lambda_1 = \xi + \alpha(1/k - \pi / \text{sen } k\pi)$$

$$\lambda_2 = \alpha k \pi / \text{sen } k\pi$$

$$\tau_3 = -k$$

$$\tau_4 = (1 + 5k^2) / 6$$

Parámetros

$$k = -\tau_3$$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 \operatorname{sen} k\pi}{k\pi}$$

$$\xi = \lambda_1 - \alpha \left(\frac{1}{k} - \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \right)$$

2. Distribución General de valores Extremos

Número de parámetros: 3

ξ = parámetro de posición

α = parámetro de escala

k = parámetro de forma

$$f(x) = \alpha^{-1} e^{-(1-k)y - e^{-y}} \quad y = \begin{cases} -k^{-1} \log\{1 - k(x - \xi)/\alpha\}, k \neq 0 \\ (x - \xi)/\alpha, k = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha\{1 - (-\log F)^k\}/k, k \neq 0 \\ \xi - \alpha \log(-\log F), k = 0 \end{cases}$$

Momentos lineales

Definidos para $k > -1$

$$\lambda_1 = \xi + \alpha\{1 - \Gamma(1+k)\}/k$$

$$\lambda_2 = \alpha(1 - 2^{-k})\Gamma(1+k)/k$$

$$\tau_3 = 2(1 - 3^{-k})/(1 - 2^{-k}) - 3$$

$$\tau_4 = \{5(1 - 4^{-k}) - 10(1 - 3^{-k}) + 6(1 - 2^{-k})\}/(1 - 2^{-k})$$

$\Gamma(\cdot)$ es la función gamma: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Parámetros

$$k \approx 7.8590c + 2.9554c^2$$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 k}{(1 - 2^{-k})\Gamma(1+k)}$$

$$\xi = \lambda_1 - \alpha\{1 - \Gamma(1+k)\}/k$$

$$c = \frac{2}{3 + \tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3}$$

3. Distribución Normal Generalizada

Número de parámetros: 3

ξ = parámetro de posición

α = parámetro de escala

k = parámetro de forma

$$f(x) = \frac{e^{ky - y^2/2}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \quad y = \begin{cases} -k^{-1} \log\{1 - k(x - \xi)/\alpha\}, k \neq 0 \\ (x - \xi)/\alpha, k = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \Phi(y) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt \quad \phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

$x(F)$ no tiene forma analítica explícita

Momentos lineales

Están definidos para todos los valores de k .

$$\lambda_1 = \xi + \alpha(1 - e^{k^2/2})/k$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{k} e^{k^2/2} \{1 - 2\Phi(-k/\sqrt{2})\}$$

$$\tau_3 \approx -k \frac{A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + A_3 k^6}{1 + B_1 k^2 + B_2 k^4 + B_3 k^6}$$

$$\tau_4 \approx \tau_4^0 + k^2 \frac{C_0 + C_1 k^2 + C_2 k^4 + C_3 k^6}{1 + D_1 k^2 + D_2 k^4 + D_3 k^6}$$

Parámetros

$$k \approx -\tau_3 \frac{E_0 + E_1 \tau_3^2 + E_2 \tau_3^4 + E_3 \tau_3^6}{1 + F_1 \tau_3^2 + F_2 \tau_3^4 + F_3 \tau_3^6}$$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 k e^{-k^2/2}}{1 - 2\Phi(-k/\sqrt{2})}$$

$$\xi = \lambda_1 - \frac{\alpha}{k} (1 - e^{k^2/2})$$

4. Distribución Pearson Tipo III

Número de parámetros: 3

μ = parámetro de posición

σ = parámetro de escala

γ = parámetro de forma

$$\gamma \neq 0 \quad \alpha = 4/\gamma^2, \quad \beta = \frac{1}{2}\sigma|\gamma|, \quad \xi = \mu - 2\sigma/\gamma$$

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{\alpha-1} e^{-(x-\xi)/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \quad F(x) = G(\alpha, \frac{x-\xi}{\beta})/\Gamma(\alpha)$$

$$G(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \text{ es la función gamma incompleta}$$

$x(F)$ no tiene forma analítica explícita.

Momentos lineales

Definidos para todos los valores de α , $0 < \alpha < \infty$

$$\lambda_1 = \xi + \alpha\beta$$

$$\lambda_2 = \pi^{-1/2} \beta \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})/\Gamma(\alpha)$$

Si $\alpha \geq 1$,

$$\tau_3 \approx \alpha^{-1/2} \frac{A_0 + A_1\alpha^{-1} + A_2\alpha^{-2} + A_3\alpha^{-3}}{1 + B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2}}$$

$$\tau_4 \approx \frac{C_0 + C_1\alpha^{-1} + C_2\alpha^{-2} + C_3\alpha^{-3}}{1 + D_1\alpha^{-1} + D_2\alpha^{-2}}$$

Si $\alpha < 1$,

$$\tau_3 \approx \frac{1 + E_1\alpha + E_2\alpha^2 + E_3\alpha^3}{1 + F_1\alpha + F_2\alpha^2 + F_3\alpha^3}$$

$$\tau_4 \approx \frac{1 + G_1\alpha + G_2\alpha^2 + G_3\alpha^3}{1 + H_1\alpha + H_2\alpha^2 + H_3\alpha^3}$$

Parámetros

Si $0 < |\tau_3| < 1/3$

$$z = 3\pi\tau_3^2 \qquad \alpha \approx \frac{1 + 0.2906z}{z + 0.1882z^2 + 0.0442z^3}$$

Si $1/3 < |\tau_3| < 1$

$$z = 1 - |\tau_3| \qquad \alpha \approx \frac{0.36067z - 0.59567z^2 + 0.25361z^3}{1 - 2.78861z + 2.56096z^2 - 0.77045z^3}$$

Una vez calculado α , los parámetros vendrán dados por

$$\gamma = 2\alpha^{-1/2} \text{sen}(\tau_3), \quad \sigma = \lambda_2\pi^{1/2}\alpha^{1/2}\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}), \quad \mu = \lambda_1$$

5. Distribución Pareto Generalizada

Número de parámetros: 3

ξ = parámetro de posición

α = parámetro de escala

k = parámetro de forma

$$f(x) = \alpha^{-1} e^{-(1-k)y} \quad y = \begin{cases} -k^{-1} \log\{1 - k(x - \xi)/\alpha\}, k \neq 0 \\ (x - \xi)/\alpha, k = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - e^{-y} \quad x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha\{1 - (1 - F)^k\}/k, k \neq 0 \\ \xi - \alpha \log(1 - F), k = 0 \end{cases}$$

Momentos lineales

Están definidos para $k > -1$

$$\lambda_1 = \xi + \alpha/(1+k)$$

$$\lambda_2 = \alpha/\{(1+k)(2+k)\}$$

$$\tau_3 = (1-k)/(3+k)$$

$$\tau_4 = (1-k)(2-k)/\{(3+k)(4+k)\}$$

Parámetros

$$k = (1 - 3\tau_3)/(1 + \tau_3)$$

$$\alpha = (1+k)(2+k)\lambda_2$$

$$\xi = \lambda_1 - (2+k)\lambda_2$$

