

Попадюк І. Й. Конструкційне демпфування в конічній обоймі з пружним заповнювачем / Ігор Йосипович Попадюк, Іван Петрович Шацький, Василь Михайлович Шопя // Вісник ТНТУ, — Т. : ТНТУ, 2015. — Том 79. — № 3. — С. 52-61. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

**І. Попадюк, канд. фіз.-мат. наук; І. Шацький, докт. фіз.-мат. наук;  
В. Шопя, канд. техн. наук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Івано-Франківський відділ*

## **КОНСТРУКЦІЙНЕ ДЕМПФУВАННЯ В КОНІЧНІЙ ОБОЙМІ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ**

**Резюме.** Оболонкові елементи з пружним заповнювачем поєднують високу несучу здатність з порівняно малою жорсткістю і потрібним рівнем демпфування, достатніми для якісного гасіння вібрацій. На даний час розроблено основи теорії розрахунку конструкцій, несучими ланками в яких є циліндричні оболонки. Маловивченим залишається питання впливу форми поверхні оболонки на деформативні та демпфувальні властивості оболонкових амортизаторів. Запропонована робота є черговим кроком у цьому напрямку. Розглянуто конструктивно нелінійну неконсервативну мішану контактну задачу про фрикційну взаємодію жорсткої конічної обойми з пружним заповнювачем при немонотонному навантаженні. У квазістатичній постановці процес немонотонного навантаження системи розбивається на етапи, де навантаження монотонне. Розв'язки задачі на кожному з етапів навантаження отримано асимптотичним методом малого параметра. Записано вирази для напружень та осевих переміщень заповнювача, побудовано діаграми деформування (петлі конструкційного демпфування) систем з різними нахилами твірної конуса. Доведено доцільність проектування оболонкових демпферів з орієнтацією конічної поверхні контакту, звуженої у бік поршня.

**Ключові слова:** конструкційне демпфування, конічна обойма, пружний заповнювач, оболонковий амортизатор, фрикційна взаємодія.

**I. Popadyuk, I. Shatskyi, V. Shopa**

## **CONSTRUCTIVE DAMPING IN THE CONICAL HOLDER WITH AN ELASTIC FILLER**

**Summary.** Operation of all machines and mechanisms is directly related to arising of vibrations. In the majority of cases vibrations worsen durability, reliability and longevity of industrial machines, mechanisms and buildings; they also have a harmful influence on the health of operating staff. Y. S. Pidstrygach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine has developed promising constructions of vibroinsulators, which form the basis for the new class of vibroprotective devices - shell elements with elastic filler. They combine high bearing strength with comparatively low inflexibility and the necessary level of damping, sufficient for the quality extinguishing of vibrations. The main characteristic of such constructions is the application of the thin-walled elements (shells, plates, bars) as a basic bearing and executive details. According to their construction they are deformable shell systems with dry friction. During mechanical and mathematical modelling of elastic elements under the loading (generally speaking, unmonotonous one) there arises a class of constructive nonlinear nonconservative mixed contact problems on the friction contact of shells with an elastic filler. Currently there are the theoretical bases of constructions calculation, the bearing details in which are cylinder shells were developed. The problem of the influence of the surface form of a shell on deformation and damping properties of shell shock absorbers is not fully researched. The offered work is the next step in this direction. The authors have studied a mixed contact problem on the friction interaction of absolutely hard conical holder with an elastic filler under the unmonotonous loading. A holder is considered as a hard one, because the inflexibility of a filler in the system is substantially less than the inflexibility of a bearing shell. The process of the unmonotonous loading of the system during the allegedly static formulation is broken up into phases with monotonous loading. The problem solutions at each stage of loading are obtained based on the asymptotic method of a small parameter. Expressions for tensions and axial movements of a filler are written and the diagrams of deformation (loops of the construction damping) of the systems with different inclinations of the cone formative are built. The expedience of

*constructing of shell dampers with the orientation of narrowing of the conical surface contact narrowing toward the piston is proved.*

**Key words:** *constructive damping, conical holder, elastic filler, shell shock absorber, frictional contact.*

**Постановка проблеми.** Вібраційні процеси, які виникають при експлуатації практично всіх без винятку сучасних машин і механізмів, зазвичай призводять до небажаних наслідків. У переважній більшості випадків вібрації погіршують міцність, надійність і довговічність промислових машин, механізмів і споруд, а також шкідливо впливають на здоров'я обслуговуючого персоналу. Таким чином, проблема віброізоляції є актуальною як в технічному, так і у соціальному розумінні.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України розроблено перспективні конструкції віброізоляторів, на основі яких сформовано новий клас віброзахисних пристроїв – оболонкові пружні елементи [1]. Головною ознакою конструкцій цього класу є застосування тонкостінних елементів (оболонок, пластин, стрижнів) як основної несучої та виконавчої ланки.

За своїм технічним рівнем оболонкові пружні елементи не мають аналогів. Деякі конструкції даного класу вже добре зарекомендували себе у ряді галузей промисловості. Особливо ефективно оболонкові віброізолятори працюють виконавчими органами віброзахисних систем, що експлуатуються в умовах екстремального навантаження.

За конструкторським виконанням пристрої, що розглядаються, – це деформівні оболонкові системи з сухим тертям. Детальний огляд публікацій, присвячених дослідженню динамічних систем з різноманітними законами тертя, зроблено в статті [2].

З усього різноманіття механіко-математичних моделей, які описують фрикційну взаємодію тонкостінних елементів конструкцій з деформівними заповнювачами, найширше розроблені моделі об'єктів, несучими ланками в яких фігурують циліндричні оболонки (наприклад, роботи [3–5]). Результати перших досліджень фрикційної взаємодії нециліндричних (у даному випадку конічної) оболонки обертання з деформівним заповнювачем викладено у статті [6], де змодельовано процес активного (монотонного) навантаження пружного заповнювача в конічній обоймі з урахуванням сухого тертя.

**Мета роботи.** Побудувати петлю конструкційного гістерезису, який виникає внаслідок сухого тертя при немонотонному навантаженні пружного заповнювача в жорсткій конічній обоймі, та вивчити вплив конусності на деформативні й демпфувальні властивості системи.

**Постановка задачі.** Розглянемо пружний зрізаний конус завдовжки  $a$ , який заповнює абсолютно жорстку обойму (рис. 1). На вільний торець конуса через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє немонотонне за часом навантаження  $Q$ . Характер контактної взаємодії бічних поверхонь обойми і заповнювача визначається законом сухого тертя. Осесиметричний напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричній системі координат, вказаній на рис. 1.

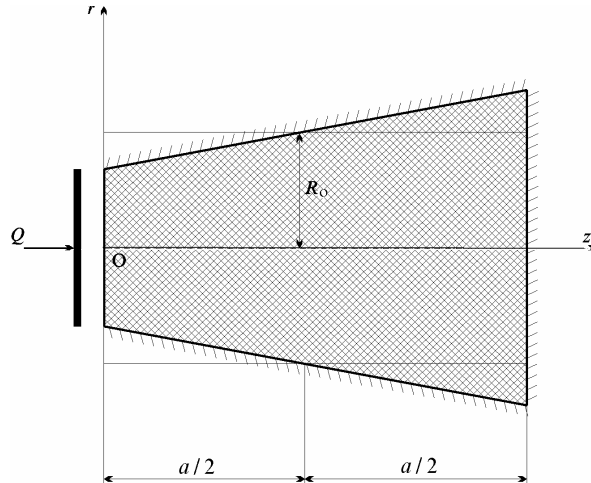


Рисунок 1. Розрахункова схема

Figure 1. Analytical model

Намагаючись аналітично оцінити суттєві параметри розглядуваної задачі, використаємо одновимірну модель заповнювача [6]. Вважаємо, що в заповнювачі нормальні напруження  $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$  і осеві переміщення  $u_z$  розподілені рівномірно, а дотичні напруження  $\tau_{rz}$  і радіальні переміщення  $u_r$  – лінійно по поперечному перерізу. Пружну рівновагу заповнювача описуємо усередненими за поперечним перерізом рівнянням рівноваги

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2}{R(z)}\tau_{rz} = 0 \quad (1)$$

та законом Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{du_z}{dz} = \frac{1}{E}(\sigma_z - 2\nu\sigma_r), \\ \varepsilon_\beta &= \frac{u_r(R)}{R(z)} = \frac{1}{E}((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_z). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $E, \nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача;

$$R(z) = R_0 \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{R_0} \left( z - \frac{a}{2} \right) \right), \quad (3)$$

$R_0 = R(a/2)$ ,  $\varphi$  – кут між дотичною до бічної поверхні та віссю симетрії заповнювача. Під  $\tau_{rz}$  у формулі (1) та нижче розумітимемо його значення на поверхні контакту  $\tau_{rz}(R)$ .

Фрикційну взаємодію обойми і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$u_n = 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad (4)$$

а також законом тертя Кулона для немонотонного навантаження

$$\tau_n = f\sigma_n \operatorname{sgn} \frac{\partial u_z}{\partial Q} \operatorname{sgn}(\dot{Q}); \quad \frac{\partial u_z}{\partial Q} \neq 0;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial Q} = 0, \quad |\tau_n| \leq -f\sigma_n. \quad (5)$$

Тут  $f$  – коефіцієнт тертя;  $\tau_n, \sigma_n$  – дотичні та нормальні напруження на поверхні контакту,  $u_n$  – нормальне переміщення поверхні контакту.

На торцях заповнювача виконуються крайові умови

$$\sigma_z(0) = -Q/\pi R^2(0), \quad u_z(a) = 0. \quad (6)$$

Перейдемо до переміщень та напружень, орієнтованих в циліндричній системі координат. Вважаючи  $\varphi$  достатньо малим (форма бічної поверхні змінюється полого, тобто близька до циліндричної), знехтуємо членами рядів  $O(\varphi^2)$ , отримаємо

$$u_n = u_r \cos \varphi - u_z \sin \varphi \sim u_r - \varphi u_z; \quad (7)$$

$$u_r = u_z \cos \varphi + u_r \sin \varphi \sim u_z + \varphi u_r. \quad (8)$$

Тут  $u_r, u_n$  – проєкції повних переміщень точок заповнювача на нормаль та дотичну до бічної поверхні заповнювача.

Зв'язок між напруженнями визначається формулами

$$\sigma_n = \sigma_z \sin^2 \varphi + \sigma_r \cos^2 \varphi - \tau_{rz} \sin 2\varphi \sim \sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}; \quad (9)$$

$$\tau_n = (\sigma_r - \sigma_z) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{rz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sim \tau_{rz} + \varphi(\sigma_r - \sigma_z). \quad (10)$$

Формула (3) набуває вигляду

$$R(z) \sim R_0 \left( 1 + \frac{\varphi}{R_0} \left( z - \frac{a}{2} \right) \right). \quad (11)$$

Підставляючи формули (7) – (10) в умови одностороннього контакту (4) та перше і з співвідношень закону Кулона (5), отримаємо умови фрикційної взаємодії з проковзуванням заповнювача і жорсткої обойми

$$u_r(R) - \varphi u_z = 0; \quad \sigma_r - 2\varphi \tau_{rz} \leq 0. \quad (12)$$

$$\tau_{rz} + \varphi(\sigma_r - \sigma_z) - f(\sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}) \operatorname{sgn} \frac{\partial u_z}{\partial Q} \operatorname{sgn}(\dot{Q}) = 0. \quad (13)$$

Підставимо закон Гука (2) в першу з умов (12), приєднаємо до отриманого співвідношення рівняння рівноваги (1) і закон Кулона (13) та врахуємо формулу (11), отримуємо замкнену систему рівнянь задачі для випадку проковзування пружного заповнювача в жорсткій обоймі

$$R_0 \left( 1 + \frac{\varphi}{R_0} \left( z - \frac{a}{2} \right) \right) \frac{d\sigma_z}{dz} + 2\tau_{rz} = 0;$$

$$R_0 \left( 1 + \frac{\varphi}{R_0} \left( z - \frac{a}{2} \right) \right) \left( (1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_z \right) + \varphi \int_z^a (\sigma_z - 2\nu\sigma_r) dz = 0; \quad (14)$$

$$\tau_{rz} + \varphi(\sigma_r - \sigma_z) - f(\sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}) \operatorname{sgn} \frac{\partial u_z}{\partial Q} \operatorname{sgn}(\dot{Q}) = 0.$$

Перейдемо до безрозмірних координат  $\zeta = z/R_0$ ,  $\rho = z/R_0$ . Позначимо  $l = a/R_0$ ,  $P = -Q/\pi R_0^2$ . Тоді система рівнянь (14) та крайові умови (6) набудуть вигляду

$$(1 + \varphi(\zeta - l/2)) \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + 2\tau_{\rho\zeta} = 0;$$

$$(1 + \varphi(\zeta - l/2))((1 - \nu)\sigma_\rho - \nu\sigma_\zeta) + \varphi \int_\zeta^l (\sigma_\zeta - 2\nu\sigma_\rho) d\zeta = 0; \quad (15)$$

$$\tau_{\rho\zeta} + \varphi(\sigma_\rho - \sigma_\zeta) - f(\sigma_\rho - 2\varphi\tau_{\rho\zeta}) \operatorname{sgn} \frac{\partial u_z}{\partial Q} \operatorname{sgn}(\dot{Q}) = 0.$$

$$(1 - \varphi l)\sigma_\zeta(0) = -P, \quad u_\zeta(l) = 0. \quad (16)$$

**Побудова розв'язку мішаної контактної задачі.** У квазістатичній постановці процес немонотонного навантаження системи розбивається на етапи, де навантаження монотонне. Розв'язки системи рівнянь (15) з крайовими умовами (16) для різних етапів навантаження будемо, розвиваючи невідомі величини в асимптотичні ряди за степенями малого параметра  $\varphi$ . Оскільки при виводі співвідношень (12), (13) відкидалися члени  $O(\varphi^2)$ , достатньо обмежитись аналізом нульового та першого наближень.

**Початкове (активне) навантаження**

$$0 \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0, \quad \frac{\partial u_\zeta}{\partial Q} > 0. \quad (17)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (16) з урахуванням умов (17), отримуємо

$$\sigma_\zeta = -Pe^{-\lambda\zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, \lambda) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)e^{-\lambda l}}{\nu(1-\nu)\lambda} (e^{\lambda\zeta} - 1) \right) + O(\varphi^2) \right),$$

$$\sigma_\rho = -\frac{\nu}{1-\nu} Pe^{-\lambda\zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, \lambda) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(1-e^{-\lambda l})}{\nu(1-\nu)\lambda} \right) + O(\varphi^2) \right), \quad (18)$$

$$\tau_{\rho\zeta} = -\frac{\nu f}{1-\nu} Pe^{-\lambda\zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, \lambda) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)e^{-\lambda l}}{\nu(1-\nu)\lambda} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} - 2f \right) + O(\varphi^2) \right).$$

Тут введено позначення  $\lambda = \frac{2\nu f}{1-\nu}$ ;  $H(\zeta, \lambda) = l + \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) \zeta + \frac{\lambda \zeta^2}{2}$ .

Інтегруючи перше і з співвідношень (2), отримуємо осьові переміщення заповнювача:

$$u_\zeta = -\frac{1}{E} \int_\zeta^l (\sigma_\zeta - 2\nu\sigma_\rho) d\zeta = \frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left( \frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda l}}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \varphi \left( \frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda l}}{\lambda} \left( \frac{1}{\nu\lambda} + l + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1-\nu)\lambda} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} - \frac{\lambda l}{2} \right) \left( e^{-\lambda \zeta} (\lambda \zeta + 1) - e^{-\lambda l} (\lambda l + 1) \right) + \\
 & + \frac{1}{2\lambda^2} \left( e^{-\lambda \zeta} (\lambda^2 \zeta^2 + 2\lambda \zeta + 2) - e^{-\lambda l} (\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2) \right) - \frac{e^{-\lambda l} (l - \zeta)}{v\lambda} + O(\varphi^2) \Bigg). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Вираз для переміщення поршня має вигляд

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \equiv u_\zeta(0) = & -\frac{P(1+v)(1-2v)}{E(1-v)} \left( \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} + \varphi \left( \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} \times \left( \frac{1}{v\lambda} + l - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)} \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} - \frac{\lambda l}{2} \right) \times (1-e^{-\lambda l} (\lambda l + 1)) + \frac{1}{2\lambda^2} (2-e^{-\lambda l} (\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2)) - \frac{le^{-\lambda l}}{v\lambda} \right) + O(\varphi^2) \Bigg). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Співвідношення (20) описує лінійну ділянку діаграми навантаження (чи петлі конструкційного гістерезису), яка відповідає початковому навантаженню.

**Розвантаження**

$$Q_{\max} \geq Q \geq 0, \quad \dot{Q} < 0.$$

На початку етапу виконуються умови неповного проковзування. На поверхні контакту присутні дві зони, розділені біжучою точкою з координатою  $\alpha$ , яка відіграє роль внутрішнього часу. Розглянемо по черзі кожну з них.

Область  $\zeta \in [0, \alpha]$  – зона зворотного проковзування, для якої справедлива нерівність

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial Q} > 0. \quad (21)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (16) з урахуванням умови (21), отримуємо

$$\begin{aligned}
 \sigma_\zeta = & -Pe^{\lambda \zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, -\lambda) - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} F(\alpha) (1 - e^{-\lambda \zeta}) \right) \right) + O(\varphi^2); \\
 \sigma_\rho = & -\frac{v}{1-v} Pe^{\lambda \zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, -\lambda) - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (F(\alpha) - 1) \right) \right) + O(\varphi^2); \quad (22) \\
 \tau_{\rho \zeta} = & \frac{vf}{1-v} Pe^{\lambda \zeta} \left( 1 + \varphi \left( H(\zeta, -\lambda) - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (F(\alpha) - 1) + 2f - \frac{1-2v}{vf} \right) \right) + O(\varphi^2).
 \end{aligned}$$

Тут введено позначення  $F(\alpha) = e^{\lambda \alpha} - \frac{P_{\max}}{P} (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda \alpha})$ .

Область  $\zeta \in [\alpha, l]$  – зона зчеплення, де  $\partial u_\zeta / \partial Q = 0$ , а напруження обчислюються за формулами (18) при  $P = P_{\max}$ . Координата точки розділу зон  $\alpha$  знаходиться із умови неперервності осевих напружень

$$\sigma_\zeta(\alpha - 0) = \sigma_\zeta(\alpha + 0),$$

яка з урахуванням співвідношень (18), (22) після перетворення набуває вигляду

$$\frac{P}{P_{\max}} = e^{-2\lambda \alpha} \left( 1 + \varphi \left( \lambda \alpha (\alpha - l) - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)\lambda} (e^{-\lambda l} - 1) (e^{\lambda \alpha} - 1) + (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda \alpha}) (1 - e^{-\lambda \alpha}) \right) \right) + O(\varphi^2). \quad (23)$$

Осьові переміщення заповнювача будуть

$$\begin{aligned}
u_{\zeta} = & \frac{1}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left( P_{\max} \frac{e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda l}}{\lambda} + P \frac{e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} + \right. \\
& + \varphi \left( P_{\max} \frac{e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda l}}{\lambda} \left( \frac{1}{\nu\lambda} + l + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right. \\
& + P \frac{e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} \left( -\frac{1}{\nu\lambda} + l - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (F(\alpha) - 1) \right) + \\
& + P_{\max} \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{-\lambda\alpha} (\lambda\alpha + 1) - e^{-\lambda l} (\lambda l + 1)) + \\
& + P \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda\alpha} (\lambda\alpha - 1) - e^{\lambda\zeta} (\lambda\zeta - 1)) + \\
& + P_{\max} \frac{1}{2\lambda^2} (e^{-\lambda\alpha} (\lambda^2\alpha^2 + 2\lambda\alpha + 2) - e^{-\lambda l} (\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2)) - \\
& - P \frac{1}{2\lambda^2} (e^{\lambda\alpha} (\lambda^2\alpha^2 - 2\lambda\alpha + 2) - e^{\lambda\zeta} (\lambda^2\zeta^2 - 2\zeta + 2)) - \\
& \left. - P_{\max} \frac{e^{-\lambda l}}{\nu\lambda} (l - \alpha) + P \frac{F(\alpha)}{\nu\lambda} (\alpha - \zeta) \right) + O(\varphi^2). \tag{24}
\end{aligned}$$

Переміщення поршня отримаємо підстановкою у формулу (24) значення  $\zeta = 0$ . Після перегрупування (виділимо  $\delta_{1\max}$  – найбільше переміщення поршня на етапі активного навантаження) для етапу розвантаження в умовах неповного проковзування маємо

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \delta_{1\max} + \frac{P_{\max}}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left( P_{\max} \frac{e^{\lambda\alpha} - 1}{\lambda} - \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}}{\lambda} + \right. \\
& + \varphi \left( \frac{e^{-\lambda\alpha} - 1}{\lambda} \left( \frac{1}{\nu\lambda} + l + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right. \\
& + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (e^{\lambda\alpha} - 1) \frac{e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha}}{\lambda} + \\
& + \frac{P}{P_{\max}} \frac{e^{\lambda\alpha} - 1}{\lambda} \left( -\frac{1}{\nu\lambda} + l - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (e^{\lambda\alpha} - 1) \right) + \\
& + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{-\lambda\alpha} (\lambda\alpha + 1) - 1) + \\
& + \frac{P}{P_{\max}} \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda\alpha} (\lambda\alpha - 1) + 1) + \\
& + \frac{1}{2\lambda^2} (e^{-\lambda\alpha} (\lambda^2\alpha^2 + 2\lambda\alpha + 2) - 2) - \frac{P}{P_{\max}} \frac{1}{2\lambda^2} (e^{\lambda\alpha} (\lambda^2\alpha^2 - \\
& - 2\lambda\alpha + 2) - 2) + \frac{\alpha e^{-\lambda\alpha}}{\nu} + \frac{P}{P_{\max}} \frac{\alpha e^{\lambda\alpha}}{\nu} \left. \right) + O(\varphi^2). \tag{25}
\end{aligned}$$

Беручи до уваги, що

$$0 \leq \alpha \leq l, \quad (26)$$

запишемо цю умову неповного проковзування з допомогою формули (23) в термінах навантажень таким чином:

$$s_* Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}. \quad (27)$$

Тут  $s_*$  – характерне значення коефіцієнта асиметрії циклу навантаження, яке обчислюється за формулою

$$s_* = e^{-2\lambda} \left( 1 - \varphi \left( \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1-\nu)\lambda} (e^{-\lambda} - e^{\lambda}) \right) + O(\varphi^2) \right).$$

Співвідношення (23) та (25) в параметричній формі описують нелінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, відповідну розвантаженню в умовах неповного проковзування. Нерівності (26), (27) є відповідними еквівалентними умовами монотонності.

Перейдемо до розвантаження в умовах повного проковзування.

Коли параметр  $\alpha$  досягне значення  $\alpha = l$  (навантаження відповідно зменшиться до величини  $Q = s_* Q_{\max}$ ), на усій поверхні контакту ( $\zeta \in [0, l]$ ) будуть виконуватись умови повного зворотного проковзування. В цьому випадку справедливі формули (22), умова монотонності для повного проковзування має вигляд

$$0 \leq Q \leq s_* Q_{\max}, \quad (28)$$

а осьові переміщення заповнювача будуть

$$u_{\zeta} = \frac{P}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left( \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} + \varphi \left( \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} \left( -\frac{1}{\nu\lambda} + l - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1-\nu)\lambda} (e^{\lambda} - 1) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda}(\lambda l - 1) - e^{\lambda\zeta}(\lambda\zeta - 1)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\lambda^2} (e^{\lambda}(\lambda^2 l^2 - 2\lambda l + 2) - e^{\lambda\zeta}(\lambda^2 \zeta^2 - 2\lambda\zeta + 2)) + \frac{e^{\lambda}}{\nu\lambda} (l - \zeta) \right) + O(\varphi^2) \right). \quad (29)$$

Переміщення поршня отримаємо з формули (29) при  $\zeta = 0$

$$\delta = u_{\zeta}(0) + \frac{P}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left( \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} + \varphi \left( \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} \left( -\frac{1}{\nu\lambda} + l - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1-\nu)} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} + \frac{\lambda l}{2} \right) (1 + e^{\lambda}(\lambda l - 1)) + \frac{1}{2\lambda^2} (2 - e^{\lambda}(\lambda^2 l^2 - 2\lambda l + 2)) + \frac{l e^{\lambda}}{\nu\lambda} \right) + O(\varphi^2) \right). \quad (30)$$

Співвідношення (30) описує лінійну ділянку петлі конструкційного гістерезису, відповідну розвантаженню в умовах повного зворотного проковзування. Межі застосованості формули (30) встановлює нерівність (28).

У результаті числового дослідження аналітичного розв'язку задачі в переміщеннях для системи з параметрами  $f = 0,5$ ;  $\nu = 0,495$ ;  $l = 2$  побудовано діаграми деформування систем з різними орієнтаціями твірної конуса (рис. 2). Значенню кута  $\varphi = 0,1$  відповідає конічна поверхня контакту, звужена у бік поршня (рис. 1); значенню  $\varphi = 0$  – циліндрична поверхня контакту; значенню  $\varphi = -0,1$  – конічна поверхня



контакту, розширена в бік поршня. Безрозмірні ординати та абсциси координатної площини пов'язані з розмірними такими залежностями:

$$\bar{Q} = Q/Q_{\max} ; \quad \bar{\delta} = \frac{u_z(0)E}{R_o P_{\max}}$$

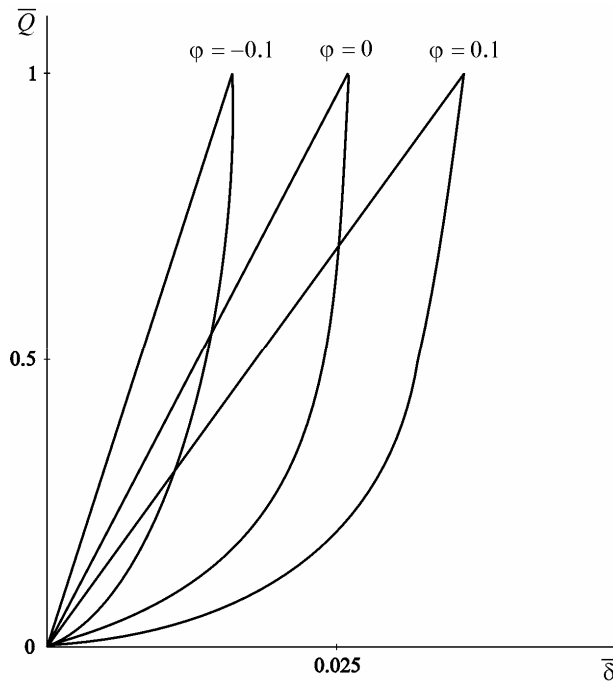


Рисунок 2. Діаграми деформування систем з різними орієнтаціями твірної конуса

Figure 2. The diagrams of deformation of the systems with different inclinations of the cone formative

**Висновки.** Розв'язок мішаної контактної задачі про немонотонне деформування пружного заповнювача в конічній обоймі отримано. Записано вирази для напружень, осьових переміщень заповнювача та осадки поршня на кожному з етапів навантаження, побудовано діаграми деформування (петлі конструкційного демпфування) систем з різними нахилами твірної конуса. Порівнюючи нахил прямих активного навантаження та площі петель конструкційного демпфування, бачимо явну перевагу системи при  $\varphi = 0,1$  над іншими двома в податливості та демпфуючій здатності, чим доведено доцільність проектування оболонкових демпферів саме з такою орієнтацією конічної поверхні контакту.

**Conclusions.** The problem solution of the mixed contact problem about non-monotonous deformation of elastic filler in a conical holder has been obtained. The expressions for tensions, axial movements of a filler and sinking of a piston have been written, deformation diagrams (loops of the construction damping) of the systems with different inclinations of cone formative have been built. Having compared the inclination of active loading lines and the area of loops of the construction damping, we can see an obvious advantage of the system when  $\varphi = 0,1$  above other two systems in the pliability and antivibration ability. It proves the expedience of shell dampers projecting exactly with such orientation of a conical surface.

#### Список використаної літератури

1. Шопа, В.М. Оболонкові пружини [Текст] / В.М. Шопа, А.С. Величкович, С.В. Величкович та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.

2. Awrejcewicz, J. Analysis of dynamic systems with various friction laws / J. Awrejcewicz., P. Olejnik. // Appl. Mech. Rev. Trans. ASME. – Nov. 2005, Vol. 58. – Pp. 389 – 411.
3. Шопя, В.М. Конструкційне демпфування в рівномісній циліндрічній оболонці з деформівним заповнювачем [Текст] / В.М. Шопя, І.Й. Попадюк // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Вип. 37. – 1994. – С. 86 – 91.
4. Шопя, В.М. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндрічних оболонок і деформівного заповнювача [Текст] / В.М. Шопя, І.Й. Попадюк, О.О. Бездір // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 103 – 108.
5. Фрикційна взаємодія циліндрічної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні [Текст] / І.Й. Попадюк, І.П. Шацький, В.М. Шопя, А.С. Величкович // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 2. – С. 187 – 194.
6. Попадюк, І.Й. Фрикційний контакт у конічному амортизаторі з пружним заповнювачем [Текст] / І.Й. Попадюк, І.П. Шацький, В.М. Шопя // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 67 – 71.

*Отримано 10.07.2015*