

IV Всеукраїнська студентська науково - технічна конференція "ПРИРОДНИЧІ ТА ГУМАНІТАРНІ НАУКИ. АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ"

УДК 539.3

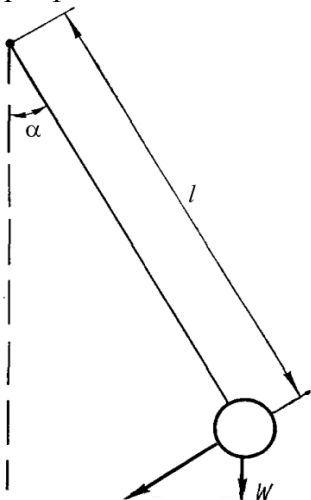
Сеник Л. – ст. гр. ЕС-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусев Г. В.

Розглянемо маятник, що складається із невагомої нитки та вантажу вагою W , який прикріплено нижнього її кінця. Знайдемо рівняння коливань маятника припустивши, що його довжина міняється за законом $l = A + Bt$. Кутовий момент L дорівнює добутку моменту інерції I на кутову швидкість вантажу ω . Як відомо, $I = \frac{W}{g} r^2$, тому $L = \frac{W}{g} r^2 \frac{d\alpha}{dt}$. Момент сили є похідною від кутового моменту, отже:



$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W}{g} r^2 \frac{d\alpha}{dt} \right). \quad (1)$$

Нехтуючи опором повітря, будемо вважати, що маятник рухається лише під дією сили тяжіння. Отже сила, що намагається повернути маятник до положення рівноваги матиме вигляд: $W \sin \alpha$. При малих значеннях кута α можна записати, що $\alpha = \sin \alpha$. Тому її момент відносно опори

$$\tau = W \alpha l. \quad (2)$$

Врахувавши вираз для l , із співвідношень (1) та (2) отримуємо:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{2B}{A + Bt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{A + Bt} \cdot \alpha = 0. \quad (3)$$

Зробимо заміну $u = \frac{A + Bt}{B}$, $du = dt$, $\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dt}$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду:

$$u^2 \frac{d^2 \alpha}{du^2} + 2u \cdot \frac{d\alpha}{du} + m^2 u \cdot \alpha = 0, \quad (4)$$

де $m^2 = \frac{g}{B}$. Співвідношення (4) є частковим випадком узагальненого рівняння Бесселя

$$\frac{d}{du} \left(u^p \frac{d\alpha}{du} \right) + a u^j + b u^k \cdot \alpha = 0,$$

при наступних значеннях сталих: $p = 2$, $j = 1$, $a = m^2$, $b = 0$. Його загальний розв'язок

$$\alpha = u^{\frac{\gamma}{2}} \left[C_1 J_n \left(\beta u^{\frac{1}{2}} \right) + C_2 Y_n \left(\beta u^{\frac{1}{2}} \right) \right], \text{ де } J_n \text{ та } Y_n \text{ – функції Бесселя першого роду,}$$

$$\varphi = \frac{2}{2 - p + j} = 2, \quad \gamma = \frac{1 - p}{2 - p + j} = -1, \quad \beta = \varphi \sqrt{a} = 2m, \quad n = \frac{\sqrt{1 - p^2 - 4b}}{2 - p + j} = 1.$$

Отже розв'язок диференціального рівняння руху маятника (3) буде мати вигляд:

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A + Bt}} \left[C_1 J_1 \left(2m \sqrt{\frac{A}{B} + t} \right) + C_2 Y_2 \left(2m \sqrt{\frac{A}{B} + t} \right) \right].$$