

УДК 539.3

Н. Шевцова; А. Сяський, докт. техн. наук*Рівненський державний гуманітарний університет***ПЕРЕДАЧА СИЛ І ПАР СИЛ ДО ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ
ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ НЕСИМЕТРИЧНИХ ТОНКОСТІННИХ
ЕЛЕМЕНТІВ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ**

Задача про передачу силового і моментного навантаження до криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки через систему несиметричних відносно серединної площини тонкостінних елементів змінної жорсткості зведена до системи чотирьох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта. Методом колокації досліджується вплив на напружений стан пластинки несиметричності підсилень, способу їх розміщення на контурі отвору.

N. Shevtsova, A. Syasky**FLOW OF FORCES AND COUPLES TO THE CYLINDRICAL SOLIDS
THROUGH SYSTEM ASYMMETRY THIN-WALLED ELEMENTS
OF VARYING STIFFNESS**

The problem of flow of forces and couples to the curvilinear hole in a infinite isotropic plate through system of asymmetrical by a middle plane the thin-walled elements of varying stiffness reduce to the system of four singular integral-differential equations with cores of Hilbert. The effect of asymmetry strengthens and location mode by method of collocation does investigate.

В сучасному машинобудуванні широке застосування знаходять пластинки, послаблені отворами. Часткове підсилення контурів отворів тонкими пружними ребрами значно розширює можливості розсіювання концентрації напружень в найбільш небезпечних зонах. Підсилювальні елементи, складаючи порівняно незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність, жорсткість і стійкість [1].

Задача оптимізації напруженого стану, зменшення металомісткості пластинки за рахунок часткового підсилення контура отвору тонкими пружними елементами є актуальною проблемою як теоретичного, так і прикладного плану.

Не менш актуальною є проблема передачі зосередженого силового та моментного навантаження від розімкнених тонкостінних елементів до масивних пружних тіл. Такі задачі складають теоретичну основу розрахунку на міцність профільних шліцевих з'єднань у передачах обертового руху.

Щодо передачі зосередженого силового навантаження до криволінійного отвору пластинки через симетричні тонкі пружні ребра, то окремі аспекти цієї проблеми розглянуто в роботах [2 – 4]. Загальна постановка задачі про часткове несиметричне підсилення криволінійного контуру в пластинці тонкими пружними елементами змінної жорсткості сформульована в [5].

Пропонується розв'язок задачі про передачу зосереджених сил та пар сил до криволінійного отвору пластинки через систему однакових тонких пружних ребер, несиметричних відносно її серединної площини.

1. Постановка задачі. Побудова математичної моделі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого L має форму правильного N – кутника із закругленими кутами. Систему прямокутних координат (x, y) з початком в центрі отвору виберемо так, щоб вісь Ox співпадала з віссю симетрії отвору.

Допустимо, що на ділянці $L_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup \left[\alpha_0^* + \frac{2\pi}{N}, \beta_0^* + \frac{2\pi}{N} \right] \cup \dots \cup \left[\alpha_0^* + \frac{2\pi(N-1)}{N}, \beta_0^* + \frac{2\pi(N-1)}{N} \right]$, де α_0^*, β_0^* – полярні кути, контур L підсилений системою однакових пружних стрижнів змінної жорсткості на розтяг (стиск) $E_0 F(s)$ і згин в площині підсилення $A(s)$ (s – дуга на L_1), які моделюються тонкими пружними лініями [1]. Будемо вважати, що спільна вісь підсилень зміщена відносно серединної площини пластинки на величину z_0 .

В центрі торця, що визначається полярним кутом $\alpha_0^* + \frac{2\pi(k-1)}{N}$ ($k=1, \dots, N$), кожного стрижня прикладено зосереджену силу P_0 і пару сил з моментом L_p^0 . Сила P_0 діє в напрямку дотичної до контура L у відповідній точці, а пара сил – в спрямлюючій площині. Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

Розв'язок задачі передбачає визначення контактних зусиль $T_p, S_{p\lambda}$ і моментів M_p, P в зоні підсилення, а також кільцевих зусиль T_λ і моментів M_λ на контурі отвору.

Компоненти деформації контура L при заданому навантаженні на підставі [5, 6] визначаються за формулами

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= \frac{\tilde{k}}{(3+\nu)|\omega'(\sigma)|^2} \left\{ (1+\nu)|\omega'(\sigma)|^2 M_p(\lambda) + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) M_p(t) dt - \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) P(t) dt + 4\beta C_1 \right\}; \\ \varepsilon_\lambda &= \frac{1}{2Eh|\omega'(\sigma)|^2} \left\{ (1-\nu)|\omega'(\sigma)|^2 T_p(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) T_p(t) dt + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) S_{p\lambda}(t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} K_1(\lambda, t) &= R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{N(\lambda-t)}{2}; & K_2(\lambda, t) &= Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{N(\lambda-t)}{2}; \\ R(\lambda, t) &= \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); & Q(\lambda, t) &= \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t); \\ \alpha + i\beta &= \omega'(\sigma); & \sigma &= e^{i\lambda}; \end{aligned} \quad (2)$$

$\varepsilon_\lambda, X(\lambda)$ – відносне видовження і зміна кривини контура L пластинки;

$\omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right)$ – функція, яка здійснює конформне відображення зовнішності

одичного кола $\rho_0 = 1$ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка;

$\gamma_1 \equiv [\alpha_0, \beta_0] \cup \left[\alpha_0 + \frac{2\pi}{N}, \beta_0 + \frac{2\pi}{N} \right] \cup \dots \cup \left[\alpha_0 + \frac{2\pi(N-1)}{N}, \beta_0 + \frac{2\pi(N-1)}{N} \right]$ – образ зони

підсилення при відображенні $\omega(\xi)$; $\tilde{k} = \frac{1}{D(1-\nu)}$; D – циліндрична жорсткість

пластинки на згин; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності прийmemo $R_0 = 1$); ε – параметр, який характеризує відхилення контура L від кола.

Граничні умови задачі на кожній з ділянок підсилення на підставі [5] можна записати у вигляді

$$M_p(\lambda) + z_0 T_p(\lambda) = - \frac{A(\lambda)\Omega(\lambda)}{|\omega'(\sigma)|^3} X;$$

$$P(\lambda) = -\frac{\partial M_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - M_\rho(\lambda) \frac{\left((1-2N)|\omega'(\sigma)|^2 - 3\alpha N\right)\beta N}{\Omega^2(\lambda)};$$

$$T_\rho(\lambda) + 3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2 \frac{M_\rho(\lambda) + z_0 T_\rho(\lambda)}{z_0} = \frac{E_0 F(\lambda) \Omega(\lambda)}{|\omega'(\sigma)|^3} \varepsilon_\lambda; \quad (3)$$

$$S_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - T_\rho(\lambda) \frac{\left((1-2N)|\omega'(\sigma)|^2 - 3\alpha N\right)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in \gamma_1.$$

Тут $\Omega(\lambda) = (\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N$; $\alpha + i\beta = \omega'(\sigma)$; $2h_0$, $b_0(s)$ – поперечні розміри підсилення.

Підстановка (1) в граничні умови (3) приводить до системи чотирьох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ і моментів M_ρ , P

$$M_\rho(\lambda) + z_0 T_\rho(\lambda) = -\frac{A(\lambda)\Omega(\lambda)\tilde{k}}{(3+\nu)|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1+\nu)|\omega'(\sigma)|^2 M_\rho(\lambda) + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) M_\rho(t) dt - \right. \quad (4)$$

$$\left. - \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) P(t) dt + 4\beta C_1 \right\}; \quad P(\lambda) = -\frac{\partial M_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - M_\rho(\lambda) \frac{\left((1-2N)|\omega'(\sigma)|^2 - 3\alpha N\right)\beta N}{\Omega^2(\lambda)};$$

$$T_\rho(\lambda) + 3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2 \frac{M_\rho(\lambda) + z_0 T_\rho(\lambda)}{z_0} = \frac{E_0 F(\lambda) \Omega(\lambda)}{2Eh|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1-\nu)|\omega'(\sigma)|^2 T_\rho(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) T_\rho(t) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) dt \right\}; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - T_\rho(\lambda) \frac{\left((1-2N)|\omega'(\sigma)|^2 - 3\alpha N\right)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in \gamma_1.$$

Для визначення сталої C_1 використовується умова однозначності прогину пластинки [1], яку на підставі [6] можна записати у вигляді

$$C_1 \left[\chi + \varepsilon^2 (N-1) \right] + \frac{\varepsilon N}{2\pi} \left[(N-1)\chi - 1 \right] \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) \sin Nt dt -$$

$$- \frac{\varepsilon N}{2\pi} \left[(N-1)\chi + 1 \right] \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) \cos Nt dt + \frac{N}{2\pi} \left[\chi + \varepsilon^2 (N-1) \right] \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) dt = 0. \quad (5)$$

Крім системи (4), (5), повинні виконуватися умови рівноваги кожного підсилювального елемента [5], які після певних перетворень набувають вигляду

$$M_\rho(\alpha_0) = (L_\rho^0 + z_0 P_0) \Omega(\alpha_0); \quad T_\rho(\alpha_0) = -P_0 \Omega(\alpha_0); \quad M_\rho(\beta_0) = 0; \quad T_\rho(\beta_0) = 0. \quad (6)$$

Якщо розв'язок задачі (4), (5), який задовольняє умовам (6), стане відомим, то кільцеві зусилля T_λ і моменти M_λ на контурі отвору визначаються за формулами

$$M_\lambda = \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{\tilde{k}} X; \quad T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (7)$$

Вирази для визначення внутрішніх зусиль і моментів в підсиленні наведені в [1, 5].

Співвідношення (4) – (7) визначають математичну модель поставленої задачі. Розглянемо її окремі випадки.

Якщо в (4) – (6) покласти $z_0 = 0$ (симетричне підсилення), то вона розпадається на дві незалежні задачі для узагальненого плоского напруженого стану [3] і циліндричного згину [6].

При $\varepsilon = 0$ співвідношення (4) – (7) визначають розв’язок задачі для кругового отвору, який частково підсилений системою однакових несиметричних відносно серединної площини пластинки пружних ребер змінної жорсткості. Така задача складає теоретичну основу розрахунку прямобічних шліцевих з’єднань у передачах обертального руху.

2. Наближений розв’язок задачі

Точний розв’язок задачі (4) – (6) знайти неможливо, тому будемо застосовувати наближені методи.

Оскільки система (4) – (5) має таку ж структуру розв’язку (6), як і відповідні системи [2 – 4] при симетричному підсиленні контура L , тому метод колокації її наближеного розв’язку переноситься без змін.

Цим методом досліджено напружений стан на контурі трикутного отвору ($N = 3$; $\varepsilon = \pm 0.2$) пластинки, підсиленого трьома однаковими стрижнями сталого поперечного перерізу з параметрами

$$\frac{b_0}{\rho_0} = 0.05; \quad \frac{h_0}{h} = 2; \quad \frac{E_0}{E} = 1; \quad \frac{z_0}{h_0} = 0; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{4}.$$

Результати числового розрахунку при $P_0 = 0$; $L_p^0 \neq 0$; $\varepsilon = 0.2$; $\alpha_0 = -\frac{\pi}{4}$; $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ наведено на рис. 1, 2. Суцільні лінії відповідають симетричному підсиленню контура L ($z_0 = 0$), штрихові – $\frac{z_0}{h_0} = \frac{1}{8}$, штрихпунктирні – $\frac{z_0}{h_0} = \frac{1}{4}$. Аналогічні результати при $\varepsilon = -0.2$ ілюструються на рис. 3, 4. Всі обчислення проведено з використанням $N_0 = 100$ точок колокації. Зауважимо, що компоненти напруженого стану практично не змінюються, починаючи з $N_0 = 24$, що свідчить про задовільну збіжність методу.

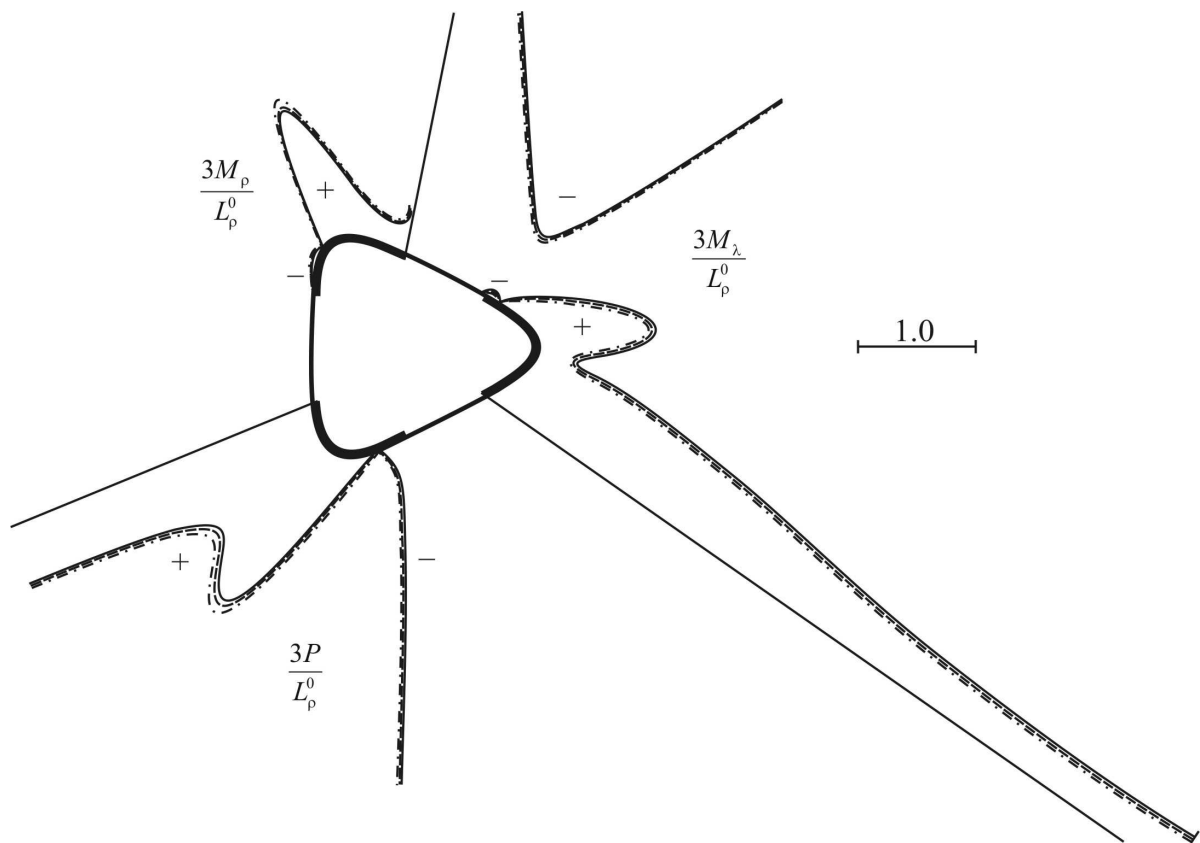


Рисунок 1 – Епюри розподілу моментних напружень

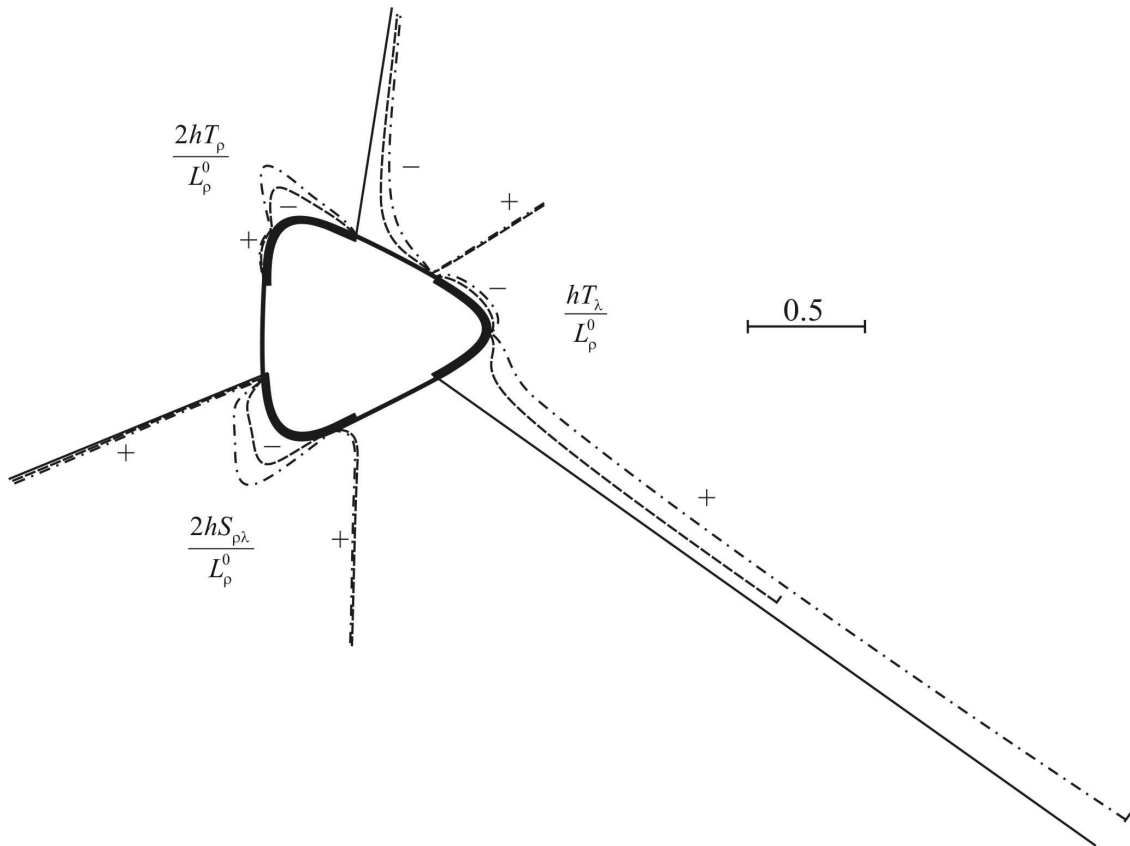


Рисунок 2 – Епюри розподілу мембранних напружень

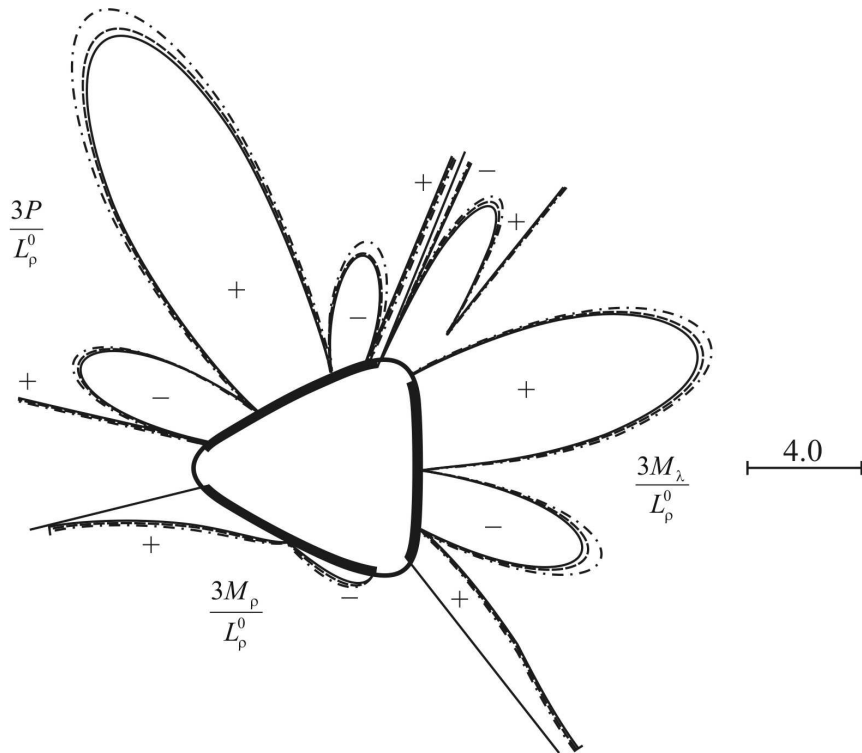


Рисунок 3 – Епюри розподілу моментних напружень

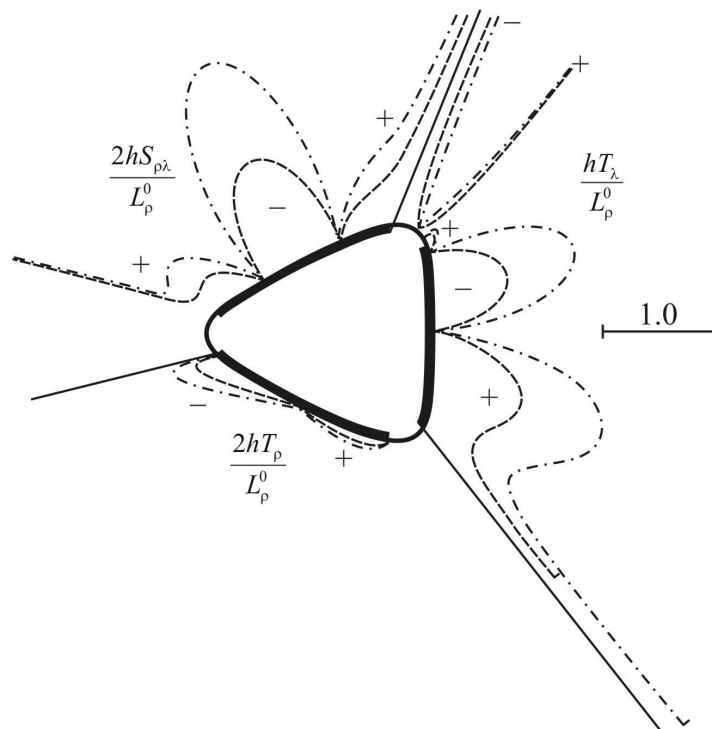


Рисунок 4 – Епюри розподілу мембранних напружень

Проведений числовий експеримент дозволяє зробити такі **висновки**:

- спосіб розміщення підсилювальних елементів на контурі отвору суттєво впливає на величину компонент напруженого стану. Найбільші напруження виникають у випадку, коли підсилення, до якого прикладається моментне навантаження, розміщене в зоні контура з найменшою кривиною;
- при передачі до пластинки зосередженого моментного навантаження мембранні напруження збільшуються із зростанням z_0/h_0 . В той же час вплив несиметричності підсилення на моментні напруження незначний.

Література

1. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964.– 384с.
2. Сяський А., Батишкіна Ю. Передача сил до криволінійного отвору нескінченної пластинки стрижнями змінної жорсткості // *Машинознавство*. – 2004.– №6 (84). – С. 21–26.
3. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Передача обертального моменту до криволінійного отвору нескінченної пластинки через систему стрижнів змінної жорсткості// *Наукові нотатки*. – Луцьк: ЛДТУ, – В.12. – 2004. – С. 331-339.
4. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Передача сил до криволінійного отвору нескінченної ортотропної пластинки стрижнями змінної жорсткості//*Вісник Тернопільського державного технічного університету*. – Т. 9, № 4. – 2004. – С. 5-11.
5. Сяський А., Шевцова Н. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розімкнених несиметричних ребер змінної жорсткості//*Вісник Тернопільського державного технічного університету*. – Т. 11, № 3. – 2006. – С.20–26.
6. Сяський А., Гаврюсев С. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами // *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. – Т.11, № 1. – 2006. – С.12–17.

Одержано 10.07. 2008 р.