Алілуйко А. Синтез керування для сім'ї псевдолінійних диференціальних систем / А. Алілуйко, І. Новосад // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 77. — № 1. — С. 266-275. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 517.925; 517.93

А. Алілуйко, канд. фіз.-мат. наук; І. Новосад, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ ДЛЯ СІМ'Ї ПСЕВДОЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Резюме. *Робота присвячена розробленні методів синтезу керування для сімей псевдолінійних керованих систем. Побудова керування у вигляді статичного лінійного зворотного зв'язку по стану передбачає забезпечення еліпсоїдального оцінювання розв'язку системи. Бажані властивості системи з керуванням задаються еталонною системою із використанням матричних систем порівняння. В якості матричних систем порівняння використовуються матричні диференціальні рівняння з умовою квазімонотонності правої частини відносно конуса невід'ємно визначених симетричних матриць. Запропонований алгоритм синтезу керування реалізовано на прикладі системи стабілізації подвійного перевернованого маятника.*

Ключові слова: *система керування, метод порівняння, інваріантний еліпсоїд, псевдолінійна система.*

A. Aliluyko, I. Novosad

SYNTHESIS OF CONTROL FOR FAMILY OF PSEUDOLINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

Summary. *The work is devoted to development of methods of synthesis control for families of pseudolinear controlled systems. Construction of control in the form of static linear reverse connection foresees allocation of phase coordinates within the desired set, which is specified as invariant ellipsoid of a reference system. Ellipsoidal estimates solutions of systems of control and reference system are built using a matrix of comparison. Systems comparison methods in relevance with invariant sets are the development of the Lyapunov's function method and have been successfully applied in the study of broad classes of solutions of differential and difference equations. This paper uses the connection between matrix comparison systems with the Lyapunov's quadratic functions which provide invariant sets in phase space.*

Matrix differential equations of quasy monotony condition of the right-hand side with respect to the cone defined intrinsically symmetric matrices are being used as comparison matrix systems. Control is performed on the condition of equality of right matrix sides of the comparison for pseudolinear control and reference systems. Taking into account the proximity of estimations for such systems while synthesizing the regulator robustness can be obtained.

There has been suggested an algorithm for synthesis control that is based on solving two optimization problems with constraints in the form of linear matrix inequalities. Synthesis control, being quite simple in the algorithm, is similar to the model control. The investigated method allows to specify an approach to solving problems of robust control, for example, for linear non-autonomous systems with uncertain parameters and external perturbations.

The efficiency of the synthesis algorithm has been demonstrated on the example of the stabilization of double inverted pendulum. As a result of numerical calculations it has been shown that the method provides the desired arrangement of phase coordinates.

Key words: *control system, comparison method, invariant ellipsoid, pseudolinear system.*

Постановка проблеми. В задачах аналізу стійкості й синтезу керування різноманітних фізичних об'єктів використовуються диференціальні або різницеві системи рівнянь, у фазовому просторі яких існують інваріантні множини. Такі системи виникають у результаті застосування методів векторних, матричних і конуснозначних функцій Ляпунова для дослідження стійкості руху. Методи порівняння систем відносно конусів є розвитком методу функції Ляпунова й успішно застосовується при дослідженні розв'язків широких класів диференціальних та різницевих рівнянь (див., наприклад, [1]–[3]). У результаті вивчення складних моделей зводиться до аналізу простіших класів систем, які володіють властивостями типу позитивності та монотонності. Інваріантні множини, зокрема інваріантні еліпсоїди, досить широко використовуються в різних задачах теорії гарантованого оцінювання, фільтрації й мінімаксного оцінювання динамічними системами.

З допомогою методу матричних систем порівняння можна побудувати еліпсоїдальні оцінки множини розв'язків систем диференціальних рівнянь. Враховуючи це, ставиться задача синтезу керування, яке б забезпечувало стійкість розв'язку системи та розміщення фазових координат в середині бажаної множини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Метод інваріантних еліпсоїдів застосовувався в задачах придушення зовнішніх збурень динамічної системи. Зокрема, в [4], [5] побудовано еліпсоїдальні оцінки по стану та виходу системи у вигляді лінійних матричних нерівностей. В [6] розглянуто методи еліпсоїдального оцінювання стану диференціальних систем з допомогою матричних систем порівняння. Задача синтезу керування для дифернціальних систем зі сталими коефіцієнтами з допомогою матричних систем порівняння розглянуто в [7]. При цьому забезпечується розміщення фазових координат усередині еліпсоїда. Поряд з отриманими результатами залишається необхідність розвитку й удосконалення методів аналізу стійкості та стабілізації для нелінійних диференціальних систем.

Мета роботи – побудова умов стійкості нульового розв'язку сімей псевдолінійних керованих систем за еталонною системою, які б забезпечували розміщення фазових координат всередині еліпсоїда.

Означення і допоміжні факти. Наведемо деякі означення й факти з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі. Опуклу замкнену множину K дійсного нормованого простору E називають конусом, якщо $\alpha\mathrm{K} + \beta\mathrm{K} \subset \mathrm{K}$ для будь-яких $\alpha, \beta \geq 0$ і $\mathrm{K} \cap -\mathrm{K} = \{0\}$. Спряжений конус K^* формують лінійні функціонали $\varphi \in \mathrm{E}^*$, що приймають невід'ємні значення на елементах K, причому $\mathrm{K} = \{X \in \mathrm{E} : \varphi(X) \geq 0, \forall \varphi \in \mathrm{K}^*\}$. Простір з конусом є напівупорядкованим: $X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \in \mathrm{K}$. Конус K з непорожньою множиною внутрішніх точок – тілесний. Конус K називають нормальним, якщо із $0 \leq X \leq Y$ випливає $\|X\| \leq \nu \|Y\|$, де ν – універсальна константа. Якщо $\mathrm{E} = \mathrm{K} - \mathrm{K}$, то конус K є відтворюючим.

Нехай у банаховому просторі $\mathrm{E}_1(\mathrm{E}_2)$ виділено конус $\mathrm{K}_1(\mathrm{K}_2)$. Оператор $M : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ називають монотонним, якщо із $X \geq Y$ випливає $MX \geq MY$. Монотонність лінійного оператора рівносильна його позитивності: $X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0$.

Динамічна система, стан якої $X(t) = \Omega(t, t_0)X_0$ у кожен момент часу $t > t_0$ визначає позитивний (монотонний) оператор $\Omega(t, t_0) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, є позитивною (монотонною) відносно деякого конуса. Система має інваріантну множину $\mathrm{K}_t \subset \mathrm{X}$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ із $X_0 \in \mathrm{K}_0$ випливає $X(t) \in \mathrm{K}_t$ при $t \geq t_0$. Якщо K_t – конус, то ним породжені нерівності між елементами простору в кожен момент часу t позначимо символами $\overset{\mathrm{K}_t}{\leq}$ або $\overset{\mathrm{K}_t}{\geq}$.

Належність диференціальної системи

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathrm{E}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

вказаним класам можна встановити за допомогою елементів спряженого конуса. Зокрема, система (1) є позитивною і монотонною відносно тілесного конуса K_t, якщо $t < \tau \ \Rightarrow \ \mathrm{K}_t \subseteq \mathrm{K}_\tau$ і виконуються відповідні умови [3]

$$X \overset{\mathrm{K}_t}{\geq} 0,\ \varphi \in \mathrm{K}_t^*,\ \varphi(X) = 0 \ \Rightarrow \ \varphi(F(X,t)) \geq 0, \tag{2}$$

$$X \overset{\mathrm{K}_t}{\leq} Y,\ \varphi \in \mathrm{K}_t^*,\ \varphi(X-Y) = 0 \ \Rightarrow \ \varphi(F(Y,t) - F(X,t)) \geq 0, \tag{3}$$

де K_t^* – спряжений конус, $t \geq 0$.

Ізольований стан рівноваги $X \equiv 0$ динамічної системи називаємо стійким в K_t, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із $X_0 \in S_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in S_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де $S_\varepsilon(t) = \{X \in \mathrm{K}_t : \|X\| \leq \varepsilon\}$. Якщо при цьому для певного $\delta_0 > 0$ із $X_0 \in S_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то стан $X \equiv 0$ системи є асимптотично стійким у K_t. Якщо стан $X \equiv 0$ системи з інваріантним конусом K_t стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він стійкий (асимптотично стійкий) у K_t.

Сформулюємо основні твердження принципу порівняння. Для цього розглянемо систему

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathrm{X}, \ t \geq 0, \tag{4}$$

де f – оператор, який забезпечує єдиний розв'язок $x(t)$. У просторі E з нормальним відтворюючим конусом K побудуємо системи виду (1), які будуть системами порівняння для системи (4).

Нехай $V(x,t)$ – оператор, який неперервно відображає окіл S_0 точки $x = 0 \in \mathrm{X}$ при $t > t_0$ у простір E. Якщо вираз $V(x,t)$ разом з його узагальненою похідною в силу системи (4) задовольняє співвідношення

$$D_t V(x,t)|_{(4)} \overset{\mathrm{K}}{\leq} F(V(x,t),t) \tag{5}$$

і належить класу квазімонотонних операторів $F \in \Phi$, що визначається умовою (3) з конусом $\mathrm{K}_t = \mathrm{K}$, то виконується наступна властивість розв'язків системи:

$$0 \overset{\mathrm{K}}{\leq} V(x(t_0),t_0) \overset{\mathrm{K}}{\leq} X(t_0) \ \Rightarrow \ 0 \overset{\mathrm{K}}{\leq} V(x(t),t) \overset{\mathrm{K}}{\leq} X(t). \tag{6}$$

Це означає, що система (1) є системою порівняння для системи (4).

Оцінки (6) можна використати для порівняння динамічних властивостей систем (4) і (1).

Припустимо, що оператор порівняння V має додаткові властивості

$$V(0,t) \equiv 0,\ \|V(X,t)\| \geq v(X) > 0,\ X \neq 0, t \geq 0, \tag{7}$$

де $v(x) \geq 0$ – неперервна функція така, що $v(0) = 0$ і $v(X) \leq v(Y) \Rightarrow \|X\| \leq \|Y\|$. Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 1. [8] *Нехай усюди позитивний оператор* V *задовольняє співвідношення (5), (7), причому,* $F \in \Phi$, $F(0,t) \equiv f(0,t) \equiv 0$. *Тоді розв'язок* $x \equiv 0$ *системи (4) стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стійкий (асимптотично стійкий) у* K *розв'язок* $X \equiv 0$ *системи (1).*

Синтез керування для сім'ї псевдолінійних систем. Розглянемо псевдолінійну систему керування

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u, \tag{8}$$

$$u = Kx, \; x \in S_0, \; t \geq 0, \tag{9}$$

де $x \in R^n$ і $u \in R^m$ – вектори відповідно стану і керування, $A, \; B$ – матриці відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, які неперервно залежать від x і t, S_0 – деякий окіл точки $x = 0$. Для простоти залежність даних матриць від x і t будемо упускати.

Ставиться задача знайти невідому матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку $K \in R^{m \times n}$, яка б забезпечувала розміщення фазових координат системи (8), (9) всередині заданої множини, наприклад, еліпсоїда E_x. Даний еліпсоїд можна описати у вигляді

$$E_x = \left\{ x : x^T Q_e^{-1} x \leq 1 \right\}, \tag{10}$$

де Q_e – симетрична додатно визначена матриця розміру $n \times n$.

Із $x = 0$ випливає, що $u = 0$ і $x \equiv 0$ є положенням рівноваги системи, яке ми дослідимо на стійкість. Замкнена система є псевдолінійною і має вигляд

$$\dot{x} = (A + BK)x. \tag{11}$$

Розглянемо метод синтезу керування на основі еліпсоїдальних оцінок множини розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою матричних систем порівняння

$$\dot{Q} = F(Q,t), \tag{12}$$

де F – квазімонотонна матрична функція, Q – симетрична додатно визначена матриця. Для задавання бажаної області в просторі станів E_x пропонується визначати матрицю Q_e через еліпсоїдальні оцінки множини значень динамічної системи з допомогою матричних систем порівняння. Для цього достатньо задати еталонну систему

$$\dot{x} = A_e x, \; x \in R^n, \; t \geq 0, \tag{13}$$

де A_e – задана стала матриця.

Таким чином, задача синтезу зводиться до побудови керування (9), яке б забезпечувало еліпсоїдальну оцінку системи (11), близьку до еліпсоїдальної оцінки системи (13).

Для системи (13) розглянемо квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T Q_e^{-1} x, \; Q_e \geq 0$. Тоді

$$\dot{v}(x) = \dot{x}^T Q_e^{-1} x + x^T Q_e^{-1} \dot{x} = x^T (A_e^T Q_e^{-1} + Q_e^{-1} A_e) x.$$

Щоб траєкторія $x(t)$ системи (13) не виходила за межі еліпсоїда (10), будемо вимагати виконання нерівності $\dot{v}(x) \leq 0$ при $v(x) \geq 1$, тобто щоб

$$x^T(A_e^T Q_e^{-1} + Q_e^{-1} A_e)x \le 0 \quad \forall(x): x^T Q_e^{-1} x \ge 1. \tag{14}$$

Як показано в [4], за допомогою S-процедури, нерівності (14) еквівалентні матричній нерівності

$$A_e^T Q_e^{-1} + Q_e^{-1} A_e + \alpha_e Q_e^{-1} \le 0$$

при деякому $\alpha_e > 0$. Помноживши цю нерівність зліва та справа на Q_e, отримаємо

$$A_e Q_e + Q_e A_e^T + \alpha_e Q_e \le 0. \tag{15}$$

Таким чином, умова інваріантності еліпсоїда (10) з матрицею $Q_e > 0$ еквівалентна виконанню лінійної матричної нерівності (15) при деякому $\alpha_e > 0$. Пошук інваріантного "найменшого" еліпсоїда потрібно проводити при найменшому α_e. Більше того, нерівність (15) можна замінити на рівність і серед інваріантних еліпсоїдів можна вибрати еліпсоїд з мінімальним слідом $tr(Q_e)$.

Якщо взяти матричну функцію $V(x) = xx^T \ge 0$, тоді згідно із (5) отримаємо матричну систему порівняння для еталонної системи (13) [6]:

$$\dot{Q}_e = A_e Q_e + Q_e A_e^T + \alpha_e Q_e. \tag{16}$$

Права частина рівняння (16) задовольняє умову квазімонотонності (3) відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць. Нерівність (15) при $Q_e > 0$ забезпечує асимптотичну стійкість матричній системі порівняння (16) (теорема 8 [9]). Тоді згідно з теоремою 1 із асимптотичної стійкості системи (16) випливає асимптотична стійкість системи (13).

Аналогічно виводиться для системи (11) матрична система порівняння

$$\dot{Q} = (A + BK)Q + Q(A + BK)^T + \alpha Q. \tag{17}$$

Права частина рівняння (17) при фіксованому x задовольняє умову квазімонотонності (3) відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць [9].

Якщо матричні системи порівняння для системи (11) і системи (13) будуть рівними, то й оцінки множини значень, отримані як розв'язки відповідних систем порівняння, будуть рівними. Тому пошук закону керування будемо здійснювати при умові, що права частина рівняння (17) не більше правої частини рівняння (16):

$$(A + BK)Q + Q(A + BK)^T + \alpha Q \le A_e Q_e + Q_e A_e^T + \alpha_e Q_e.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$BKQ + Q(BK)^T \le A_e Q_e + Q_e A_e^T - AQ - QA^T + \alpha_e Q_e - \alpha Q. \tag{18}$$

Нерівність (18) можна задовольнити шляхом вибору параметрів K, Q, Q_e лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$B^{\perp T} Y B^{\perp} \ge 0, \tag{19}$$

$$B^T YB - ZKQB - B^T QK^T Z \ge 0,\;\; B^T YB^{\perp} - ZKQB^{\perp} \ge 0, \qquad (20)$$

де $Z = B^T B,\; Y = A_e Q_e + Q_e A_e^T - AQ - QA^T + \alpha_e Q_e - \alpha Q$, $B^{\perp}$ – ортогональне доповнення матриці B, тобто матриця розмірності $n \times (n-l)$, що задовольняє умови

$$B^T B^{\perp} = 0,\; \det R \ne 0, \quad R = \left[B, B^{\perp}\right].$$

Дійсно, помноживши нерівність (18) зліва і справа відповідно на R^T і R, отримаємо еквівалентну нерівність у блочному вигляді

$$\begin{bmatrix} ZKQB + B^T QK^T Z & ZKQB^{\perp} \\ B^{\perp T} QK^T Z & 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} B^T YB & B^T YB^{\perp} \\ B^{\perp T} YB & B^{\perp T} YB^{\perp} \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Отже, матрицю K керування (9) можна знайти із системи матричних нерівностей (20) при умові, що існують симетричні додатно визначені матриці Q, Q_e, які задовольняють матричну нерівність (19).

Виходячи з наведених міркувань, можна навести алгоритм побудови керування:

1) знайти матрицю $Q_e > 0$, яка задовольняє нерівність (15) при умові мінімуму сліду матриці Q_e: $\min tr(Q_e)$;
2) обчислити матрицю ортогонального доповнення $B^{\perp}$;
3) знайти матрицю $Q > 0$ як розв'язок нерівності (19) при умові бажаної близькості оцінок еталонної системи і системи з керуванням $\|Q - Q_e\| \le \gamma$, де $\|\cdot\|$ – норма Фробеніуса, γ – деяке мале число;
4) знайти матрицю K керування (9) із системи нерівностей (20) при умові близькості матриць A_e і $A + BK$: $\min\|A + BK - A_e\|$.

В [6] наведено алгоритм 1)-4) побудови керування для диференціальної системи (8), (9) зі сталими матричними коефіцієнтами A, B.

Величина γ показує близькість оцінки системи (8), (9) до оцінки системи (13). При $\gamma = 0$ можна шукати керування, яке дозволить отримати оцінку системи з керуванням, що дорівнює оцінці еталонної системи.

Виходячи з неперервності вихідних матриць системи (8), (9) від x і t випливає, що для забезпечення належності фазових координат середині еліпсоїда достатньо виконання матричних нерівностей (19), (20) при $x = 0$. Тому мають місце такі нерівності:

$$B_0^{\perp T} Y_0 B_0^{\perp} \ge 0, \quad B_0^T Y_0 B_0 - Z_0 KQB_0 - B_0^T QK^T Z_0 \ge 0, \quad B_0^T Y_0 B_0^{\perp} - Z_0 KQB_0^{\perp} \ge 0, \quad (22)$$

де $A_0 = A(0,t), \quad B_0 = B(0,t), \quad Z_0 = B_0^T B_0, \quad Y_0 = A_e Q_e + Q_e A_e^T - A_0 Q - QA_0^T + \alpha_e Q_e - \alpha Q$, $B_0^{\perp}$ – ортогональне доповнення матриці B_0.

Синтез керування для подвійного переверненого маятника. Розглянемо псевдолінійну стаціонарну модель керування подвійного переверненого маятника на візку (рис.1)

$$R(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = Hu, \qquad (23)$$

де

$$\theta=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix},\quad R(\theta)=\begin{bmatrix} d_1 & d_2\cos(\theta_1) & d_3\cos(\theta_2)\\ d_2\cos(\theta_1) & d_4 & d_5\cos(\theta_1-\theta_2)\\ d_3\cos(\theta_2) & -d_5\cos(\theta_1-\theta_2) & d_6\end{bmatrix},$$

$$N(\theta,\dot{\theta})=\begin{bmatrix} 0 & -d_2\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -d_3\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2\\ 0 & 0 & -d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2\\ 0 & -d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 & 0\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$G(\theta)=\begin{bmatrix}0\\ -f_1\sin\theta_1\\ -f_2\sin\theta_2\end{bmatrix}=G_1(\theta)\theta,\quad G_1(\theta)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -f_1\dfrac{\sin(\theta_1)}{\theta_1} & 0\\ 0 & 0 & -f_2\dfrac{\sin(\theta_2)}{\theta_2}\end{bmatrix},$$

$$d_1=m_0+m_1+m_2,\quad d_2=\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)L_1,\quad d_3=\frac{1}{2}m_2L_2,\quad d_4=\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right)L_1^2,$$

$$d_5=\frac{1}{2}m_2L_1L_2,\quad d_6=\frac{1}{3}m_2L_2^2,\quad f_1=\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)L_1g,\quad f_2=\frac{1}{2}m_2L_2g,$$

m_0, m_1, m_2 – відповідно маси візка, першої і другої ланок маятника; L_1 і L_2 – довжини першої і другої ланок маятника; θ_0 – відхилення візка; θ_1 і θ_2 – кути відхилення ланок маятника від вертикальної осі; I_1 і I_2 – моменти інерції ланок маятника; g – прискорення вільного падіння; u – керуюча сила [10].

Покладемо $m_0=1{,}5$ кг, $m_1=0{,}5$ кг, $m_2=0{,}75$ кг, $L_1=0{,}5$ м, $L_2=0{,}75$ м.

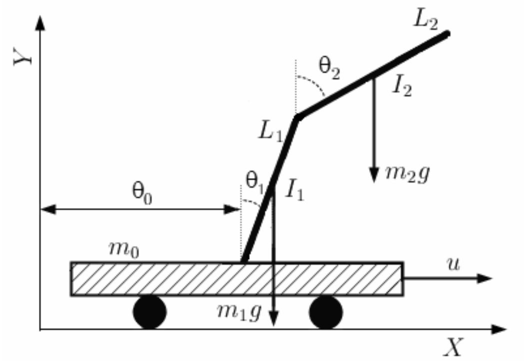


Рисунок 1. Подвійний перевернений маятник на візку

Figure 1. Double inverted pendulum on a cart

Перепишемо систему (23) у вигляді

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \tag{24}$$

де

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \qquad A(x) = \begin{bmatrix} O_{3,3} & I_3 \\ -R^{-1}G_1 & -R^{-1}N \end{bmatrix}, \qquad B(x) = \begin{bmatrix} O_{3,1} \\ R^{-1}H \end{bmatrix}.$$

Нульове положення рівноваги $x = 0$ системи без керування ($u = 0$) є нестійким. Використовуючи наведений вище алгоритм з нерівностями (22), побудуємо матрицю зворотного зв'язку K керування (9), яка б забезпечила стійкість системи та розміщення значень фазових координат у середині бажаної області.

Еталонну систему задамо у формі Коші (13) матрицею

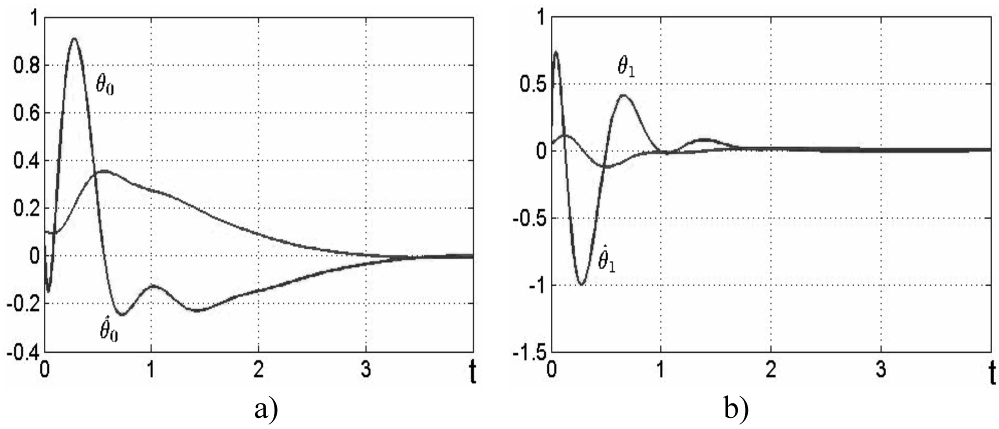
$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13{,}4972 & 96{,}7 & -167{,}4317 & -13{,}896 & -0{,}771 & -18{,}0641 \\ 77{,}8915 & -420{,}579 & 885{,}3818 & 80{,}1933 & 4{,}4494 & 104{,}247 \\ -12{,}2355 & -37{,}1078 & -35{,}9052 & -12{,}5971 & -0{,}6989 & -16{,}3755 \end{bmatrix}.$$

Після реалізації алгоритму в математичній системі MATLAB із використанням набору інструментів CVX при $\alpha = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}8327$ отримаємо матрицю коефіцієнтів зворотного зв’язку у вигляді

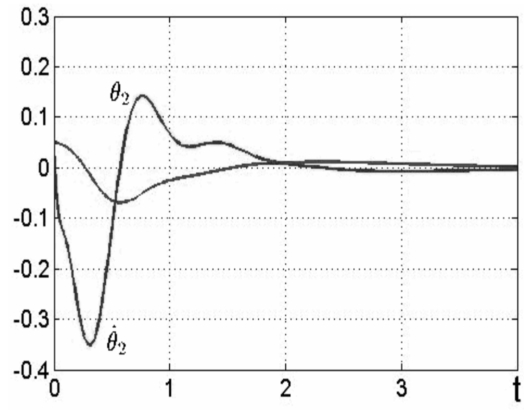
$$K = [-30{,}4525 \quad 294{,}6626 \quad -555{,}5912 \quad -42{,}0072 \quad -7{,}1751 \quad -97{,}2109].$$

При цьому замкнена система стійка.

На рис.2 показано поведінку розв’язків системи (24) з керуванням $u = Kx$ і вектором початкових умов $x_0 = [0{,}1; 0{,}05; 0{,}05; 0{,}1; 0{,}05; 0{,}05]^T$.



a) b)



c)

Рисунок 2. Графіки перехідних процесів для замкненої системи при $0 \le t \le 4$:
a) – для функцій $\theta_0(t)$ і $\dot{\theta}_0(t)$; b) – для функцій $\theta_1(t)$ і $\dot{\theta}_1(t)$; c) – для функцій $\theta_2(t)$ і $\dot{\theta}_2(t)$

Figure 2. Graphs of transition processes for the closed system a $0 \le t \le 4$:
a) – for functions $\theta_0(t)$ and $\dot{\theta}_0(t)$; b) – for functions $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$; c) – for functions $\theta_2(t)$ and $\dot{\theta}_2(t)$

На рис.3 зображено проекцію оцінок фазових координат системи (24) з керуванням $u = Kx$, наприклад, на площину ($\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$). На цьому ж рисунку зображено траєкторію $\theta(t)$ при деякому виборі початкового положення в середині цього еліпсоїда.

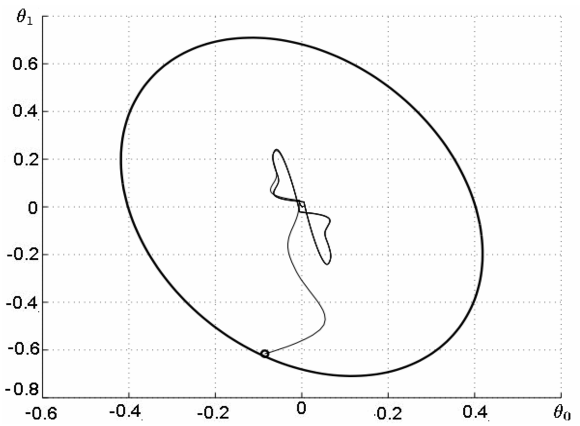


Рисунок 3. Проекція оцінок на фазову площину ($\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$)

Figure 3. Estimations projection on the phase plane ($\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$)

Висновки. Зроблено крок у напрямку розроблення методів синтезу керування для сімей псевдолінійних керованих систем. Для таких систем запропоновано алгоритм синтезу керування, який ґрунтується на розв'язуванні двох оптимізаційних задач при обмеженнях у вигляді лінійних матричних нерівностей. Отриманий результат можна використати при розв'язуванні задач робастного керування, наприклад, для лінійних неавтономних систем з невизначеними параметрами або зовнішніми збуреннями.

Conclusions. In the paper certain advance is achieved in the development of methods of control synthesis for families of pseudolinear controlled systems. There has been suggested the algorithm of control construction for such systems, which is based on a solution of two optimising problems at restrictions in the form of linear matrix inequalities. The obtained result can be used for problem solving of robust control, for example, for linear non-autonomous systems with indefinite parametres or exterior perturbations.

Список використаної літератури

1. Матросов, В.М. Метод сравнения в математической теории систем [Текст] / В.М. Матросов, Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев. – Новосибирскю.: Наука, 1980. – 480 с.
2. Лакшмикантам, В. Устойчивость движения: метод сравнения [Текст] / В. Лакшмикантам, С. Лила, А.С. Мартынюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 248 с.
3. Mazko, A.G. Matrix Equations, Spectral Problems and Stability of Dynamic Systems (An international book series Stability, Oscillations and Optimization of Systems). Vol. 2. [Text] / A.G. Mazko. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2008. – 270 p.
4. Назин, С.А. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов [Текст] / С.А. Назин, Б.П. Поляк, М.В. Топунов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С.106–125.
5. Поляк, Б.Т. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений [Текст] / Б.Т. Поляк, М.В. Топунов, П.С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2007. – Вып.3. – С.51–84.
6. Евстифеев, А.Е. Синтез робастного управления по эталонной модели с помощью матричных систем сравнения [Текст] / А.Е. Евстифеев, А.И. Маликов // Сборник научных статей. Актуальные проблемы механики сплошной среды. – 2011. – Т.1,2. – С.95–109.
7. Маликов, А.И. Эллипсоидальное оценивание решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения [Текст] / А.И. Маликов // Изв. ВУЗов. Математика. – 2002. – Т.483. – № 8. – С.30–42.
8. Алілуйко, А.М. Інваріантні множини та порівняння динамічних систем [Текст] / А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10. – № 2. – С.163–176.
9. Маликов, А.И. Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотоннности [Текст] / А.И. Маликов // Изв. ВУЗов. Математика. – 2000. – Т.459. – № 8. – С.35–45.
10. Bogdanov, A. Optimal control of a double inverted pendulum on a cart [Text] / A. Bogdanov // OGI School Sci. Eng., OHSU. – 2004.

Отримано 16.01.2015