

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

П.А. Фомичев

## ENERGY-BASED APPROACH TO LIFETIME CALCULATION UNDER RANDOM LOADING

P. A. Fomichev

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», Украина*

**Abstract.** The fatigue life computation method, based on energy criterion of fatigue damage and model of material cyclic deformation after overload under the conditions of random loading is suggested. The determination of the maximum stress amplitude depending on the number of recycling for loading time before failure is provided. The results of the fatigue life estimation under the conditions of homogeneous stressed state are compared with experimental data obtained by S. Svenson, with spectral damage summation theory by V. L. Raiher and with linear summation hypothesis. The dependence of the right part of linear hypothesis depending on dispersion of random loading process is established.

**Введение.** На этапе проектирования нагрузки на конструкцию находят методами статистической динамики, когда возмущающий силовой фактор рассматривается в вероятностном аспекте. Случайный процесс нагружения считают стационарным и нормальным с известной спектральной плотностью и функцией распределения амплитуд силового фактора. В рамках такого подхода в работе [1] предложен метод расчета долговечности на основе линейной гипотезы суммирования усталостных повреждений. В работе В.Л. Райхера [2] предложена гипотеза спектрального суммирования повреждений и проведено сопоставление с опубликованными данными экспериментальных исследований. Результаты расчетов по линейной и спектральной гипотезам или совпадают, или достаточно близки. В.Л. Райхер отмечает, что применительно к эксперименту С. Свенсона для гладких образцов из сплава 2024 в условиях растяжения – сжатия согласование данных испытаний и расчетов является неудовлетворительным. Расчеты завышают долговечность примерно в 10 раз. Целью данной работы является разработка метода расчета долговечности при случайном нагружении в условиях однородного напряженного состояния на основе энергетического подхода к процессу усталостного разрушения. Аналогичные методы применительно к программному, блочному программному, бигармоническому нагружениям предложены в [3,4,5].

**Теоретические основы исследования.** Пусть спектральная плотность стационарного нормального случайного процесса нагружения обозначена  $S(\omega)$ . В соответствии с формулами С. Райса, среднее число пересечений нулевого уровня  $N_0$  и среднее число максимумов в единицу времени  $N_1$  можно найти так

$$N_0 = \frac{1}{\pi} I_{\eta}^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_{\zeta}}{I_{\eta}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

где

$$I_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \bar{S}(\omega) d\omega, \quad I_{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \bar{S}(\omega) d\omega,$$

$\bar{S}(\omega)$  - приведенная спектральная плотность,

$$\bar{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2} S(\omega),$$

$\sigma_{\xi}^2$  - дисперсия процесса,  $\omega$  - круговая частота.

В соответствии с энергетическим критерием усталостного разрушения [6], примем дифференциальное уравнение накопления относительной энергии  $\bar{W}$ , расходуемой на накопление усталостных повреждений, в виде

$$\frac{d\bar{W}}{dn} = RW_r^{\alpha} \quad (3)$$

где  $n$  - число циклов нагружения,

$R$ ,  $\alpha$  - параметры уравнения, определяемые для конкретного материала по результатам усталостных испытаний,

$W_r$  - рассеянная в единице объема за цикл нагружения энергия, численно равная площади петли гистерезиса

$$W_r = K_{\phi} \sigma_a \varepsilon_{ar}$$

$K_{\phi}$  - коэффициент формы петли гистерезиса, численное значение которого может быть принято равным трем,

$\sigma_a$  - амплитуда напряжения,

$\varepsilon_{ar}$  - амплитуда остаточной деформации, равная половине ширины петли гистерезиса.

В состоянии материала до циклического нагружения  $\bar{W} = 0$ , в случае разрушения  $\bar{W} = 1$ .

Для циклически нестабильных материалов амплитуда остаточной деформации изменяется в процессе циклического нагружения [7]

$$\varepsilon_{ar} = \varepsilon_{ar}^* f(\sigma_a, x),$$

где  $\varepsilon_{ar}^*$  - среднее значение амплитуды остаточной деформации,

$f(\sigma_a, x)$  - функция упрочнения (разупрочнения) материала, подчиняющаяся условию

$$\int_0^1 f(\sigma_a, x) dx = 1,$$

$x = n/N$  - относительная наработка,

$N$  - число циклов до разрушения при регулярном нагружении.

Текущее значение рассеянной за цикл нагружения энергии найдем так

$$W_r = W_r^* f(\sigma_a, x), \quad (4)$$

где  $W_r^*$  - среднее значение рассеянной за цикл нагружения энергии, соответствующее амплитуде остаточной деформации  $\varepsilon_{ar}^*$ .

С учетом (4) зависимость (3) примет вид

$$\frac{d\bar{W}}{dx} = NRW_r^{*\alpha} f^{\alpha}(\sigma_a, x). \quad (5)$$

В результате интегрирования (5) при регулярном нагружении получим уравнение кривой усталости

$$NRW_r^{*\alpha} \int_0^1 f^\alpha(\sigma_a, x) dx = 1. \quad (6)$$

Результаты многочисленных экспериментальных исследований показывают [7-9], что зависимость средних амплитуд деформаций от амплитуд напряжений в логарифмических координатах можно аппроксимировать прямой или ломаной прямой. Это означает, что справедливо уравнение

$$\varepsilon_{ar}^* = \left( \frac{\sigma_a}{K} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (7)$$

где  $m$  и  $K$  - параметры уравнения диаграммы циклического деформирования материала.

В случае нерегулярного нагружения, после действия максимальной амплитуды напряжений в блоке нагрузок, ширина петли гистерезиса на меньших уровнях может значительно превосходить значения  $\varepsilon_{ar}$  на этих уровнях до перегрузки. Величина рассеянной за цикл нагружения энергии после перегрузки возрастает. Амплитуду остаточной деформации после перегрузки можно найти так [3,7]

$$\varepsilon_{ar} = \varepsilon_{ar \max} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{a \max}} \right)^{\frac{1}{c}}, \quad (8)$$

где  $c$  - параметр диаграммы циклического деформирования материала после перегрузки,

$\sigma_{a \max}$  - амплитуда напряжения на перегрузочной ступени в блоке нагрузок,

$\varepsilon_{ar \max}$  - амплитуда остаточной деформации при  $\sigma_{a \max}$ .

В этом случае рассеянная за цикл нагружения энергия составит

$$W_r = W_{r \max} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{a \max}} \right)^{\frac{1+c}{c}}.$$

В условиях нерегулярного нагружения кинетика амплитуды остаточной деформации в основном наблюдается на максимальном уровне нагрузок. Рассеянная за цикл нагружения энергия  $W_{r \max}$  равна

$$W_{r \max} = W_{r \max}^* f(\sigma_{a \max}, x_{\max}),$$

где  $x_{\max}$  - относительная наработка на максимальном уровне нагрузок.

В соответствии с энергетическим критерием усталостного разрушения относительная энергия  $\bar{W}$  определяется величиной рассеянной за цикл нагружения суммарной энергии  $W_r$ . За  $dn$  циклов и время  $\Delta\tau$  приращение относительной энергии составит

$$\Delta d\bar{W} = RW_r^\alpha dn.$$

В случае узкополосного случайного процесса число циклов пересечения нулевого уровня, равное  $N_0/2$ , и число максимумов  $N_1$ , которые можно вычислить по формулам (1) и (2), практически совпадает. Для широкополосного процесса число амплитуд совпадает не с числом циклов пересечения нулевого уровня, а с числом максимумов процесса. Тогда число циклов нагружения с амплитудой напряжения  $\sigma_a$

можно найти, зная плотность вероятности распределения амплитудных напряжений  $\varphi(\sigma_a)$

$$dn = N_1 \varphi(\sigma_a) d\sigma_a \Delta \tau.$$

После предельного перехода и интегрирования получим зависимость для расчета времени до разрушения в условиях стационарного случайного процесса нагружения

$$RN_1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_r^\alpha \varphi(\sigma_a) d\sigma_a d\tau = 1. \quad (9)$$

Для определения максимальной амплитуды напряжений при случайном нагружении принято [10,11] задавать вероятность их превышения  $P_{\max}$ . Если плотность распределения амплитуд напряжений подчиняется закону Рэлея

$$\varphi(\sigma_a) = \frac{\sigma_a}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{\sigma_a^2}{2\sigma_\xi^2}},$$

то

$$\sigma_{a \max} = \sigma_\xi \sqrt{-2 \ln P_{\max}}. \quad (10)$$

После подстановок и преобразований уравнение (9) примет вид

$$\frac{N_1}{I_x N_{\max}} I_d \cdot T \int_0^1 f^\alpha \left( \sigma_{a \max}, \frac{N_1 \cdot T \cdot y}{N_{\max}} P_{\max} \right) dy = 1, \quad (11)$$

где

$$I_x = \int_0^1 f^\alpha(\sigma_{a \max}, x) dx \quad (12)$$

$$I_d = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{a \max}} \right)^{\alpha \frac{1+c}{c}} \varphi(\sigma_a) d\sigma_a. \quad (13)$$

Принятый подход к расчету долговечности при случайном нагружении путем задания вероятности  $P_{\max}$  превышения максимальной амплитуды напряжения не является бесспорным. Затруднено физическое обоснование выбираемой величины  $P_{\max}$ . При одном и том же  $P_{\max}$  для различных дисперсий процесса получаем во много раз отличающиеся наработки в виде числа циклов нагружения на максимальном уровне.

Рассмотрим иной подход к определению амплитуды максимальных напряжений. Перегрузочная ступень в блоке нагружения приводит к увеличению амплитуды остаточной деформации на остальных уровнях нагрузки. Увеличивается рассеянная энергия, а, значит, падает долговечность. Стабилизация параметра  $c$  в уравнении (8) наблюдается после нескольких блоков нагружения [7], обычно число таких блоков не превосходит десяти. Аналогичный факт отмечен в работе [12], в которой перед началом испытаний гладких образцов на регулярные нагрузки предварительно прикладывали определенное число перегрузочных циклов. Долговечность при регулярном нагружении интенсивно падала с увеличением числа таких циклов. Стабилизация долговечности практически наступала после десяти циклов перегрузки. В этой работе были выполнены и измерения амплитуды остаточной деформации.

Отмеченное позволяет предположить, что в качестве максимальной амплитуды напряжений при случайном нагружении следует принимать такую, для которой число циклов повторения за время до разрушения равно некоторому числу  $n_{\max}$ , например десяти.

При таком подходе вероятность превышения максимальной амплитуды напряжений составит

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}}{N_1 T}, \quad (14)$$

а относительная наработка на максимальном уровне нагрузок  $x_{\max} = n_{\max} / N_{\max}$ .

Анализ кинетики амплитуды остаточной деформации алюминиевого сплава Д16АТ, который является аналогом сплава 2024, позволил установить, что интеграл (12) отличается от 1 не более, чем на 0.5%, а интеграл от функции упрочнения в (11) не более, чем на 20 %. Это позволяет значительно упростить (11) и получить зависимость для расчета времени до разрушения при случайном нагружении в виде

$$T = \frac{N_{\max}}{N_1 I_d}. \quad (15)$$

Если задавать значение вероятности превышения максимальной амплитуды напряжений  $P_{\max}$ , то следует по (10) найти  $\sigma_{a \max}$ , вычислить по (13)  $I_d$  и по (6)  $N_{\max}$ .

В случае задания числа циклов нагружения  $n_{\max}$ , вероятность превышения  $P_{\max}$  зависит по (14) от времени  $T$  до разрушения. Такая зависимость имеет место для  $I_d$  и  $N_{\max}$ . Уравнение (15) становится нелинейным относительно времени, но его легко решить методом последовательных приближений.

На основе линейной гипотезы суммирования усталостных повреждений можно получить зависимость для расчета времени до разрушения  $T_d$ , аналогичную (15)

$$T_d = \frac{N_{\max}}{N_1 I_d}, \quad (16)$$

где

$$I_d = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{a \max}} \right)^m \varphi(\sigma_a) d\sigma_a. \quad (17)$$

В формуле (17)  $m$  - показатель степени уравнения кривой усталости

$$\sigma_a^m N = c_v. \quad (18)$$

Время до разрушения, найденное по формуле линейного суммирования (16), не зависит от выбранной максимальной амплитуды напряжений, поскольку по этой амплитуде вычисляется в соответствии с (18) и число циклов до разрушения  $N_{\max}$ .

Представляет интерес анализ ошибки линейного суммирования повреждений. Как и в работе [1], обозначим правую часть формулы линейного суммирования через  $a_p$ . Разделим (15) на (16), тогда

$$a_p = \frac{I_d}{I_d}. \quad (19)$$

Конкретизируем интегралы (13) и (17). Введем новые переменные

$$z = \frac{\sigma_a}{\sigma_{\xi}}, \quad z_{\max} = \frac{\sigma_{a \max}}{\sigma_{\xi}}.$$

Тогда

$$I_d = \int_0^{z^*} \left( \frac{z}{z_{\max}} \right)^{\alpha \frac{1+c}{c}} \varphi(z) dz, \quad (20)$$

$$I_{\alpha} = \int_0^{z^*} \left( \frac{z}{z_{\max}} \right)^m \varphi(z) dz. \quad (21)$$

Подынтегральные функции в (20) и (21) с ростом  $z$  быстро убывают и выбор верхнего предела интегрирования  $z^*$  особого значения не имеет.

Отличие интегралов (20) и (21) состоит в показателях степени в подынтегральных функциях. Между показателями степени уравнений (3), (7) и (18) существует зависимость [6]

$$\alpha \left( 1 + \frac{1}{m} \right) = m. \quad (22)$$

Для циклически стабильных материалов, у которых отсутствует кинетика амплитуды остаточной деформации и влияние перегрузки на рассеиваемую энергию, параметры  $c$  и  $m$  равны. В этом случае справедливо линейное суммирование усталостных повреждений.

Применительно к циклически упрочняющимся или разупрочняющимся материалам, параметр  $c$  может в 2 – 3 раза превосходить значение параметра  $m$ . Соответственно,  $I_d > I_{\alpha}$  и  $a_p < 1$ . Отмеченное является следствием того, что после действия больших нагрузок при нерегулярном нагружении величина рассеянной энергии на остальных уровнях значительно возрастает.

**Сопоставление с результатами экспериментальных исследований С. Свенсона.** Экспериментальные исследования проведены на образцах из сплава 2024S-T4 без концентраторов напряжений при циклическом растяжении. Получены зависимости долговечности от амплитуды напряжений при регулярном нагружении и зависимости долговечности от стандартного отклонения для двух видов спектральных плотностей при случайном нагружении. Испытано не менее 7 образцов на уровне гармонической нагрузки и не менее 16 образцов на уровне случайной нагрузки. Результаты испытаний С. Свенсона в табличном виде представлены в работе [2].

В работе [9] приведены циклические деформационные характеристики сплава Д16АТ, который является аналогом сплава 2024. Значения параметров уравнений (3), (7), (8) для сплава Д16АТ составили

$$\alpha = 1,12; \quad R = 2,01 \cdot 10^{-3}; \quad m = 0,25; \quad K = 3352 \text{ МПа}; \quad c = 0,64.$$

Приведенные значения  $m$  и  $K$  соответствуют большим амплитудам напряжений, которые превышают напряжение точки перелома на диаграмме циклического деформирования сплава [9] и представляют интерес при анализе случайного нагружения.

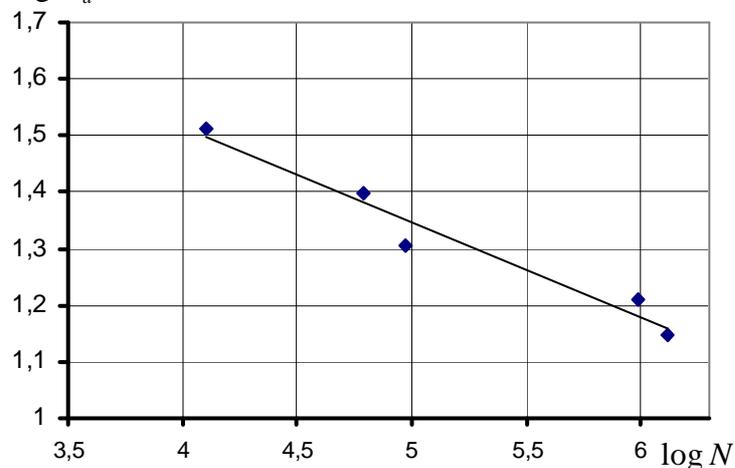


Рис. 1. Кривая усталости. Эксперимент Свенсона

В работе В.Л. Райхера [2] приведены параметры уравнения (18), определенные по данным С. Свенсона и равные  $m = 5,7$ ,  $c_v = 10^{12,68}$ . Экспериментальные данные С. Свенсона при регулярном нагружении и аппроксимирующая зависимость показаны на рис.1. Поскольку в [2] результаты экспериментов и их обработки приведены в технической системе, эта система сохранена

и в данной работе.

Размерность амплитуд напряжений –  $кгс/мм^2$ . Можно отметить, что показатель степени  $m$ , вычисленный по зависимости (22) для сплава Д16АТ менее чем на 2% отличается от экспериментального значения для сплава 2024. Расчетные значения долговечности, найденные с использованием параметров уравнений для сплава Д16АТ, соответствуют левой границе разброса данных С. Свенсона. В связи с этим, расчет числа циклов до разрушения при регулярном нагружении  $N_{max}$  в дальнейшем проведен по формуле (18).

Приведенные спектральные плотности, реализованные С. Свенсоном при случайном нагружении, показаны на рис. 2. Спектральная плотность 1 соответствует узкополосному случайному процессу с числом циклов пересечения нулевого уровня  $N_0/2 = 47,1$  и числом максимумов процесса  $N_1 = 47,4$ . Для спектральной плотности 2 указанные величины составили  $N_0/2 = 24,2$ ,  $N_1 = 43,4$ .

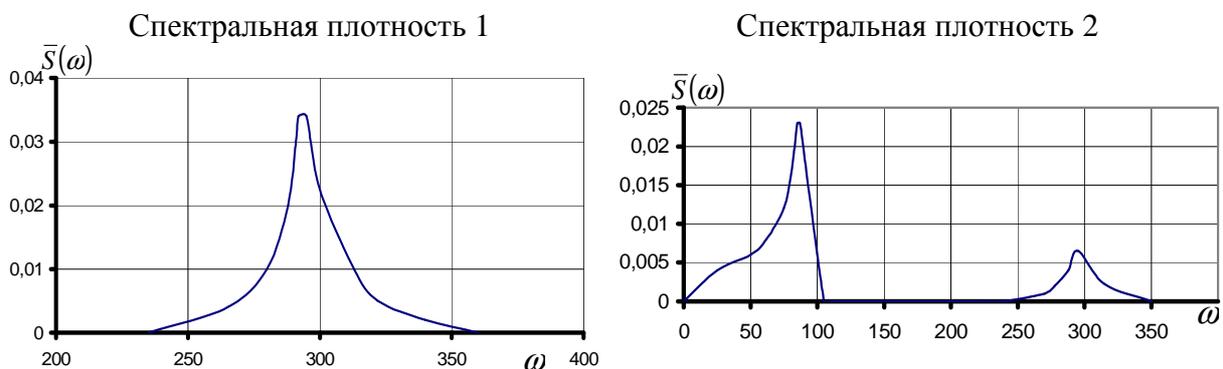


Рис. 2. Приведенные спектральные плотности в эксперименте Свенсона

Интеграл (20) не зависит от величины стандартного отклонения амплитуд случайного процесса и определяется только принятым значением  $P_{max}$ . Вследствие чего, рассчитанная по формуле (15) кривая усталости при случайном нагружении параллельна кривой усталости при регулярном нагружении. Выбор  $P_{max}$  влияет на расчетную долговечность, однако при изменении  $P_{max}$  в 10 раз долговечность изменяется в 1,5 раза. Устойчивость решения относительно  $P_{max}$  обуславливает быструю сходимость итерационного процесса расчета  $T$  по формуле (15) при задании фиксированного значения  $n_{max}$  и вычислении  $P_{max}$  по (14).

Правая часть линейной гипотезы суммирования зависит только от величины  $P_{max}$ . При фиксированном  $P_{max}$  значение  $a_p$  остается постоянным и не зависящим от  $\sigma_\xi$ .

Следовательно, подход, основанный на фиксации вероятности  $P_{max}$ , приводит к противоречию, так как известно [1], что с уменьшением стандартного отклонения ошибка линейной гипотезы суммирования возрастает.

Указанного недостатка лишен предлагаемый подход к расчету максимальной амплитуды напряжений, основанный на фиксации числа циклов действия этой амплитуды при случайном нагружении до разрушения, т.е. решению уравнения (15) с учетом (14). С уменьшением стандартного отклонения растет время до разрушения, что приводит к уменьшению  $P_{max}$  и  $a_p$ . Ошибка расчета долговечности по линейной гипотезе возрастает от 5,3 до 8,55 раза.

Результаты расчета времени до разрушения при случайном нагружении со спектральными плотностями 1 и 2 по уравнению (15) с учетом (14) показаны на рис. 3 и 4 в виде сплошной линии. Точки соответствуют экспериментальным данным С.Свенсона. Принято, как и в гипотезе спектрального суммирования В.Л.Райхера,

распределение амплитуд по закону Рэлея. Результаты расчета долговечности, полученные В.Л. Райхером, показаны на рис.3 и 4 в виде пунктирной линии.

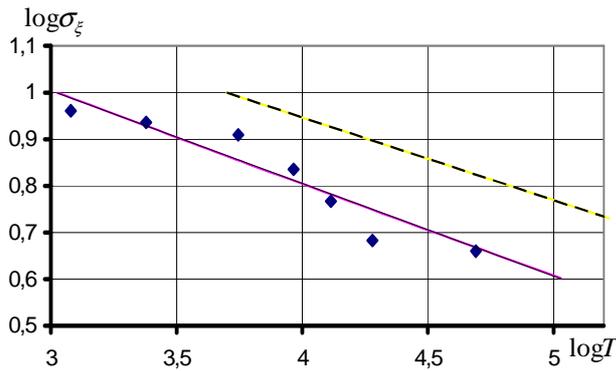


Рис. 3. Долговечность при случайном нагружении со спектральной плотностью 1

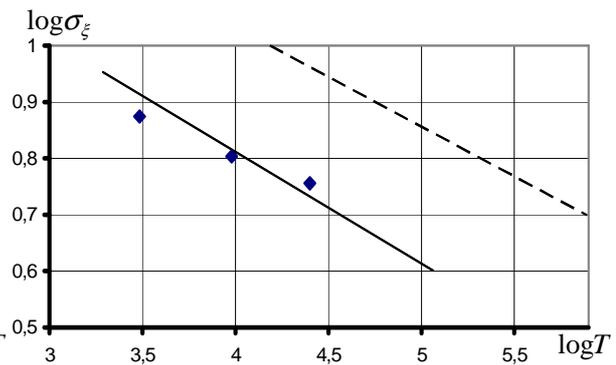


Рис. 4. Долговечность при случайном нагружении со спектральной плотностью 2

Причина несогласования гипотезы спектрального суммирования с экспериментальными данными заключается не в представлении кривой Велера в степенном виде, как предполагал В.Л. Райхер [2], а в неучете влияния перегрузок на долговечность.

**Выводы.** Проведенные расчеты и сопоставления предложенного метода расчета долговечности при случайном нагружении с известными методами и результатами экспериментальных исследований позволяют отметить следующее.

1. Предложенный метод, учитывающий влияние перегрузки на рассеяние энергии в материале при циклическом нагружении, вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными С. Свенсона, полученными при различных спектральных плотностях случайного процесса нагружения гладких образцов.

2. Определение максимальной амплитуды напряжений при случайном нагружении целесообразно проводить по фиксируемому числу циклов повторения этой амплитуды в процессе нагружения до разрушения. Такой подход позволяет установить зависимость правой части линейной гипотезы суммирования усталостных повреждений от дисперсии случайного процесса нагружения.

### Литература

1. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. - М.: Машиностроение, 1977. - 232 с.
2. Райхер В.Л. Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайной нагрузки. - М.: Изд. отдел ЦАГИ, 1969. - 38 с.
3. Фомичев П.А. Энергетический метод расчета долговечности при нерегулярном нагружении. Сообщение 2. Долговечность при программном блочном нагружении // Пробл. прочности.-1995.- № 8. - С. 3 - 11.
4. Фомичев П.А. Энергетический метод расчета долговечности при нерегулярном нагружении. Сообщение 1. Учет последовательности действия нагрузок // Пробл. прочности. - 1995. - № 7. - С. 3 - 12.
5. Фомичев П.А. Долговечность при бигармоническом нагружении // Пробл. прочности.-2004. - № 3. - С. 14 - 22.
6. Трощенко В.Т., Фомичев П.А. Энергетический критерий усталостного разрушения // Пробл. прочности. - 1993. - № 1. - С. 3-10.
7. Фомичев П.А., Трубочанин И.Ю. Изменение амплитуды пластической деформации при регулярном и программном мягком нагружении сталей // Пробл. прочности. - 1991. - № 2. - С. 39-44.

8. Циклические деформации и усталость металлов. Т. 2. Долговечность металлов с учетом эксплуатационных и технологических факторов / Трощенко В.Т., Хамаза Л.А. и др. - Киев: Наук. думка, 1985.- 224 с.
9. Фомичев П.А., Звягинцев В.В. Прогнозирование долговечности тел с надрезами по локальному напряженно-деформированному состоянию. Сообщение 1. Определение напряжений и деформаций в надрезе при циклическом упругопластическом деформировании // Пробл. прочности. - 2000. - №3. - С. 37 - 45.
10. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. - М.: Машиностроение, 1975. - 488 с.
11. Климан В. Определение эксплуатационной долговечности на основе энергетического критерия. Мат. VI Междунар. коллоквиума Механическая усталость металлов. - Киев: Наук. думка, 1983. - С. 104 - 109.
12. Ауржедник Б. Влияние предварительной малоцикловой перегрузки на многоцикловую долговечность стали. Мат. VI Междунар. коллоквиума Механическая усталость металлов. - Киев: Наук. думка, 1983. - С. 349 - 356.