

## ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ, БЕРЕГИ ЯКОЇ КОНТАКТУЮТЬ

В.К. Опанасович , М.С. Слободян

## BENDING OF A CIRCULAR PLATE WITH A RADIAL CRACK WHOSE FLANKS ARE IN CONTACT

V.K.Opanasovych, M.S. Slobodyan

*Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна*

**Abstract** Bending of the circle isotropic plate with radial crack with contact shores is investigated. For want of solving of a problem was considered, that the shores of a crack come in contact on the upper basis on all it's length. A solving of a problem constructed with use of methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials. The system of singular integral equations was untied numerically with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which constructed graphic dependence of contact pressure and moments intensity factor and strain intensity factor.

В багатьох галузях техніки широко використовуються пластинчаті елементи. Тріщиноподібні дефекти значною мірою впливають на їх експлуатаційні характеристики. Постановка задач згину пластин з тріщинами без урахування контакту берегів та методи їх розв'язування подано в монографіях [1-3]. Дослідження, які проведено в публікаціях [4-8], показують, що взаємодія поверхонь тріщин значно впливає на розподіл напружено-деформованого стану в околі дефектів. У роботі [8] досліджено згин круглої пластини з центральною тріщиною, береги якої контактують. В даній статті цей результат узагальнюється на випадок радіальної тріщини.

### **Постановка задачі.**

Розглянемо круглу пластину радіуса  $R$ , яка містить радіальну прямолінійну тріщину завдовжки  $2l$ , береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Пластина згинається рівномірно розподіленими моментами  $M_0$  (див. рис. 1). Нехай під дією

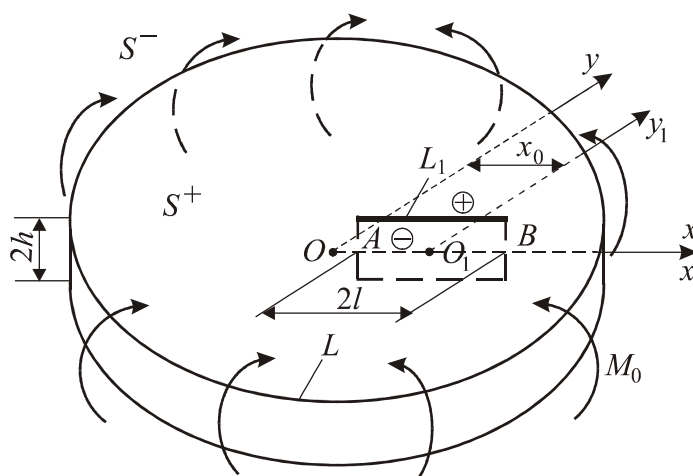


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

згинальних моментів береги тріщини приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини. Виберемо в центрі серединної площини пластини початок декартової системи координат  $Ox_1y_1$ , направивши вісь  $Ox_1$  перпендикулярно до неї. Введемо в площині  $Ox_1y_1$  полярну систему координат  $r$  і  $\theta$  з полюсом у точці  $O$  та полярною

віссю  $Ox$ . Вважатимемо, що тріщина розміщено вздовж осі  $Ox$ . Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат  $O_1x_1y_1$ . Через  $A$  і  $B$  позначимо точки площини  $Oxy$ , які співпадають з кінцями тріщини; лінію, де розміщена тріщина, позначимо через  $L_1$ , границю круглої пластини – через  $L$ , область всередині круглої пластини – через  $S^+$ , ззовні – через  $S^-$ .

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину (класична теорія); при таких крайових умовах

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, M_r = M_0, P_r = 0, x \in L, \quad (1)$$

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = -N/(2h), \sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, M_{y_1}^\pm = hN, P^\pm = 0, [v_{II}] + h[\partial w/\partial y_1] = 0, x_1 \in L_1, \quad (2)$$

де  $N$  – контактне зусилля між берегами тріщини,  $\sigma_{x_1y_1}$ ,  $\sigma_{y_1y_1}$ ,  $\sigma_{rr}$  і  $\sigma_{r\theta}$  – компоненти тензора напружень в декартові і полярній системах координат відповідно,  $v_{II}$  – проекція вектора переміщень у плоскій задачі на вісь  $O_1y_1$ ,  $w$  – прогин пластини в задачі згину,  $M_r$  і  $M_{y_1}$  – згинальні моменти,  $P_r$  – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сил;  $[f] = f^+ - f^-$ , значками “+” і “-” позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при  $y_1 \rightarrow \pm 0$ .

#### Побудова розв'язку.

Для розв'язку задачі згину та плоскої задачі введемо комплексні потенціали [3, 9] відповідно  $\Phi_{13}(z)$ ,  $\Psi_{13}(z)$  та  $\Phi_{1II}(z)$  і  $\Psi_{1II}(z)$ , які подамо у вигляді

$$\Phi_3(z) = \Phi_{13}(z) + \Phi_{23}(z), \Psi_3(z) = \Psi_{13}(z) + \Psi_{23}(z), \quad (3)$$

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{1II}(z) + \Phi_{2II}(z), \Psi_{II}(z) = \Psi_{1II}(z) + \Psi_{2II}(z), \quad (4)$$

де  $\Phi_{13}(z)$ ,  $\Psi_{13}(z)$  і  $\Phi_{1II}(z)$ ,  $\Psi_{1II}(z)$  – голоморфні ззовні тріщини функції, а  $\Phi_{23}(z)$ ,  $\Psi_{23}(z)$  і  $\Phi_{2II}(z)$ ,  $\Psi_{2II}(z)$  – голоморфні в області  $S^+$ ,  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ .

Якщо ввести функції [3, 10]

$$\begin{aligned} \Phi_{2(3II)}(z) &= -\bar{\Phi}_{2(3II)}(R^2/z) + R^2/z \bar{\Phi}'_{2(3II)}(R^2/z) + R^2/z^2 \bar{\Psi}'_{2(3II)}(R^2/z), \\ \Omega_{13}(z_1) &= -\bar{\Phi}_{13}(z_1) - z_1 \bar{\Phi}'_{13}(z_1) - \bar{\Psi}_{13}(z_1), \\ \Omega_{1II}(z_1) &= \bar{\Phi}_{1II}(z_1) + z_1 \bar{\Phi}'_{1II}(z_1) + \bar{\Psi}_{1II}(z_1), \end{aligned} \quad (5)$$

то для визначення напружено-деформованого стану пластини отримаємо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_{23}(z) \\ \Phi_{2II}(z) \end{pmatrix} - \frac{R^2}{r^2} \begin{pmatrix} \Phi_{23}(R^2/\bar{z}) \\ \Phi_{2II}(R^2/\bar{z}) \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \begin{pmatrix} \Phi_{23}(z) \\ \Phi_{2II}(z) \end{pmatrix} - \bar{z} \begin{pmatrix} \Phi'_{23}(z) \\ \Phi'_{2II}(z) \end{pmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{pmatrix} \Phi_{13}(z_1) \\ \Phi_{1II}(z_1) \end{pmatrix} + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{13}(z_1) \\ \bar{\Phi}_{1II}(z_1) \end{pmatrix} + \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_{13}(\bar{z}_1) \\ -\Omega_{1II}(\bar{z}_1) \end{pmatrix} - (z_1 - \bar{z}_1) \begin{pmatrix} \Phi'_{13}(z_1) \\ \Phi'_{1II}(z_1) \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ -(2i\mu/z) \cdot \partial(u_{II} + iv_{II})/\partial\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}\Phi_{23}(z) \\ \kappa\Phi_{2II}(z) \end{pmatrix} + \frac{R^2}{r^2} \begin{pmatrix} \Phi_{23}(R^2/\bar{z}) \\ \Phi_{2II}(R^2/\bar{z}) \end{pmatrix} - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \begin{pmatrix} \Phi_{23}(z) \\ \Phi_{2II}(z) \end{pmatrix} - \right. \\ &- \bar{z} \begin{pmatrix} \Phi'_{23}(z) \\ \Phi'_{2II}(z) \end{pmatrix} \left. \right\} + \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}\Phi_{13}(z_1) \\ \kappa\Phi_{1II}(z_1) \end{pmatrix} - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{13}(z_1) \\ \bar{\Phi}_{1II}(z_1) \end{pmatrix} - \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_{13}(\bar{z}_1) \\ -\Omega_{1II}(\bar{z}_1) \end{pmatrix} - (z_1 - \bar{z}_1) \begin{pmatrix} \Phi'_{13}(z_1) \\ \Phi'_{1II}(z_1) \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial g/\partial x \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_{13}(z_1) \\ \Phi_{1II}(z_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Omega_{13}(\bar{z}_1) \\ -\Omega_{1II}(\bar{z}_1) \end{pmatrix} + (z_1 - \bar{z}_1) \begin{pmatrix} \Phi'_{13}(z_1) \\ \Phi'_{1II}(z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{23}(z) \\ \Phi_{2II}(z) \end{pmatrix} + \\ &+ \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2}\right) \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{23}(z) \\ \bar{\Phi}_{2II}(z) \end{pmatrix} + z \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \begin{pmatrix} \Phi'_{23}(z) \\ \Phi'_{2II}(z) \end{pmatrix} + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \begin{pmatrix} \Phi_{23}(R^2/\bar{z}) \\ \Phi_{2II}(R^2/\bar{z}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} f \\ 2\mu \partial(u_{II} + iv_{II})/\partial x_1 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \tilde{\kappa} \Phi_{13}(z_1) \\ \kappa \Phi_{1II}(z_1) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \Omega_{13}(\bar{z}_1) \\ -\Omega_{1II}(\bar{z}_1) \end{array} \right) - (z_1 - \bar{z}_1) \left( \begin{array}{c} \Phi'_{13}(z_1) \\ \Phi'_{1II}(z_1) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \tilde{\kappa} \Phi_{23}(z) \\ \kappa \Phi_{2II}(z) \end{array} \right) - \\ &- \left( \begin{array}{c} 1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \left( \begin{array}{c} \Phi_{23}(z) \\ \Phi_{2II}(z) \end{array} \right) - z \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left( \begin{array}{c} \Phi'_{23}(z) \\ \Phi'_{2II}(z) \end{array} \right) - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \left( \begin{array}{c} \Phi_{23}(R^2/\bar{z}) \\ \Phi_{2II}(R^2/\bar{z}) \end{array} \right) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\mu$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $z_1 = x_1 + iy_1 = z - x_0$ ,

$$g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}, \quad f = -\frac{1}{D(1-\nu)} \left( M_y + i\tilde{c}' + iH_{xy} + i \int_0^t N_y(\tau) d\tau \right), \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad r^2 = z \cdot \bar{z},$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) e^{i\theta} \right\}, \quad f = -\frac{1}{D(1-\nu)} \left( M_r + iH_{r\theta} + i \int_0^s N_r(s) ds \right), \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},$$

$H_{xy}$  і  $H_{r\theta}$  – крутні моменти в декартові та полярній системах координат відповідно.

Для функцій  $\Phi_{23}(z)$  і  $\Phi_{2II}(z)$  справедливі подання

$$\Phi_{23}(z) = \begin{cases} A'_0 + A'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ B'_0 + B'_1 z^{-1} + \dots, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (10)$$

$$\Phi_{2II}(z) = \begin{cases} a'_0 + a'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ b'_0 + b'_1 z^{-1} + \dots, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (11)$$

та виконуються умови

$$A'_0 + \bar{B}'_0 = 0, \quad B'_1 = 0, \quad a'_0 + \bar{b}'_0 = 0, \quad b'_1 = 0. \quad (12)$$

**Задача згину пластини.**

З крайової умови (2) та формули (9) отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\tilde{\kappa} \Phi_{13}(x_1) - \Omega_{13}(x_1))^+ - (\tilde{\kappa} \Phi_{13}(x_1) - \Omega_{13}(x_1))^- = 0, \quad x_1 \in L_1,$$

розв'язавши яку матимемо

$$\Omega_{13}(z_1) = \tilde{\kappa} \Phi_{13}(z_1). \quad (13)$$

На основі [2] функцію  $\Phi_{13}(z_1)$  подамо у вигляді

$$\Phi_{13}(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{y_1(t) dt}{t - z_1}, \quad y_1(x) = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}} \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]. \quad (14)$$

Якщо ввести функцію

$$F_3(z) = \begin{cases} -\Phi_{23}(z) - \tilde{\kappa} \Phi_{13}(z - x_0), & z \in S^-, \\ \tilde{\kappa} \Phi_{23}(z) + M_0 (D(1-\nu))^{-1} - (1 + R^2 z^{-2}) \bar{\Phi}_{13}(R^2/z - x_0) - \\ - R^2 z^{-2} \{ \tilde{\kappa} \Phi_{13}(R^2/z - x_0) - (z - R^2/z) \bar{\Phi}'_{13}(R^2/z - x_0) \}, & z \in S^+, \end{cases} \quad (15)$$

то, на основі (1) і (7), вона задовольняє задачу лінійного спряження

$$F_3^+(s) - F_3^-(s) = 0, \quad s \in L. \quad (16)$$

Врахувавши (10) і (14), розв'язок задачі (16) можна подати у вигляді

$$F_3(z) = -B'_0,$$

звідки, беручи до уваги (15), отримаємо

$$\Phi_{23}(z) = \begin{cases} B'_0 - \tilde{\kappa} \Phi_{13}(z - x_0), & z \in S^-, \\ \left( -B'_0 - M_0 (D(1-\nu))^{-1} + (1 + R^2 z^{-2}) \bar{\Phi}_{13}(R^2/z - x_0) + \right. \\ \left. + R^2 z^{-2} \{ \tilde{\kappa} \Phi_{13}(R^2/z - x_0) - (z - R^2/z) \bar{\Phi}'_{13}(R^2/z - x_0) \} \right) / \tilde{\kappa}, & z \in S^+. \end{cases} \quad (17)$$

На основі крайової умови (2) та залежності (9) можемо записати

$$\tilde{\kappa} \Phi_{13}^+(x_1) + \tilde{\kappa} \Phi_{13}^-(x_1) + \tilde{\kappa} \Phi_{23}(x_1 + x_0) - \left\{ 1 + R^2 (x_1 + x_0)^{-2} \right\} \bar{\Phi}_{23}(x_1 + x_0) - \left\{ x_1 + x_0 - R^2 / (x_1 + x_0) \right\} \times \\ \times \bar{\Phi}'_{23}(x_1 + x_0) - R^2 (x_1 + x_0)^{-2} \Phi_{23}(R^2 / (x_1 + x_0)) = m (M_y + i\tilde{c}'), \quad m = -(D(1-\nu))^{-1}, \quad x_1 \in L_1. \quad (18)$$

Взявши до уваги вирази для функцій  $\Phi_{13}(z_1)$  (14) і  $\Phi_{23}(z)$  (17), для знаходження невідомої функції  $y_1(t)$  з (18) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\int_{-1}^1 \{K(\eta, \xi)Y_1(\eta) + L(\eta, \xi)\overline{Y_1(\eta)}\}d\eta = \tilde{m} hN/M_0 + \tilde{m}ic + P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (19)$$

де

$$L(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2\pi i} \left\{ -\frac{T}{\tilde{\kappa}} + \frac{T-X}{TX-1} + \frac{X-T-XT^2+T^3}{(TX-1)^2} \right\}, \quad K(\eta, \xi) = \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i} \frac{1}{\eta-\xi} + \frac{\lambda}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ -\tilde{\kappa}T + \frac{\tilde{\kappa}T - \tilde{\kappa}X + T + \tilde{\kappa}^2 T}{TX-1} + \frac{3X-3T-T^2X+T^3}{(TX-1)^2} + \frac{4T^2X-2TX^2-2T^3}{(TX-1)^3} \right\}, \quad P(\xi) = 1.5(1+\nu),$$

$$T = X_0 + \lambda\eta, \quad X = x_0 + \lambda\xi, \quad \lambda = l/R, \quad X_0 = x_0/R, \quad x_1 = l\xi, \quad t = l\eta, \quad c = Eh^3\tilde{c}'/M_0, \quad \tilde{m} = -1.5(1+\nu), \quad y_1(t)Eh^3/M_0 = Y_1(t) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t), \quad Y_{1j}(t) - \text{дійсні функції } (j=1,2).$$

Рівняння (19) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y_1(\eta)d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{11}(\eta)d\eta = 0, \quad (20)$$

які виражають собою однозначність кутів повороту та прогину пластини при обході контуру тріщини.

#### Плоска задача.

Для плоскої задачі на основі формул (6)-(12) та крайових умов (1), (2), як це було зроблено у задачі згину, можна отримати наступні співвідношення

$$\Phi_{1II}(z_1) = \Omega_{1II}(z_1), \quad (21)$$

$$\Phi_{1II}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{g_1'(t)dt}{t-z_1}, \quad g_1'(x_1) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \left[ \frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_1} \right], \quad (22)$$

$$\Phi_{2II}(z) = \begin{cases} b_0' + \Phi_{1II}(z-x_0), & z \in S^-, \\ b_0' - (1+R^2z^{-2})\overline{\Phi_{1II}(R^2/z-x_0)} + R^2z^{-2}\{\Phi_{1II}(R^2/z-x_0) + (z-R^2/z)\overline{\Phi_{1II}'(R^2/z-x_0)}\}, & z \in S^+. \end{cases} \quad (23)$$

З крайової умови (2) та формули (8) отримаємо

$$-0.5N/h = \Phi_{1II}^+(x_1) + \Phi_{1II}^-(x_1) + \Phi_{2II}(x_1+x_0) + \{1+R^2(x_1+x_0)^{-2}\}\overline{\Phi_{2II}(x_1+x_0)} + \{x_1-R^2/(x_1+x_0)\}\overline{\Phi_{2II}'(x_1+x_0)} + R^2(x_1+x_0)^{-2}\Phi_{2II}(R^2/(x_1+x_0)), \quad x_1 \in L_1. \quad (24)$$

Враховавши залежності (21)-(23), на основі (24) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції  $g_1'(t)$ , яке в безрозмірних координатах має вигляд

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi)G_1'(t) + S(\eta, \xi)\overline{G_1'(t)}\}d\eta = -0.5hN/M_0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (25)$$

де

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ T + \frac{T-X}{TX-1} + \frac{X-T-T^2X+T^3}{(TX-1)^2} \right\}, \quad R(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi(\eta-\xi)} + \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ T + \frac{2T+T-X}{TX-1} + \frac{3X-3T-T^2X+T^3}{(TX-1)^2} + \frac{4T^2X-2TX^2-2T^3}{(TX-1)^3} \right\}, \quad \frac{h^2g_1'(t)}{M_0} = G_1(t) = G_{11}(t) + iG_{12}(t),$$

$G_{1j}(t)$  – дійсні функції ( $j=1,2$ ).

Виходячи з умов однозначності переміщень при обході контуру тріщини, отримаємо

$$\int_{-1}^1 G_1(\eta) d\eta = 0. \quad (26)$$

Зауважимо, що на основі (2) функції  $Y_{12}(\eta)$  і  $G_{11}(\eta)$  пов'язані співвідношенням

$$G_{11}(\eta) + \frac{1 + \tilde{\kappa}}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} Y_{12}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (27)$$

Маючи вираз для комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину, можемо обчислити коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ) і моментів (КІМ) [2].

### Числовий аналіз задачі та висновки.

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь (19), (20), (25)-(27) розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [11]. Проведено числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2-5 при  $\nu = 0.3$ . Якщо вважати, що пластина безмежна ( $\lambda = 0$ ), то приходимо до результатів робіт [4, 6], а у випадку центральної тріщини ( $X_0 = 0$ ) – до результатів роботи [8].

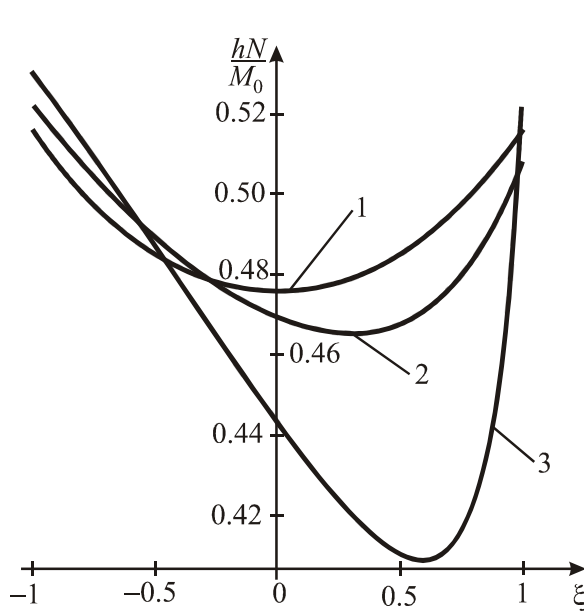


Рис. 2. Графічна залежність приведенного контактного зусилля для  $\lambda = l/R = 0.5$  при різних  $X_0 = x_0/R$  (крива 1 –  $X_0 = 0$ , крива 2 –  $X_0 = 0.3$ , крива 3 –  $X_0 = 0.4$ ).

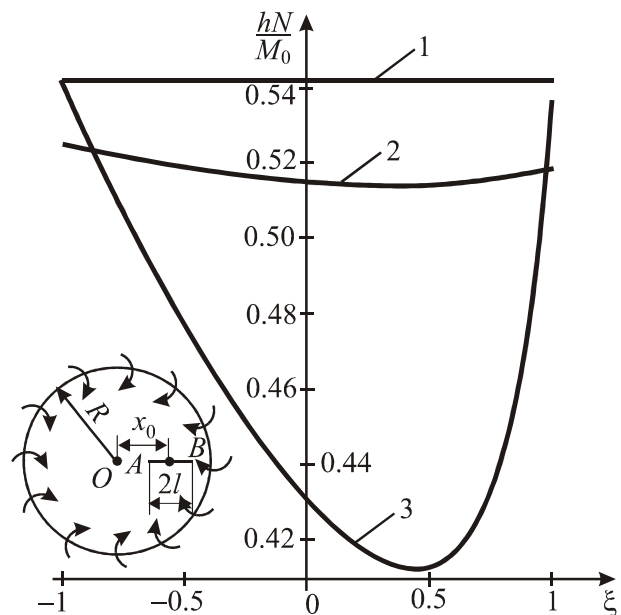


Рис. 3. Графічна залежність приведенного контактного зусилля для  $X_0 = x_0/R = 0.25$  при різних  $\lambda = l/R$  (крива 1 –  $\lambda = 0$ , крива 2 –  $\lambda = 0.3$ , крива 3 –  $\lambda = 0.4$ ).

Як видно з рис. 2 і 3 контактне зусилля між берегами тріщини для круглої пластини з прямолінійною тріщиною є меншим ніж для безмежної пластини з тією ж тріщиною [4]; при наближенні тріщини до межі пластини контактне зусилля поблизу тієї вершини, яка знаходиться ближче до краю пластини; мінімум контактного зусилля зменшується при наближенні тріщини до краю пластини.

На основі рис. 4 можна зробити висновки: при віддаленні тріщини від центру пластини КІМ у вершині  $B$  зростають, а у вершині  $A$  спочатку спадають а потім починають зростати; КІМ з урахуванням контакту берегів тріщини є значно менші ніж без його врахування; КІМ для круглої пластини є більшими ніж для безмежної пластини [8]; чим довша тріщина в порівнянні з радіусом кругової пластини тим КІМ є більшими; КІМ у вершині  $B$  є більшими ніж у вершині  $A$ .

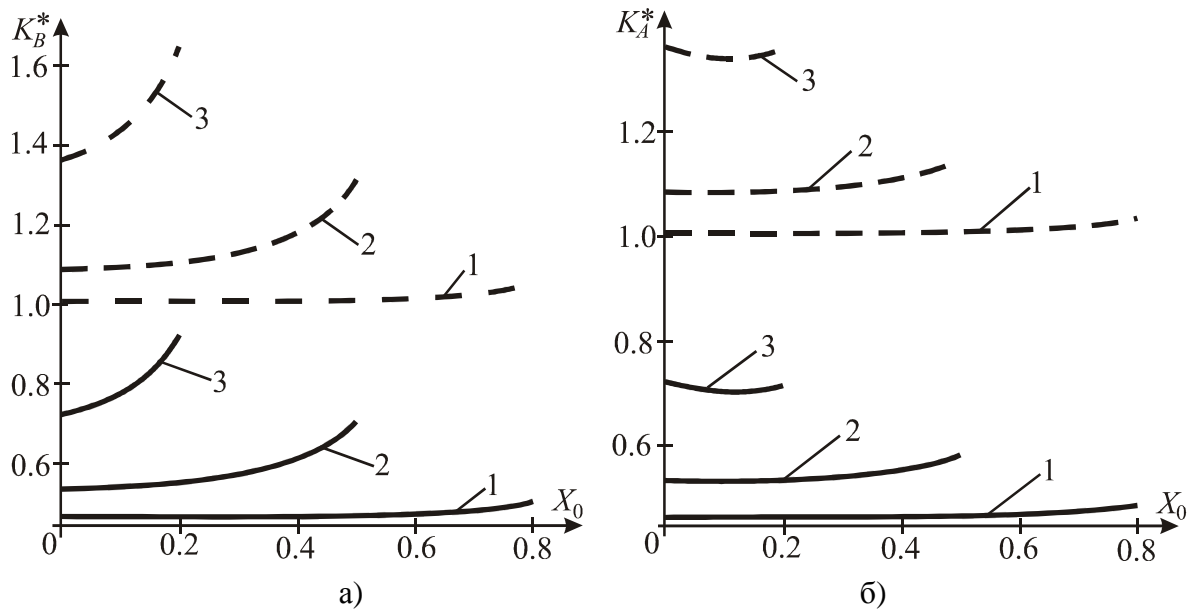


Рис. 4. Графічна залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності моментів  $K^* = K_1 / (M_0 \sqrt{l})$  від відносної відстані від центру тріщини до центру пластини при різних довжинах тріщини (крива 1 –  $\lambda = l/R = 0.1$ , крива 2 –  $\lambda = 0.4$ , крива 3 –  $\lambda = 0.7$ ).

Числовий аналіз показав, що між КІМ  $K_1$  та КІЗ  $k^* = k_N / (M_0 \sqrt{l}) = k_1$  існує залежність

$$\frac{k_1}{K_1} = \frac{3(1+\nu)}{3+\nu},$$

тому графічної залежності для КІЗ  $k_1$  не наводимо.

На основі енергетичного критерію руйнування [12-14] знайдемо величину приведенного граничного моменту  $\tilde{M} = \frac{M_0}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}}$  з урахуванням контакту берегів тріщин (суцільні лінії)

$$\tilde{M} = \frac{M_0}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \frac{3+\nu}{\sqrt{6(1+\nu)(3+2\nu)}} \frac{1}{K_1},$$

та без врахування контакту берегів тріщини (штрихові лінії)

$$\tilde{M} = \frac{M_0}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \sqrt{\frac{3+\nu}{3+3\nu}} \frac{1}{K_1},$$

де  $\gamma_*$  – густина ефективною поверхневою енергії матеріалу.

Як видно з рис. 5 величина критичного моменту, коли проходить руйнування пластини, спадає при зростанні відносної довжини тріщини  $\lambda$ ; врахування контакту берегів тріщини приводить до збільшення величини критичного моменту в порівнянні, якщо, контакту берегів не враховувати; при віддаленні тріщини від центру пластини критичне значення моменту спадає.

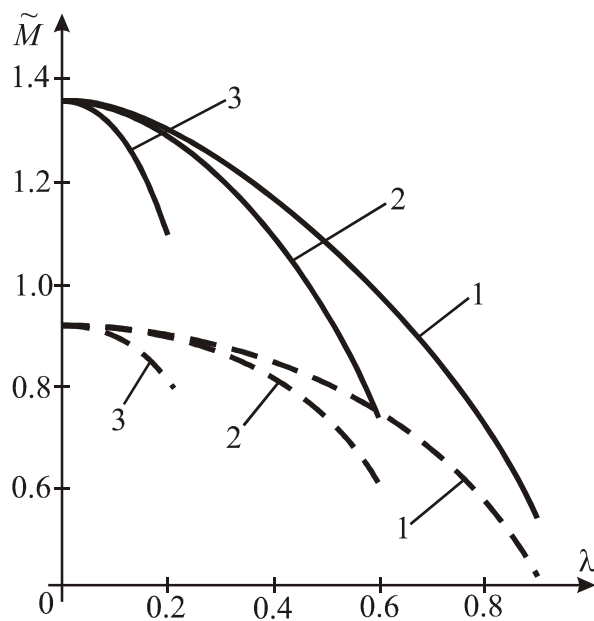


Рис. 5. Графічна залежність приведенного критичного моменту від відносної довжини тріщини  $\lambda = l/R$  при різному розміщенні тріщини (крива 1 –  $X_0 = x_0/R = 0$ , крива 2 –  $X_0 = 0.3$ , крива 3 –  $X_0 = 0.7$ ).

### Література

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. Думка, 1981. – 324 с.
3. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск, Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
4. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки, 1988, № 7. – с. 49-51.
5. І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах// Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2, с. 51-54.
6. M. J. Young, C. T. Sun. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution. International journal of fracture. – Vol. 55, 1992. – pp. 81-93.
7. Y. W. Kwon. Finite analysis of crack closure in plate bending. Computers and Structures. – Vol. 32, No. 6, 1989. – pp. 1439-1445.
8. Опанасович В., Слободян М. Згин круглої пластини з центральною тріщиною з урахуванням контакту її берегів // Тези всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми механіки”. – Львів, 5-8 грудня 2005 р. – с. 15-16.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.:Наука, 1966. – 708 с.
10. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962. – 200 с.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
12. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
13. Шацький І.П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – 26, № 3. – с. 70-75.
14. A. L. Zehnder, M. J. Viz. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads. Applied mechanics reviews. – 2005. – Vol. 58, Issue 1. – pp. 37-48.