МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩЕЙ ПАМЯТИ ФОРМЫ ТРАЕКТОРИИ В ТЕОРИИ ПРОСТЫХ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ И НАЧАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НАГРУЖЕНИЯ

П.П. Лепихин

SIMULATION OF THE PATH SHAPE FADING MEMORY IN THE THEORY OF ELASTOPLASTICALLY-DEFORMED SIMPLE MATERIALS WITH INITIAL LOADING SURFACE

P.P. Lepikhin

Институт проблем прочности им.Г.С.Писаренко НАН Украины, Украина

Abstract A mathematical theory of strict construction of reduced constitutive relations for Noll's simple strain-hardening elastoplastic materials with an initial loading surface and a path shape memory fading during the active deformation was developed. The strains and the type of symmetry of the material properties are arbitrary. Constitutive equations were derived for materials without the path shape memory, for those with a weak fading memory, and with an *n*-th order fading memory. An elastic-perfectly plastic material is defined from the standpoint of the fading memory of path shape. The theory of strict construction of reduced constitutive relations for materials with a 1-st order fading memory of path shape for infinitesimal strains was developed on the assumption that the strain measures are small over the whole history. Special attention is given to isotropic materials.

Одним из наиболее важных и широко распространенных на практике видов нагружения элементов конструкций является циклическое нагружение. При этом в ряде случаев реализуются сложные процессы деформирования и имеют место (при малоцикловом нагружении) развитые пластические деформации. В настоящее время проводятся широкомасштабные исследования малоцикловой усталости для непропорциональных циклических процессов [1-3] и др. При этом достоверность описания ресурса элементов конструкций определяется точностью физических уравнений.

Перспективными для моделирования сложных циклических процессов нагружения являются теории пластичности, учитывающие влияние истории деформирования. Одной из наиболее распространенных моделей такого типа является эндохронная теория пластичности [4-5]. Вместе с тем, эта теория в целом ряде случаев приводит к рассогласованию расчетных и экспериментальных данных. Недостаточным является и обоснование области применимости этой теории. Известна критика эндохронной теории пластичности [6] др. Поэтому для адекватного описания сложных процессов циклического упругопластического деформирования требуется дальнейшее развитие теорий пластичности, учитывающих историю деформирования.

Ранее с использованием подходов рациональной механики континуума [7-8] построена математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с забыванием формы траектории, в которых пластические деформации имеют место сразу же после приложения нагрузки и монотонно увеличиваются в процессе деформирования. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Для процессов деформирования, близких к пропорциональным и мало отличающихся от ненапряженной и недеформируемой конфигурации, построены физические уравнения материалов, не обладающих памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью и с затухающей памятью n-го порядка.

Используя физические уравнения теории пластичности с затухающей памятью 1-го порядка (линейная теория упругопластичности) при конечных деформациях [7], в работе [8] посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего «прошлого» разработана математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений для бесконечно малых деформаций. Определены условия приведения построенных соотношений к одному из вариантов эндохронной теории пластичности.

Как известно [9], целый ряд широко применяемых в технике конструкционных упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории обладает начальной поверхностью нагружения. Вместе с тем, теория таких материалов мало разработана. В этой связи представляется целесообразным с научной и прикладной точки зрения разработать методику построения и специализации определяющих соотношений, моделирующих их поведение при деформировании.

Будем считать все процессы деформирования начинающимися в некоторый момент времени t_0 из ненапряженного и недеформированного начального состояния, а также предположим, что и при значениях момента времени $t < t_0$ материал находился в этом же начальном состоянии.

Следуя [7], приведенное (независящее от системы отсчета) определяющее соотношение, моделирующее реакцию произвольного простого материала с не зависящим от временной истории поведением, можно записать так

$$\mathbf{T}(\xi)^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi)\mathbf{T}(\xi)\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{G}\left(\mathbf{C}^{\xi}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{T}(\xi)$ - тензор напряжений Коши в конце процесса деформирования; $\mathbf{C}^{\xi} = \mathbf{C}^{\xi}(\eta) = \mathbf{C}(\xi - \eta)$ - история правого тензора Коши-Грина вплоть до ξ (ξ фиксировано, $\eta = \xi - \xi' \geq 0$); $\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{U}^2(\xi)$; $\mathbf{R}(\xi)$ - ортогональный тензор поворота в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{R}(\xi)\mathbf{U}(\xi)$; $\mathbf{U}(\xi)$ - правый тензор растяжения; $\mathbf{G}$ - отображение истории $\mathbf{C}^{\xi}$ на симметричные тензоры; ξ и ξ' - длины дуг траектории тензора деформаций Грина второго типа $\mathbf{E} = 0{,}5(\mathbf{C} - \mathbf{1})$ в конце процесса деформирования и в «прошлом» соответственно.

Здесь и далее верхний индекс «т» обозначает транспонированный тензор.

В рамках подчиняющихся уравнению (1) материалов выделим класс упругопластических тел, которые кроме независящего от времени поведения обладают другими дополнительными (определяющие) свойствами [7,10]: деформацию тем или иным способом можно разделить на упругую и пластическую составляющие, справедлив некоторый критерий текучести, выполняется какой-либо закон течения.

Следуя [7-8], предположим, что в классе упругопластических материалов можно выделить такие, которые в произвольных процессах активного деформирования проявляют затухающую память формы траектории. Для определения отмеченной выше затухающей памяти ограничимся монотонными активными процессами деформирования и, следуя [11], введем понятие постоянной истории $\mathbf{C}^{c}(\eta) \equiv \mathbf{C}(\xi_T)$, соответствующей значению $\mathbf{C}(\xi_T)$ в месте, занимаемом телом-точкой X в отсчетной конфигурации. Для того чтобы можно было рассматривать такой случай, предположим, что если $\mathbf{C}^{\xi}$ - история, принадлежащая области определения D реакции $\mathbf{G}$, то для каждого η из $[0, \infty)$ постоянная история $\left(\mathbf{C}^{\xi}(\eta)\right)^{c}$ также принадлежит D. $\mathbf{C}(\xi_T)$ представляет собой деформацию, при которой в истории $\mathbf{C}^{\xi}$ достигается предел текучести материала. Значение $\mathbf{G}\left(\mathbf{C}^{c}(\eta)\right)$ реакции $\mathbf{G}$ представляет собой напряжения, которые соответствуют пребыванию в состоянии покоя в конфигурации, полученной из начальной при деформации $\mathbf{C}(\xi_T)$. Так как упругопластический материал при деформировании внутри и на начальной поверхности нагружения проявляет упругие свойства, то при $0 \le \xi \le \xi_T$ материал упругий, а для упругого материала для всех $\mathbf{C}^{\xi}$

$$\mathbf{T}(\xi_T)^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi_T)\mathbf{T}(\xi_T)\mathbf{R}(\xi_T) = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)), \tag{2}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T))$ - произвольная, в общем случае анизотропная, тензорная функция.

Примем основную идею затухающей памяти формы траектории в виде: когда история $\mathbf{C}^{\xi}$ близка к постоянной истории $\mathbf{C}^{c}(\eta)$, напряжения $\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi})$ близки к напряжениям $\mathbf{G}(\mathbf{C}^{c}(\eta))$. Понятие «малости» и «близости» уточняются с помощью топологии. Когда введены топологии, можно в точном смысле говорить о непрерывности, и в качестве необходимого условия для затухающей памяти получить точную и общую аксиому непрерывности: реакция $\mathbf{G}$ непрерывна в каждой постоянной истории $\mathbf{C}^{c}(\eta)$ из D.

Следуя [7,11], введем забывающую меру, запоминание истории и следующее определение. Упругопластический материал при активном деформировании имеет слабо затухающую память, если он удовлетворяет аксиоме непрерывности с непрерывностью, определенной с помощью забывающей меры:

$$\mathbf{T}(\xi)^{\mathbf{R}} = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)) + \mathbf{o}(1) \text{ при } \left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right\| \to 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)) = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{c}(\eta))$.

Таким образом, при условии, что запоминание разности историй $\mathbf{C}^{\xi}$ и $\mathbf{C}^{c}(\eta)$ достаточно мало, напряжения представляют собой приблизительно напряжения, соответствующие $\mathbf{C}(\xi_T)$.

В частности в упруго идеально пластическом материале остаточный член в $(3)_1$ тождественно равен нулю. При этом забывающая мера должна быть такой, что $\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right\| = 0$. Обратно, если при таком определении запоминания (3) справедливо с остаточным членом равным нулю, то материал является упруго идеально пластическим.

Для описания более высоких, нежели (3), приближений затухающей памяти формы траектории примем запоминание в форме Колемана Нолла [11] и будем считать справедливым принцип затухающей памяти формы траектории n-го порядка, заключающийся в предположении, что при постоянной истории $\mathbf{C}^{c}(\eta)$ реакция $\mathbf{G}$ n раз дифференцируема по Фреше. Тогда

$$\mathbf{T}(\xi)^{\mathbf{R}} = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i\left(\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right) + \mathbf{o}\left(\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right\|^{n}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{G}_i$ - ограниченные однородные полиномиальные отображения степени i, зависящие от $\mathbf{C}(\xi_T)$.

Если принимается, что материал имеет затухающую память 1-го порядка, то (4) аппроксимирует отклонение от напряжений $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T))$ с помощью ограниченного линейного функционала. Совокупность всех историй деформаций с конечным запоминанием образует гильбертово пространство и по теореме Фреше-Рисса [11] каждый ограниченный линейный функционал в гильбертовом пространстве допускает представление в виде скалярного произведения. Чтобы применить эту теорему в рассматриваемом здесь случае, предположим, что рассматривается затухающая память типа [11] и получим, что

$$\mathbf{T}(\xi)^{\mathbf{R}} = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)) + \int_{-0}^{\xi-\xi_T} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_T),\eta)\left[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right]d\eta + \mathbf{o}\left(\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta)\right\|\right), \tag{5}$$

где ядро $\underline{\mathbf{K}}$ - тензор четвертого ранга, такой, что

$$\int_0^\infty \left|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_T),\eta)\right|^2 d\eta < \infty . \qquad (6)$$

Если пренебрежем поправочным членом в (5), то получим соотношение, не зависящее от системы отсчета, которое можно использовать для задания специального воображаемого материала. Это специальное определяющее соотношение назовем линейной теорией упругопластичности при конечных деформациях. Такая теория справедлива только для монотонных активных процессов деформирования материалов, поведение которых не зависит от времени, в которых после достижения начальной поверхности нагружения имеют место пластические деформации и затухающая память формы траектории. В моделируемых здесь упругопластических материалах затухание происходит только в активных процессах, а после прекращения активного деформирования отсутствует и забывание формы траектории.

При разработке теории бесконечно малых деформаций на основе уравнения (1), будем строить семейства смещений, которые соответствуют малым мерам деформации в течение всего прошлого. Полагаем

$$\mathbf{H} \equiv \nabla\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{1}, \qquad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right), \tilde{\mathbf{R}} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right), \qquad (8)$$

где $\mathbf{u}$ - вектор перемещения; $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}$ - тензоры бесконечно малых деформации и поворота.

Через ε, обозначим наименьшую верхнюю грань норм градиента смещения $\mathbf{H}$, соответствующих всем деформациям, которым подвергался материал:

$$\varepsilon \equiv \sup\left|\mathbf{H}^{\xi}(\eta)\right| \qquad (\eta \ge 0). \qquad (9)$$

Будем рассматривать семейства историй градиента, такие, что $\varepsilon \to 0$.

Можно показать, используя данные [11], что

$$\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{c}(\eta) = 2\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta) - \tilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)\right] + \mathbf{0}\left(\varepsilon^{2}\right) = \mathbf{0}(\varepsilon). \qquad (10)$$

$$\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{R}}(\xi) + \mathbf{0}\left(\varepsilon^{2}\right) = \mathbf{1} + \mathbf{0}(\varepsilon) \qquad (11)$$

Тогда, подставив (10) и (11) в (5), получим

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T)) + 2\int_{-0}^{\xi-\xi_T} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_T),\eta)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta) - \tilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)\right]d\eta + \mathbf{o}(\varepsilon). \qquad (12)$$

В случае бесконечно малых деформаций можно показать, что замена $\mathbf{C}$ на $\mathbf{1}$ в $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_T),\eta)$ приводит к ошибке порядка $\mathbf{o}(\varepsilon)$ [12]. Учитывая это, а также, связь правого тензора Коши-Грина с тензором бесконечно малой деформации в виде

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{1} + 2\mathbf{E}(\xi) + \mathbf{0}\left(\varepsilon^{2}\right) = \mathbf{1} + \mathbf{0}(\varepsilon), \qquad (13)$$

соотношение (12) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{g}\left(\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T)\right) + 2\int_{-0}^{\xi-\xi_T} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta) - \tilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)\right]d\eta + \mathbf{o}(\varepsilon). \qquad (14)$$

Применим, подобно [11], для бесконечно малых деформаций линеаризацию первого слагаемого $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T))$, описывающего упругую деформацию, и обозначим функцию забывания $\underline{\mathbf{M}}(\eta)$ через [7]

$$\underline{\mathbf{M}}(\eta) = -2\int_{\eta}^{\infty} h(z)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},z)dz, \quad \dot{\underline{\mathbf{M}}}(\eta) = \frac{d}{d\eta}\underline{\mathbf{M}}(\eta) = 2h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta), \qquad (15)$$

где $\underline{\mathbf{M}}(\eta)$ - функция забывания.

С учетом разрывности тензорной функции $\underline{\mathbf{M}}(\xi)$ при $\xi = 0$ и данных [13], можем записать:

$$d\underline{\mathbf{M}}(\eta) = \underline{\dot{\mathbf{M}}}(\eta)d\eta + \underline{\mathbf{M}}(\eta)\delta(\eta - 0)d\eta\,, \tag{16}$$

где $\delta(\eta - 0)$ - δ- функция Дирака.

Тогда с учетом (16) и возможности линеаризации функции $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_T))$ соотношение (14) примет вид

$$\mathbf{T}(\xi) = \underline{\mathbf{L}}\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T)\right] + \int_{-0}^{\xi-\xi_T} d\underline{\mathbf{M}}(\eta)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta) - \tilde{\mathbf{E}}^c(\xi-\eta)\right] + \mathbf{o}(\varepsilon)\,. \tag{17}$$

Принимая во внимание данные [13] и используя интегрирование δ- функции Дирака, входящей в дифференциал функции забывания $d\underline{\mathbf{M}}(\eta)$, можно, пренебрегая поправочным членом, переписать (17) в виде

$$\mathbf{T}(\xi) = \left(\underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{M}}(\xi - \xi_T)\right)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T)\right] + \underline{\mathbf{M}}(0)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi)\right] + \int_{0}^{\xi-\xi_T} d\underline{\mathbf{M}}(\eta)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)\right]. \tag{18}$$

Иные способы перехода от (17) к (18) отмечены в [13].

Другую форму соотношений, определяющих напряжения, можно получить из (17) заменой переменной $\tau = \xi - \eta$ и интегрированием по частям:

$$\mathbf{T}(\xi) = \left(\underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{M}}(\xi - \xi_T)\right)\left[\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T)\right] + \int_{\xi_T}^{\xi} \underline{\mathbf{M}}(\xi - \tau)\left[\frac{d\tilde{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau}d\tau\right]. \tag{19}$$

В случае $\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$ (18), (19) сводятся к реакции упруго идеально пластического материала.

Большой практический интерес представляют изотропные формы упругопластических соотношений между напряжениями и деформациями. В этом случае линейные тензорные функции $\underline{\mathbf{L}}[\ ]$ и $\underline{\mathbf{M}}(\ )[\ ]$ - изотропные.

Приняв представление произвольной линейной изотропной тензорной функции в форме [12], из (19) получим

$$\mathbf{T}(\xi) = \left\{ \left[\lambda - \bar{\lambda}(\xi - \xi_T)\right] tr\,\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T) + \int_{\xi_T}^{\xi} \bar{\lambda}(\xi-\tau)\frac{d}{d\tau} tr\tilde{\mathbf{E}}(\tau)\,d\tau \right\}\mathbf{1} +$$

$$+\,2\left[\mu - \bar{\mu}(\xi - \xi_T)\right]\tilde{\mathbf{E}}(\xi_T) + 2\int_{\xi_T}^{\xi} \bar{\mu}(\xi-\tau)\frac{d}{d\tau}\left[\tilde{\mathbf{E}}(\tau)\right]d\tau, \tag{20}$$

где λ и μ - константы Ламе, а $\bar{\lambda}(\xi - \tau)$ и $\bar{\mu}(\xi - \tau)$ - скалярные функции материала.

Разложив тензоры напряжений и бесконечно малых деформаций в соотношении (20) на шаровую и девиаторную составляющие, и, приравняв соответствующие составляющие в правой и левой части полученного соотношения, запишем

$$\mathbf{s}(\xi) = 2\left[\mu - \bar{\mu}(\xi - \xi_T)\right]\mathbf{e}(\xi_T) + 2\int_{\xi_T}^{\xi} \bar{\mu}(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau\,, \tag{21}$$

$$T_0(\xi) = tr\mathbf{T}(\xi) = 3\left[K - \bar{K}(\xi - \xi_T)\right]\varepsilon_0(\xi_T) + 3\int_{\xi_T}^{\xi} \bar{K}(\xi-\tau)\frac{d\varepsilon_0(\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{22}$$

где $\mathbf{e}(\ ) = \tilde{\mathbf{E}}(\ ) - \frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ - девиатор тензора бесконечно малых деформаций (далее девиатор деформаций); $\frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ - шаровая составляющая тензора деформации; $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ - средняя деформация.

$$3K = 3\lambda + 2\mu,\ 3\bar{K}(\ ) = 3\bar{\lambda}(\ ) + 2\bar{\mu}(\ )\,; \tag{23}$$

$\mathbf{s}(\ )=\mathbf{T}(\ )-\frac{1}{3}T_0(\ )\mathbf{1}$ -девиатор напряжений; $\frac{1}{3}T_0(\ )\mathbf{1}$ -шаровая составляющая тензора напряжений; $\frac{1}{3}T_0(\ )$ - среднее напряжение; K - модуль объемного сжатия.

При выполнении условия (7) как следует, например, из [14], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости в упругопластическим материале можно разделить полные деформации так:

$$\tilde{\mathbf{E}}=\tilde{\mathbf{E}}^e+\tilde{\mathbf{E}}^p\,, \tag{24}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}^e$ и $\tilde{\mathbf{E}}^p$ - тензоры бесконечно малых упругих и пластических деформаций соответственно.

В (24) и везде далее верхние индексы «e» и «p» при соответствующем объекте обозначает его упругие и пластические составляющие.

Применив разложение тензоров в уравнении (24) на девиаторные и шаровые составляющие, и, приравняв такие составляющие правой и левой части, получим

$$\mathbf{e}=\mathbf{e}^{\mathbf{e}}+\mathbf{e}^{\mathbf{p}}\,,\qquad \varepsilon_0=\varepsilon_0^e+\varepsilon_0^p\,. \tag{25}$$

В общем случае при деформировании реальных материалов с упругопластическим поведением, как отмечено в [15],

$$\varepsilon_0^e\neq 0\,,\,\varepsilon_0^p\neq 0\,. \tag{26}$$

Для несжимаемого в разгруженном состоянии (пластически несжимаемого) упругопластического материала

$$\varepsilon_0^p=0 \tag{27}$$

и, как следует из второго соотношения (25), $\varepsilon_0=\varepsilon_0^e$. При этом $\tilde{\mathbf{E}}^p=\mathbf{e}^p$.

С учетом данных [11] при достаточно малых деформациях любых упругопластических материалов можно принять, что упругая составляющая тензора полных деформаций связана с тензором напряжений законом Гука. Тогда

$$\mathbf{s}=2\tilde{G}\mathbf{e}^e,\quad \mathrm{T}_0=3\tilde{K}\varepsilon_0^e, \tag{28}$$

где $\tilde{G}$ и $\tilde{K}$ - зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

При записи (28) полагали, что в процессе деформирования упругопластических материалов сохраняется изотропия упругих свойств с изменением последних в процессе активного деформирования.

Если пренебречь зависимостью упругих свойств от пластической деформации, то из (28) получим

$$\mathbf{s}=2G\mathbf{e}^e,\qquad \mathrm{T}_0=3K\varepsilon_0^e, \tag{29}$$

где G и K - независящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

Для пластически несжимаемого материала, когда согласно [4] $\overline{K}(\ )=const=K$, соотношение (22) примет вид:

$$T_0(\xi)=3K\boldsymbol{\varepsilon}_0(\xi)\,. \tag{30}$$

При этом зависимость (21) остается без изменения.

Литература

1. Benallal A., Marquis D. Constitutive equations for nonproportional loading in cyclic elastoplasticity // Trans.ASME: J.Eng.Mater. and Technol.-1978.-100, N4.-P.326-336.
2. Benallal A., Marquis D. Effect nonproportional cyclic elastoplasticity: experimental, theoretical and numerical aspects // Eng.Comput.-1988.-5, N3.-P.241-247.
3. Takamoto Iton, Masao Sakane, Takahiro Hata, Naomi Hamada. A design procedure for assessing low cycle fatigue life under proportional and non-proportional loading // Int.J.Fatique.-2006.-28, N5-6.-P.459-473.
4. Valanis K.C. A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part 1/ General theory // Arch. Mech.-1971.-23, N4.-P.517-533.
5. Valanis K.C. A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part 2/ Application to mechanical behavior of metals // Ibid.-1971.-23, N4.-P.535-551.
6. Rivlin R.S. Some comments on the endochronic theory of plasticity // Int.J.Solids Struct.-1981.-17, N2.-P.231-248.
7. Лепихин П.П. Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 1. Конечные деформации // Пробл.прочности. -2004.-№5.-С.63-77.
8. Лепихин П.П. Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 2. Бесконечно малые деформации// Там же. -2004.-№6.-С.87-98.
9. Трощенко В.Т., Красовский А.Я., Покровский В.В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению / Справочное пособие.-Т.1.-Киев: Наук.думка, 1993.-286с.
10. Lucchesi M., Owen D.R., Podio-Guidugli P. Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part 3.: Approximate Constitutive Relations // Arch. Rat. Mech. Anal.-1992.-117.-P.53-96.
11. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.-М.: Мир, 1975.-592с.
12. Truesdell C., Noll W. The Non-linear Field Theories of Mechanics.-Springer,1992.-591 p.
13. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости .-М.: Мир, 1974.-338с.
14. 14.Casey.J. Approximate Kinematical Relation in Plasticity//Int.J.Solids Structures.-1985.-21, N7.-P.671-682.
15. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред.-М.: Мир, 1979.-302 с.