УДК 539.3

М. С. Слободян[1], канд. фіз.-мат. наук, доц., [1]Є. Б. Ярема, [2]О. В. Білаш,
[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна
[2]Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ ТА ДВОМА РІВНИМИ МІЖ СОБОЮ СПІВВІСНИМИ ТРІЩИНАМИ

M. S. Slobodyan, Ph.D., Assoc. Prof., Y. B. Yarema, O. V. Bilash

RESEARCH OF STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATE WITH ELLIPTICAL HOLE AND TWO EQUAL COAXIAL CRACKS

У роботі досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з еліптичним отвором, який вільний від зовнішнього навантаження, та двома прямолінійними рівними між собою співвісними тріщинами завдовжки $2l$, береги яких також вільні від зовнішнього навантаження. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі тріщини, що знаходиться зліва від отвору, так, щоб дві тріщини лежали на осі Ox (див. рис. 1). З центром еліптичного отвору, координати якого x_0 та y_0 у системі координат Oxy, пов'яжемо локальну систему координат $O'x'y'$, а його півосі позначимо через a і b. Кут між осями $O'x'$ та Ox позначимо через β. Нехай на нескінченості пластина розтягується рівномірно розподіленими зусиллям p і q, причому зусилля p утворює кут α з віссю Ox та є перпендикулярним до q. Відстань між центрами тріщин позначимо через c; контури тріщин – через $\tilde{L}_1$ і $\tilde{L}_2$, $L = \tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2$, контур отвору – через L_1.

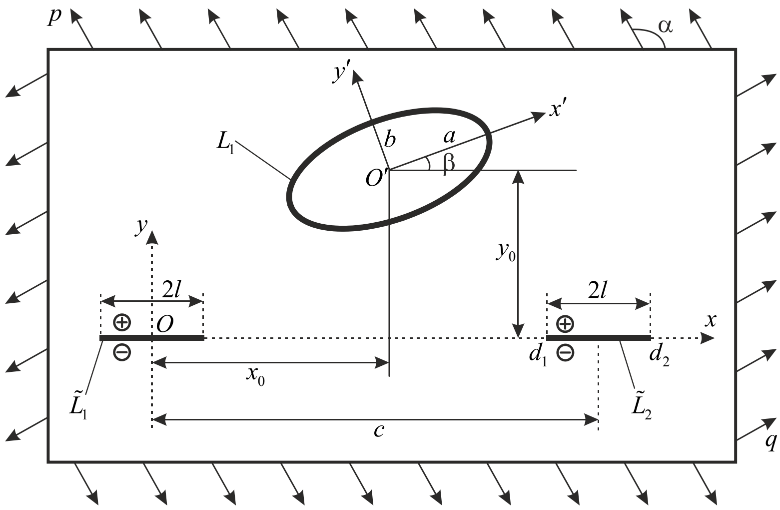

Рис. 1. Схема розміщення отвору і тріщин

Виходячи з формулювання задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \qquad x \in L,$$

$$N^{\pm} + iT^{\pm} = 0, \qquad t \in L_1,$$

де $\sigma_{yy}^{\pm}$, $\sigma_{xy}^{\pm}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат Oxy, N і

T – відповідно нормальна та дотична компоненти зовнішнього навантаження на L_1; значками «+» та «–» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні z до лінії справа і зліва по відношенню до заданого напрямку, $\left[f\right]=f^{+}-f^{-}$, $z=x+iy$, $i^2=-1$.

В більшості наукових праць розв'язок задач такого типу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на отворі та тріщинах, або тільки на тріщинах. В цій роботі було апробовано новий підхід до розв'язування сформульованої задачі. Використавши методи теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі [1], розв'язок задачі зведено до двох задач лінійного спряження, на основі яких отримано сингулярне інтегральне рівняння на межі еліптичного отвору:

$$\int_{L_1}\left[g_1(u)K\left(u,t\right)du+\overline{g_1(u)}M\left(u,t\right)d\bar{u}\right]=\rho\left(t\right),\qquad t\in L_1,$$

де $g_1(u)$ – шукана функція, а функції $K\left(u,t\right)$, $M\left(u,t\right)$ та $\rho\left(t\right)$ – відомі.

Крайові умови на берегах прямолінійних тріщин вдалося задовольнити аналітично. Сингулярне інтегральне рівняння розв'язувалось числово з використанням методу механічних квадратур [2]. Коефіцієнти інтенсивності напружень [3] для першої (лівої) тріщини визначались за формулою

$$k_1^{\pm}-ik_2^{\pm}=2\lim_{x\to\pm l}\left[\sqrt{2\pi\left|x\mp l\right|}\left\langle-\left(\Gamma+\frac{\overline{\Gamma}'}{2}\right)\left(1-\frac{z^2}{X(x)}+\frac{z\left(d_1+d_2\right)}{2X(x)}+\frac{l^2}{2X(x)}+\frac{(d_1-d_2)^2}{8X(x)}\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{4\pi iX(x)}\int_{L_1}\left\{g_1(u)\left[\frac{X(x)-X(u)}{u-x}+\frac{X(x)-\overline{X(u)}}{\bar{u}-x}+u+\bar{u}-\left(d_1+d_2\right)\right]du-\overline{g_1(u)}\left[\frac{\left(\bar{u}-u\right)}{\left(\bar{u}-x\right)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\left(\frac{4\bar{u}^3-\left(3\bar{u}^2-l^2\right)\left(d_1+d_2\right)+2\bar{u}(d_1d_2-l^2)}{2\overline{X(u)}}-\left(\bar{u}-x\right)+\frac{X(x)-\overline{X(u)}}{\bar{u}-x}\right)\right]d\bar{u}\right\}+\frac{C_0}{X(z)}\right\rangle\right],$$

де $X(x)=\sqrt{\left(x^2-l^2\right)\left(x-d_1\right)\left(x-d_2\right)}$, $\Gamma=\frac{1}{4}\left(p+q\right)$, $\Gamma'=-\frac{1}{2}\left(p-q\right)e^{-2i\alpha}$, d_1 та d_2 – вершини правої тріщини у системі координат Oxy, а C_0 – відома стала.

Також в роботі проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Література

1.Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

2.Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук.думка, 1976.– 444с.

3.Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.