

**ВІДШАРУВАННЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ
ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ
ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ****Г.Т. Сулим¹, М.М. Кундрат²****SEPARATION OF A THIN RIGID INCLUSION UNDER CYCLIC
LOADING WITH THE ASSUMPTION OF THE PLANE
THERMOELASTICITY PROBLEM****H.T. Sulym, M.M. Kundrat**¹*Львівський національний університет ім. Івана Франка, Україна*²*Національний університет водного господарства та природокористування,
Україна*

Abstract Separation of a rigid thin inclusion heated up to the set temperature is investigated in conditions of a plane problem thermoelasticity. Development of localized zones of prefracture (the weakened contact) precedes inclusions separation in a vicinities of its ends. They can correspond to regions of damages, plastic deformation, partial break of connection and another precedes. The analytical solution of the problem is obtained and its numerical analysis is made.

Вступ. Конструювання композиційних матеріалів з високою питомою міцністю та в'язкістю руйнування досягається армуванням матриці високоміцними та жорсткими включеннями у вигляді волокон чи стрічок. Для теоретичного з'ясування руйнування таких композитів під статичним чи квазістатично змінюваним навантаженням необхідний поглиблений аналіз полів напружень та деформацій біля включень. На цей час їх розподіли докладно вивчено [1-3] за статичного навантаження. Виявлено, що внаслідок підвищеної неоднорідності напруженого стану біля включень [3,4] слід очікувати більших пластичних деформацій порівняно з тріщинами чи іншими порожнистими гострокінцевими отворами. Дослідні дані свідчать, що пластичне течіння починається біля кутів на торцях включення і зі збільшенням навантаження поширюється уздовж поверхні поділу до його центральної частини (див., напр., [5,6]). Це підтверджують також оптичні [7] та мікролазерні [8] дослідження полів напружень біля армувальних елементів. Методами скінченних елементів та локальних варіацій виявлено [9], що пластична зона біля тонкого включення повинна бути зміщена в бік його центральної частини.

Отримано також аналітичні розв'язки плоских задач для лінійного включення з зонами передруйнування, що змодельовані локалізованими тонкими прошарками пластично деформованого матеріалу (поверхнями зсуву) за статичного [10-14] та циклічного [15] навантажень. Однак аналіз особливостей втомного руйнування поблизу тонких включень практично відсутній, що робить актуальними дослідження кінетики їх відшарування. В розвиток підходу [14,15] у цій праці відповідна модельна схема застосована до аналізу процесу відшарування включення за температурного і силового навантажень. Сформульовано постановку та вперше отримано аналітичний розв'язок термопружної задачі про відшарування жорсткого тонкого включення в матриці за циклічного навантаження.

1. Постановка задачі. За умов плоскої задачі теорії термопружності розглядаємо тіло, що містить абсолютно жорстке тонке включення завдовжки $2a$, нагріте до заданої температури T (рис. 1а). Тепловий контакт між включенням та тілом ідеальний, а їх температура у хвилі консолідації однакова $T = T_0$. Осі декартової системи координат

xOy збігаються з осями геометричної симетрії. Така композиція розтягується на нескінченності циклічними зусиллями паралельно лінії включення. Вважаємо, що частота зміни навантажень невелика, тож інерційні та теплотворні ефекти неістотні.

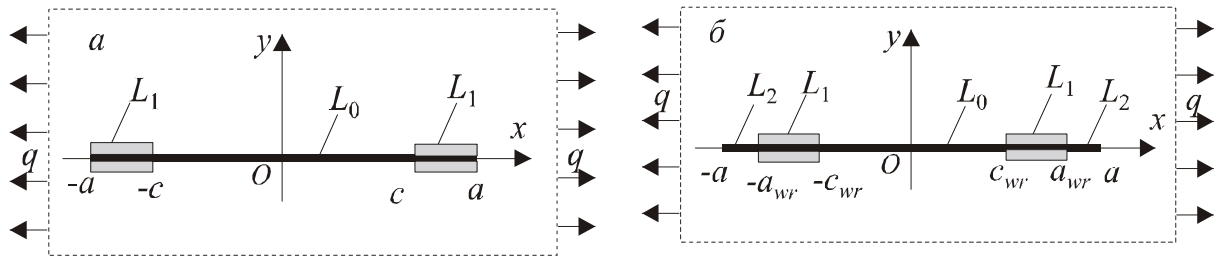


Рис. 1. Схема відшарування включення

Аналіз плоского напруженого стану композиції свідчить, що максимальні дотичні напруження τ_{\max} виникають в околах кінців включення на межі його контакту з тілом. Вважатимемо, що саме тут відбудеться ковзне відшарування (втрата зв'язку) включення від пластини, яке просуватиметься уздовж межі поділу від кожного краю до центральної частини. При цьому відшаруванню включення передують розвиток зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язків та інше. Довжину включення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо робочою довжиною включення (рис. 1б). За певної комбінації значень величини та кількості циклів навантаження включення відшаровується від матриці за механізмом поперечного зсуву.

Припустимо також, що енергія відшарування одиниці довжини включення відома і побудуємо аналітичні залежності для зміни робочої довжини включення $a_{wr} = a_{wr}(q, n, \tau_s^*, \kappa)$ від кількості циклів, амплітуди силового та температурного навантажень, міцнісних та пружних характеристик системи.

2. Крайові умови та розв'язування задачі. Спочатку розглянемо відповідну крайову задачу термопружності за неперервного навантаження, яку сформулюємо так. На ділянці $|x| < c_{wr}$ зберігається ідеальний контакт включення з тілом і тому поздовжні переміщення на ній дорівнюють

$$u(x) = (T - T_0)\alpha_p x \quad (x \in L_0), \quad (1)$$

де α_p – температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу включення.

Ділянки $c_{wr} < |x| < a_{wr}$ (рис. 1) відповідають зонам передруйнування, на берегах яких діють дотичні напруження

$$\sigma_{xy} = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1). \quad (2)$$

Величину τ_s^* можна трактувати як теоретичну або як технічну зсувну міцність межі поділу, чи, за пластичного деформування, – як зсувний поріг пластичності (довільної із складових композиту чи контактної прошарку); σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\text{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$.

Для розв'язування задачі використаємо відомі [1,16] подання для напружень і деформацій:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \beta_0\Psi_0(z),\end{aligned}\quad (3)$$

де $\beta_0 = 4G\alpha_0$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану; $\beta_0 = 4G(1 + \nu)\alpha_0$, $\kappa = 3 - 4\nu$ в умовах плоскої деформації; α_0 , G , ν – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці. Значимо, що при плоскому напруженому стані вільні поверхні півплощини вважаються теплоізолюваними.

Невідома функція $\Psi_0(z)$ визначається співвідношенням [16] $\Psi_0(z) = 0,5T$. Функцію напружень $\Phi(z)$ знайдемо після підстановки формул (3) у крайові умови (1)–(2). З урахуванням умов на нескінченності загальним розв'язком крайової задачі теорії пружності буде функція

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\kappa - 1}{4} q + f_0^T(z) \right) - \frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} \ln \Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}), \quad \Gamma_1(z, a, c) = \left[\zeta^-(z) / \zeta^+(z) \right], \quad (4)$$

$$f_0^T(x) = 2G\alpha_p(T - T_0) - \beta_0 \operatorname{Re} \Psi_0^+(x), \quad \zeta^\pm(z) = a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2} \pm z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}.$$

Тут уже враховано умову обмеженості напружень у вершинах зон передруйнування ($z = \pm c$), яка дає можливість пов'язати довжину зон з характеристиками композиції та навантаженням:

$$q \frac{\kappa + 1}{2} - 4G\alpha_p(T - T_0) + \beta_0 T - \frac{8\kappa\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} \ln \frac{a_{wr} + \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{c_{wr}} = 0. \quad (5)$$

Формули (3)–(5) цілком описують залежність поля напружень та деформацій у тілі з включенням від заданого навантаження і дають можливість дослідити умови його відшарування.

Нехай γ_τ^* – енергія, необхідна для відшарування включення на одиницю довжини і яку вважаємо відомою характеристикою композиції. Для зменшення робочої довжини включення на деяку малу величину Δa_{wr} необхідно виконати роботу

$$\gamma_\tau^* \Delta a_{wr} = 2 \int_{a_{wr} - \Delta a_{wr}}^{a_{wr} - d - \Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr}) - u(x, a_{wr})] dx, \quad d = a_{wr} - c_{wr},$$

За схемою [15,17] подамо функцію $u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr})$ у вигляді ряду Тейлора за степенями Δa_{wr} , знехтуємо доданками порядку $(\Delta a_{wr})^2$ та спрямуємо Δa_{wr} до нуля, вважаючи, що параметр a_{wr} залежить від навантаження. Тоді після перетворень отримаємо, що

$$\gamma_\tau^* = 2\tau_s^* \left[\frac{d}{da_{wr}} \int_{a_{wr} - d}^{a_{wr}} u(x, a_{wr}) dx - u(a_{wr}, a_{wr}) \right],$$

де згідно з формулами (3), (4)

$$u(x, a_{wr}) = \alpha_p(T - T_0)x + \frac{\kappa\tau_s^*}{\pi G(\kappa + 1)} \{ a_{wr} \ln \Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) - x \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) \},$$

$$\Gamma_2(x, a, c) = \ln \left[\eta^-(x) / \eta^+(x) \right], \quad \eta^\pm(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}.$$

Переміщення точок тіла біля вершини робочої частини включення дорівнюють

$$u(a_{wr}, a_{wr}) = \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x, a_{wr}) = (T - T_0)\alpha_p a_{wr} + \frac{2\kappa\tau_s^* a_{wr}}{\pi G(\kappa + 1)} \ln \frac{a_{wr}}{c_{wr}}. \quad (6)$$

Зазначимо, що за умови $4G\alpha_p = \beta_0$ (чи при плоскому напруженому стані $\alpha_p = \alpha_0$) температура нагрівання включення не впливає на розмір зон переддруйнування. Але переміщення точок матеріалу тіла є залежними від температури нагрівання.

З урахуванням поданих виразів дисипація енергії відшарування включення дорівнює

$$\begin{aligned} \gamma_\tau^* &= 2a_{wr} \tau_s^* \left\{ T_{10} \alpha_p [\text{th}^2(H) - 1] + \frac{2\kappa\tau_s^*}{\pi G(\kappa+1)} [\ln(\text{ch}(H)) - H\text{th}(H)] + \right. \\ &\quad \left. + a_{wr} \left[T_{10} \alpha_p \frac{\text{th}(H)}{\text{ch}^2(H)} + \frac{\kappa\tau_s^*}{\pi G(\kappa+1)} \left(\text{th}(H) - \frac{H}{\text{ch}^2(H)} \right) \right] \frac{dH}{da_{wr}} \right\}, \quad T_{10} = T - T_0, \quad (7) \\ H &= \frac{\pi(\kappa+1)^2}{8\kappa} \frac{q}{2\tau_s^*} - \frac{1}{2} (S_p - S_0), \quad S_p = \frac{\pi(\kappa+1)}{\kappa\tau_s^*} G\alpha_p T_{10}, \quad S_0 = \frac{\pi(\kappa+1)}{4\kappa\tau_s^*} \beta_0 T. \end{aligned}$$

Введемо безрозмірну робочу довжину включення λ_{wr} і подамо (7) у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{wr}}{dH} &= \lambda_{wr}^2 f_2(\lambda_{wr}, H, S_p), \quad \lambda_{wr} = \frac{\kappa\tau_s^{*2} a_{wr}}{\pi G(\kappa+1)\gamma_\tau^*}, \\ f_2(\lambda_{wr}, H, S_p) &= \frac{\left[\text{th}(H) + (S_p \text{th}(H) - H) \text{ch}^{-2}(H) \right]}{0,5 + \lambda_{wr} \left\{ 2 \left[H\text{th}(H) - \ln(\text{ch}(H)) \right] + S_p \text{ch}^{-2}(H) \right\}}. \quad (8) \end{aligned}$$

Диференціальне рівняння (8) використаємо для розв'язання задачі про відшарування включення за циклічного навантаження, нехтуючи впливом залишкових напружень. Приймаємо, що відшарування включення відбувається під час кожного періоду навантаження, а під час розвантаження його робоча довжина не змінюється. Співвідношення (8) описує відшарування включення за час одного циклу. Тому, інтегруючи його від мінімального H_{\min} до максимального H_{\max} навантаження та вважаючи параметр λ_{wr} сталим упродовж одного циклу, отримуємо зменшення робочої довжини включення протягом одного циклу на

$$\delta\lambda_{wr} = \lambda_{wr}^2 \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} f_2(\lambda_{wr}, H, S_p) dH \equiv F_2(\lambda_{wr}, H_{\min}, H_{\max}, S_p).$$

Звідси швидкість відшарування включення подається виразом

$$\frac{d\lambda_{wr}}{dn} = F_2(\lambda_{wr}, H_{\min}, H_{\max}, S_p), \quad (9)$$

де n – кількість циклів навантаження. Після поділу змінних у формулі (9) та інтегрування залежність між робочою довжиною включення та кількістю циклів матиме вигляд

$$n = \int_{\lambda_0}^{\lambda_n} \frac{d\lambda_{wr}}{F_2(\lambda_{wr}, H_{\min}, H_{\max}, S_p)}, \quad (10)$$

де λ_0, λ_n – значення параметрів робочої довжини включення до початку навантажування та після n циклів. Зв'язок між значенням параметра λ_{wr} та робочою довжиною a_{wr} включення задається формулою (8). Формула (10) подає шукану залежність між робочою довжиною включення та кількістю циклів навантаження.

3. Числові результати. На рис. 2 подані результати розрахунків за формулою (10) робочої довжини включення у залежності від кількості циклів навантаження для чотирьох різних його робочих довжин λ_{wr} за відсутності температурних напружень: їх початкові значення зчитуємо на осі ординат за нульової кількості циклів ($n=0$).

Мінімальне та максимальне значення навантаження за цикл задаємо за допомогою параметра $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*)$, який для рис. 2а прийнято на рівні $\tilde{q}_{\min} = q_{\min}/(2\tau_s^*) = 0$, $\tilde{q}_{\max} = q_{\max}/(2\tau_s^*) = 0,1$; при цьому $\kappa = 2,2$, $H_{\min} = 0,091$, $H_{\max} = 0,183$, $S_p = S_0 = 0$. Для відображених на рис. 2б результатів – $\tilde{q}_{\min} = 0,1$, $\tilde{q}_{\max} = 0,2$ і, відповідно, $H_{\min} = 0,183$, $H_{\max} = 0,366$. Зі збільшенням максимального навантаження за цикл швидкість відшарування включення також зростає, зокрема, на рис. 2б вона (в межах однопроцентного відхилення) на 94% більша, ніж на рис. 2а.

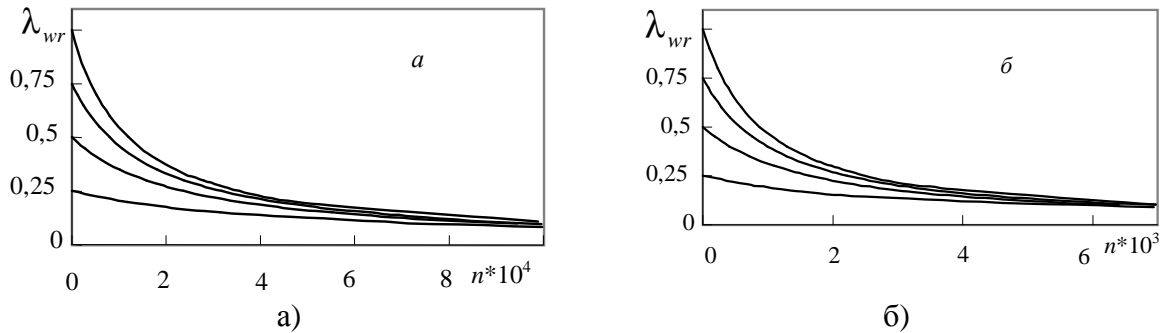


Рис. 2. Залежність робочої довжини включення від кількості циклів навантаження

На рис. 3 подано такі ж залежності за нагрівання включення з робочою довжиною $\lambda_{wr} = 0,25$ за умов $S_p = S_0$ і $T_0 = 0$, тобто коли за сталого розтягу на безмежності у такій же задачі температура включення не впливає на розмір зони передруйнування. Мінімальне та максимальне значення навантаження за цикл $\tilde{q}_{\min} = 0$, $\tilde{q}_{\max} = 0,1$; для лінії 1 параметр $S_p = 0$; 2 – $S_p = 0,1$; 3 – $S_p = 0,2$.

На рис. 4 подано швидкості відшарування включення у залежності від його робочої довжини за відсутності нагрівання для різних рівнів навантаження за цикл: для лінії 1 – $\tilde{q}_{\min} = 0$, $\tilde{q}_{\max} = 0,1$; для лінії 2 – $\tilde{q}_{\min} = 0,1$, $\tilde{q}_{\max} = 0,2$; інші параметри такі ж, як на рис. 2.

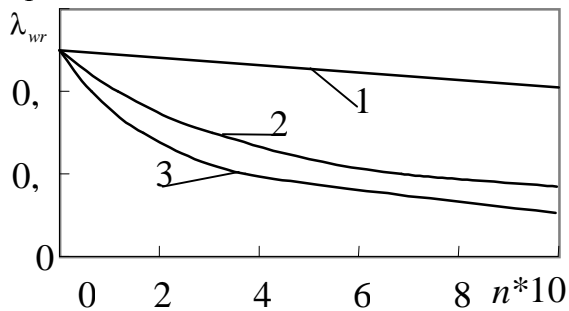


Рис. 3. Робоча довжина включення

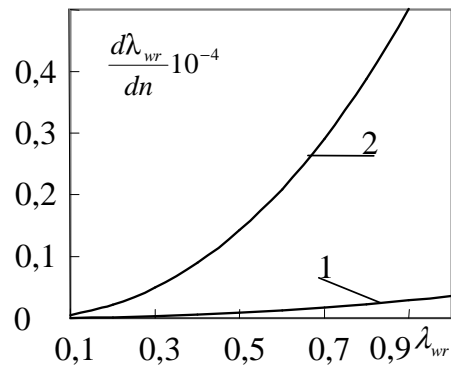


Рис. 4. Швидкість відшарування включення

Швидкість відшарування істотно залежить як від початкової робочої довжини включення, так і максимального навантаження за цикл.

Висновки. Запропоновано математичну модель явища відшарування тонкого жорсткого включення від основного матеріалу матриці. З її використанням сформульовано постановку та вперше отримано аналітичний розв'язок задачі процесу відшарування включення за циклічних силового та температурного навантажень.

Для заданого фіксованого навантаження за цикл та наперед відомій кількості циклів за допомогою формули (10) завжди можна підібрати довжину включення чи його характеристики таким чином, щоб відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи цілком не відбувалося).

Література

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Sih G.C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions // *Developments in mechanics.* – V. 3, Pt. 1. *Solid. mech. and mater.* – New York: Wiley, 1965. – P. 61–79.
3. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т., Труш І.І. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // *Проблемы прочности.* – 1972. – № 7. – С. 3–9.
4. Бережницький Л.Т., Громьяк Р.С. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // *Физико-химическая механика материалов.* – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 39–47.
5. Эберт Л.Дж., Райт П.К. Механические поверхности раздела. – Композиционные материалы. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах / Редактор А. Меткалф. – М.: Мир, 1978. – С. 42–76.
6. Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei. Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity // *Fibre Sci. and Technol.* – 1981. – Т. 15, № 4. – P. 243–256.
7. Iremonger M.J., Ulood W.G. Effects of geometry on stress in discontinuous composite materials // *Strain Anal.* – 1969. – Т. 4, № 2. – P. 121–126.
8. Paipetis A., Galiotis C. Modeling the stress-transfer efficiency of carbon-epoxy interfaces // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 2001. – Т. 457, № 2011. – P. 1555–1577.
9. Бережницький Л.Т., Сенюк М.Н. Применение метода локальных вариаций для определения зон пластичности возле дефектов // Тез. докл. 3 Респ. конф. “Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе”. – Киев, 1982. – С. 113–114.
10. Brussat T.R., Westmann R.A. Interfacial slip around rigid fiber inclusions // *J. Comp. Mater.* – 1974. – Т. 8, № 4. – P. 364–377.
11. Shioiri J., Inoue K. Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials // *Rep. 1-st Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials.* – Moscow, 1979. – P. 286–295.
12. Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М. Упругопластические деформации в окрестности жесткого включения // *Проблемы прочности.* – 1984. – № 11. – С. 62–69.
13. Сулим Г.Т., Кундрат М.М. Гранична рівновага та руйнування в ортотропному тілі зі жорстким стрічковим включенням // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 69–79.
14. Sulym H.T., Kundrat M.M.. Odseparowywanie gietkiej nakladki na krawedzi polplaszczyny sprzystej w plaskim zagadnieniu termosprezystosci // *Materialy III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji (Augustów 1–4 czerwca 2005).* – Bialystok, 2005. – S. 401–404.
15. Кундрат М.М. Про відшарування жорсткого лінійного включення // *Доповіді НАН України.* – 2001. – № 2. – С. 60–65.
16. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Белорус. гос. ун-т, 1972. – 200 с.
17. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.