

Матеріали XVIII наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 2014

УДК 537.8, 539.3

**М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук, професор; О. Король; О. Шаблій, докт. фіз.-мат. наук, професор**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

**M. Mykhailyshyn, O. Korol, O. Shabliy**

### STUDY OF TEMPERATURE FIELD IN RESTORATION PARTS CYLINDRICAL

Розроблено математичну модель для визначення температурного поля в області деталі перед заливанням розплавленого рідкого металу в створений технологічний тигель в залежності від питомої потужності теплових джерел нагрівання, коли температура на поверхні деталі не перевищує температуру Кюрі. Температурне поле створюється в області деталі з метою зменшення градієнта температури після заливання розплавленого металу в створений технологічний тигель, та з метою покращення дифузії розплавленого металу в матеріал деталі.

Будемо моделювати деталь нескінченним шаром товщиною  $H$ , поверхня  $x=0$  якого нагрівається нескінченним плоским індуктором, розміщеним на деякій близькій до цієї поверхні відстані. В результаті протікання індукційних струмів в деталі виникають джерела джоулевого тепла, питома потужність яких визначається формулами [1].

Розглянемо спочатку процес індукційного нагріву деталі для проміжку часу  $0 \leq t \leq t_k$ . Тоді питома потужність джерел джоулевого тепла описується функцією  $W_0(x)$  і температурне поле в деталі описується диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{a}{\lambda} W_0(x). \quad (1)$$

На поверхні деталі  $x=0$  має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, а границю шару  $x=H$  вважаємо теплоізолюваною, тобто

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} - hT^* = 0 \text{ при } x=0, \quad T^* = T - T_c, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \text{ при } x=H. \quad (3)$$

Тут  $h = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі,  $T_c = const$  - температура зовнішнього середовища.

В початковий момент часу температура в деталі дорівнює температурі зовнішнього середовища

$$T^* = 0 \text{ при } t=0. \quad (4)$$

Розв'язок задачі шукаємо з використанням методу Фур'є. Подамо розв'язок однорідного рівняння у вигляді

$$T_1 = \theta(t) \cdot X(x).$$

Для знаходження власних функцій задачі по  $x$  отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \nu^2 X = 0, \quad (5)$$

загальний розв'язок якого такий

$$X = C_1 \cos(\nu x) + C_2 \sin(\nu x).$$

В результаті задоволення граничних умов задачі (2), (3) отримуємо власні функції задачі у вигляді

$$X_j = \cos \nu_j x + \frac{h}{\nu_j} \sin \nu_j x,$$

де власні числа  $\nu_j$  є коренями характеристичного рівняння

$$\operatorname{tg}(\nu H) = \frac{h}{\nu}. \quad (6)$$

Розкладемо  $W_0(x)$  в ряд за власними функціями задачі  $X_j$ .

$$W_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j(x). \quad (7)$$

Коефіцієнти розкладу мають вигляд

$$w_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^H W_0(x) X_k(x) dx,$$

де  $\|X_j\|^2 = \int_0^H X_j^2 dx = \frac{1}{2\nu_j^2} \left[ H(\nu_j^2 + h^2) - \frac{\nu_j^2 - h^2}{2\nu_j} \sin 2\nu_j H + 2h \sin^2 \nu_j H \right].$

Тепер розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$T^* = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) X_j(x). \quad (8)$$

Підставивши в (1) вираз (8) і формулу (7), отримуємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\theta_j}{dt} X_j - a \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) \frac{d^2 X_j}{dx^2} = \frac{a}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j.$$

Враховуючи рівняння (6) для знаходження  $\theta_j(t)$  отримуємо рівняння

$$\frac{d\theta_j}{dt} + a\nu_j^2 \theta_j = \frac{a}{\lambda} w_j, \quad (9)$$

розв'язок якого, що задовольняє початкову умову (7), має вигляд

$$\theta_j(t) = \frac{w_j}{\lambda \nu_j^2} \left( 1 - e^{-a\nu_j^2 t} \right).$$

Таким чином, розв'язок задачі (1) - (4) такий

$$T^*(x, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{\nu_j^2} \left( 1 - e^{-a\nu_j^2 t} \right) \left( \cos \nu_j x + \operatorname{tg} \nu_j H \sin \nu_j x \right). \quad (10)$$

### Література:

1. Шаблій О.М. Створення температурного поля на торці спрацьованого металевого колеса коли температура перевищує температуру Кюрі [Текст] / Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Король О.І., Базар М.С. // Вісник ТНТУ ім. Івана Пулюя. – №1 – 2012. – С. 208 – 219.