УДК 517.512.6.518

О. Муль[1], канд. фіз.-мат. наук; В. Кравченко[2], канд. фіз.-мат. наук; О. Кравченко[3]

[1]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
[2]Фізико-технологічний інститут металів і сплавів НАН України
[3]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

АНАЛІЗ КЕРОВАНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ЛИВАРНОГО ВИРОБНИЦТВА

У цій праці поставлено задачу побудови вектора керування процесом керованого охолодження структурно-неоднорідної технічної системи. Досліджувану проблему зведено до неперервно-дискретної крайової задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі. Використання властивостей опорних гіперплощин дозволило одержати вираз для вектора керування процесом охолодження. Для чисельного визначення цього вектора використано значення нормальних фундаментальних функцій розв'язків системи диференціальних рівнянь.

O. Mul, V. Kravchenko, O. Kravchenko

ANALYSIS OF CONTROLLED COOLING OF STRUCTURALLY HETEROGENEOUS TECHNICAL SYSTEMS IN FOUNDRY INDUSTRY

In this paper it is formulated the problem of a control vector construction for the process of controlled cooling of a structurally heterogeneous technical system. The considered problem is reduced to the continuous-discrete boundary problem for systems of differential equations of the first order in the normal form. The use of the properties of supporting hyperplanes allows obtaining the expression for the vector of the cooling process control. The values of normal fundamental functions for solutions of the system of differential equations are used for the numerical determination of the mentioned vector.

Вступ

У ливарному виробництві виливки можна одержати за допомогою моделей, що піддаються термодеструкції у ливарній формі під дією потоку металевого розплаву [1]. Розглянемо процес охолодження виливка в системі ''термодеструктивна модель – виливок – дисперсне середовище'', де в якості дисперсного матеріалу можуть використовуватися пісок, металевий дріб, стружка тощо. Формування виливка відбувається в структурно-неоднорідному середовищі, оскільки тепловий потік від виливка проходить через шари середовищ з різними фізико-хімічними характеристиками, такими, як густина, теплоємність, коефіцієнти теплопровідності і тепловіддачі, геометричні параметри окремих частинок дисперсного середовища тощо. В структурно-неоднорідних системах під дією потоку металевого розплаву структурні перетворення металевої рідини у виливок відбуваються в результаті складних процесів тепло- та масообміну [1]. Такі системи звичайно функціонують у різних теплофізичних полях в залежності від місця їх застосування. Тому під час заповнення форми рідким металом необхідно підтримувати рівновагу газового тиску на розділі поверхонь ''модель – форма'', а також цілеспрямовано керувати формуванням структури металу методами регульованого охолодження [2].

При дослідженні теплових процесів особливого значення набуває вивчення процесу взаємодії системи з газодинамічним потоком при неперервному відборі теплової енергії з охолоджуваного виливка. В математичному плані це приводить до дослідження неперервно-дискретних крайових задач, де, крім диференціального рівняння і граничних умов, розв'язок задачі повинен задовільняти ще й додатковій системі умов спряжень, яка враховує перехід теплового потоку з одного середовища до середовища з іншими фізичними параметрами. Отже, на сьогоднішній день розробка методів дослідження стійкості і керованості теплофізичних полів для вищезгаданих систем є актуальною задачею, що має як наукову, так і практичну цінність.

У цій праці за допомогою чисельних методів проведено дослідження стійкості та керованості теплофізичного поля для систем, що описуються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами [3], [4].

Математична постановка проблеми

Нехай теплофізичний стан досліджуваного об'єкту задано наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)A(t), \tag{1}$$

де $A(t)$ – матриця *n*-ого порядку, елементи якої $a_{ij}(t)$ – періодичні функції з періодом *T*; $x(t)$ – вектор фазових координат розмірності n.

Побудова алгоритму

За допомогою одного із відомих чисельних методів [5, 6] ми можемо побудувати нормальну фундаментальну систему розв'язків $\Phi(t)$ рівняння (1), яка є матрицею *n*-го порядку з елементами $\varphi_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,n}$, тобто:

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Тоді, якщо в усіх функціях $\varphi_{ij}(t)$ замінити t на $t+T$, то в силу періодичності коефіцієнтів $a_{ij}(t)$ ми знову одержимо розв'язок рівняння (1). Одержаний розв'язок не буде співпадати з початковим, але, як і всякий розв'язок, буде лінійною комбінацією функцій $\varphi_{ij}(t)$, що складають нормальну фундаментальну систему розв'язків:

$$\varphi_{ij}(t+T) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T)\varphi_{ij}(t), \quad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Враховуючи співвідношення (2), матимемо [3]:

$$D(\gamma) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(T) - \gamma & \dots & \varphi_{1n}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(T) & \dots & \varphi_{nn}(T) - \gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) має n-ий порядок відносно параметра γ і є характеристичним рівнянням для системи диференціальних рівнянь (1). Якщо корені рівняння (3) за абсолютною величиною менші за одиницю, то система рівнянь (1) є асимптотично стійкою відносно теплових збурень [3].

Основною складністю застосування викладеної методики для визначення стійкості теплових процесів в системі є знаходження матриці $\Phi(t)$. В загальному випадку одержати її в аналітичному вигляді неможливо. Тому для визначення функцій нормальної фундаментальної системи розв'язків пропонується чисельний метод розв'язку неперервно-дискретних крайових задач, а саме метод нормальних фундаментальних функцій [5, 6]. Тоді в кінцевому випадку задача зводиться до розв'язку *n* задач Коші на інтервалі [0,1] для системи диференціальних рівнянь (1) з початковими умовами у вигляді одиничної матриці [6, 7]. Для розв'язання таких задач можна використати добре відомі чисельні методи, зокрема, методи Адамса, Рунге-

Кутта та інші. В результаті одержимо функції $\varphi_{ij}(t)$, які є елементами матриці $\Phi(t)$. Після цього за розв'язком алгебраїчного рівняння (3) можна проаналізувати стійкість системи рівнянь (1) відносно теплових збурень.

Визначення областей керованості

Разом з дослідженням стійкості теплофізичних полів в системах ливарного виробництва іншою важливою проблемою є визначення областей керованості в таких структурно-неоднорідних системах [8]. Теплофізичний стан системи керування охолодження виливка апроксимуємо наступним звичайним диференціальним рівнянням:

$$x^{(n)}(t)+f_1(t)x^{(n-1)}(t)+...+f_n(t)x(t)=F(t)+U(t), \quad (4)$$

де $F(t)$ – функція зовнішньої збурюючої дії, а $U(t)$ – функція керуючої дії.

Після перетворення рівняння (4) до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі [6, 9] математична модель запишеться у вигляді такої задачі Коші:

$$\frac{dx_j}{dt}=x_{j+1}(t), \quad j=\overline{1,n-1},$$

$$\frac{dx_n}{dt}=\sum_{k=1}^{n} f_k(t)x_k(t)+F(t)+U(t), \quad (5)$$

$$t\in G=(0,\infty)\in R^1$$

з початковими умовами

$$\bar{x}(t_0)=\{x_1(t_0), x_2(t_0),..., x_n(t_0)\}, \quad t_0=0 \quad (6)$$

та системою умов спряження, які враховують неоднорідність фізичних параметрів технічної системи:

$$[x_k(t)]_{t=t_i}=0, \quad k=\overline{1,n}; \quad i=\overline{1,\infty}, \quad (7)$$

$$t\in G, \quad G_i=(t_{i-1},t_i)\subset G.$$

Для знаходження загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь ми можемо застосувати будь-який з відповідних чисельних методів та розв'язати n задач Коші з початковими умовами

$$x_{kj}^{(i)}(t_{i-1})=\delta_{kj},$$

де $\delta_{kj}=\begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases}$; $k,j=\overline{1,n}$; $i=1,2,...$.

В результаті ми одержимо матрицю фундаментальних розв'язків системи рівнянь (5)

$$\Phi^{(i)}(t)=\left\{\varphi_{j,k}^{(i)}(t)\right\}, \quad (8)$$

де $t\in G_i\subset G\in R^1$; $j,k=\overline{1,n}$; $i=1,2,...$.

Тоді загальний розв'язок неперервно-дискретної крайової задачі (5)-(7) запишеться у вигляді:

$$x_k^{(i)}(t)=\sum_{j=1}^{n} U_{j,k}^{(i)}\varphi_{j,k}^{(i)}(t)x_j(0)+\psi_k^{(i)}(t), \quad (9)$$

$$t\in G_i\subset G\in R^1; \quad j,k=\overline{1,n}; \quad i=1,2,...\ .$$

У формулі (9) $U_{j,k}^{(i)}$ – коефіцієнти, що визначаються за рекурентними формулами [5, 6]:

$$U_{j,k}{}^{(i+1)} = \sum_{j=1}^{n} U_{j,k}{}^{(i)} \varphi_{j,k}{}^{(i)}(t),$$

де $U_{j,k}{}^{(1)} = 1; \quad k, j = \overline{1,n}; \quad i = 1, 2, \dots$.

У розв'язку (9) вектор $\overline{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)\}$ є частковим розв'язком неоднорідної системи рівнянь (5) при нульових початкових умовах:

$$x_k{}^{(i)}(t_{i-1}) = 0,$$
$$k = \overline{1,n}; \quad t_0 = 0; \quad i = 1, 2, \dots .$$

Його можна знайти методом варіації довільних сталих або методом Коші [9]:

$$\psi_k{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} U_{j,k}{}^{(i)} \varphi_{j,k}{}^{(i)}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\det \varPhi_j{}^{(i)}(\tau)}{\det \varPhi^{(i)}(\tau)} d\tau, \tag{10}$$
$$t \in G_i \subset G \in R^1, \; k = \overline{1,n}, \; i = 1, \; 2, \dots ,$$

де $\varPhi_j^{(i)}(\tau)$ – це матриця, одержана з матриці (8) шляхом заміни j-ого стовпця на вектор $\{0, 0, \dots, F(t) + U(t)\}^T$.

Використовуючи наступне позначення

$$R_j(t) = \frac{\det \varPhi_{j-1}{}^{(i)}(t)}{\det \varPhi^{(i)}(t)}, \tag{11}$$

ми можемо записати розв'язок (10) у такій формі:

$$\psi_k{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} U_{j,k}{}^{(i)} \varphi_{j,k}{}^{(i)}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_i(\tau)[F(\tau) + U(\tau)] d\tau ,$$
$$t \in G_i \subset G \subset R^1; \quad k = \overline{1,n}; \quad i = 1, 2, \dots .$$

В результаті розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь (5) запишеться у вигляді:

$$x_k{}^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n} U_{j,k}{}^{(i)} \varphi_{j,k}{}^{(i)}(t)[x_j(0) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_i(\tau)[F(\tau) + U(\tau)] d\tau],$$
$$t \in G_i \subset G \subset R^1; \quad k = \overline{1,n}; \quad i = 1, 2, \dots . \tag{12}$$

Оскільки ми розглядаємо керованість системи (5) відносно початку координат, то $x_k(t) = 0$ для будь-яких значень t.

Тоді із системи розв'язків (12) маємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_j(0)$. Причому, через те, що $\varphi_{j,k}(t) \neq 0$, ця система має нетривіальний розв'язок лише при умові:

$$x_j(0) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_i(\tau)[F(\tau) + U(\tau)] d\tau = 0, \quad j = \overline{1,n} .$$

Звідси, для визначення фазових траєкторій системи (5) при зовнішньому збуренні $F(t)$ і управлінні $U(t)$ одержано таке рівняння:

$$x_j(0) = -\int_{t_{i-1}}^{t_i} R_i(\tau)[F(\tau) + U(\tau)] d\tau, \quad j = \overline{1,n} . \tag{13}$$

Цілий ряд систем керування мають обмеження тільки на абсолютну величину керуючої дії, яке можна записати у вигляді

$$\left|U(\tau)\right| \le M\ . \tag{14}$$

При цьому вважаємо, що $F(t) \equiv 0$.

Для визначення області керування скористаємось поняттям опорної гіперплощини, заданої рівнянням вигляду [10]

$$F(x_1, ..., x_n) = 0\,,$$

де F – диференційована функція, x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – координати n-мірного евклідового простору.

Опорною площиною до деякої множини М в її точці А є площина, яка проходить через точку А таким чином, що множина М повністю лежить по одну сторону від цієї площини, тобто в одному із замкнутих півпросторів, які визначаються цією площиною. Опорні площини відіграють важливу роль при вивченні опуклих тіл, до яких належать, зокрема, і різноманітні виливки.

Гіперплощина, яка містить хоча б одну точку області керування, називається опорною, якщо область керування повністю лежить в одному з двох підпросторів, на які ця гіперплощина ділить простір стану об'єкту. Для побудови області керування можна взяти довільний одиничний вектор $\overline{I} = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ та побудувати різні опорні гіперплощини для області керування. З огляду на замкнутість та симетричність області керування [10], таких гіперплощин є дві. Позначивши через $d(\overline{I}, \overline{T})$ відстань від початку координат до цих опорних площин, можемо записати:

$$d(\overline{I},\overline{T}) = \sup_{X \in A}(\overline{I},\overline{X}) = \sup_{X \in A}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T} - R_j(\tau) I_j U(\tau) d\tau\,.$$

Скалярний добуток $(\overline{I},\overline{X})$ досягає свого верхнього значення на межі області керування, тому, враховуючи (13), маємо:

$$d(\overline{I},\overline{T}) = \int_{0}^{T} U(\tau) \sum_{j=1}^{n} - R_j(\tau) I_j d\tau\,. \tag{15}$$

Максимізуючи вираз (15) при обмеженні (14), одержуємо таке керування

$$U(\tau) = M \cdot \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} - R_j(\tau) I_j\right). \tag{16}$$

Співвідношення (16) дає можливість за значеннями нормальних фундаментальних систем розв'язків (8) знайти вектор керування та дослідити область керованості процесом охолодження виливка. При формуванні виливка в дисперсній формі одержання виливка з заданими властивостями зв'язано з точністю математичної моделі, яка відображає область керування процесом охолодження. В роботах [5-7] авторами розроблені методи розв'язку неперервно-дискретних крайових задач з заданою точністю, що дозволяє з заданою точністю знаходити значення нормальних фундаментальних систем розв'язків (8) та відповідне їм значення вектора керування (16) для кожного конкретного процесу охолодження виливка.

Висновки

У цій праці розглянуто задачу дослідження стійкості і керування інтенсивними тепловими процесами при охолодженні виливка за газифікованими моделями. В таких системах виливок взаємодіє з газодинамічним потоком, швидкість якого розглядаємо як параметр керування процесом охолодження. Математично задача моделюється системою диференціальних рівнянь першого порядку у нормальній формі, а величина вектора керування формується значеннями нормальних фундаментальних розв'язків цієї системи. У подальших дослідженнях для реалізації запропонованого методу керування можливо застосувати алгоритм, аналогічний алгоритму МГУА (метод групового урахування аргументів) [11], що дозволяє враховувати вплив цілого ряду зовнішніх і внутрішніх параметрів.

Література

1. Шинский О.И. Механизм формирования качества отливок, получаемых по газифицируемым моделям//Литейное производство, 1991. –Т.1. – С.4-7.
2. Шуляк В.С., Рыбаков С.А., Григорян К.А. Производство отливок по газифицируемым моделям. – М.: МГИУ, 2001. – 330 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
4. Bacciotti A., Rosier L. Liapunov Functions and Stability in Control Theory. - Berlin: Springer, 2005. - 238p.
5. Кравченко В.П., Шут Н.И. Об одном методе решения задач теплопроводности для непрерывно-дискретных стержневых систем//Инженерно-физический журнал, Минск, 1996. – Т.70, № 2. – С. 290-293.
6. Кухта К.Я., Кравченко В.П. Нормальные фундаментальные системы решений в задачах теории колебаний. – К.: Наук. думка, 1973. – 208 с.
7. Mul E., Kravchenko V. Investigations of Vibrations in the Complex Dynamical Systems of Transmission Pipelines//Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003. – Vol.32. – P. 295-300.
8. Kujundzic S.M. Methods and Models for Stability, Controllability Analysis of Systems Motion. – M.: FML, 2004. – 353 p.
9. Hollis S. Differential Equations with Boundary Value Problems. – Prentice Hall, 2002. – 635 p.
10. Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М.: Наука, 1974. – 380 с.
11. Madala H.R., Ivakhnenko A.G. Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. CRC Press. 1994. – 368 p.

Одержано 18.06.2008 р.