

Бойко С. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях / С. Бойко, О. Величко // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 77. — № 1. — С. 257-266. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 536.21

С. Бойко; О. Величко, канд. фіз.-мат. наук

Таврійський державний агротехнологічний університет

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОЛІВ У ШАРУВАТИХ КОНСТРУКЦІЯХ

Резюме. Запропоновано метод розрахунку двовимірних стаціонарних, періодичних по просторовій координаті, теплових полів у багатошарових плитах. На верхній і нижній межах плити температура описується парними періодичними функціями з однаковими періодами. На спільних межах шарів виконується умова неперервності температурного поля і рівність теплових потоків. Шукані температури в кожному із шарів записано у вигляді тригонометричних рядів по косинусах. Для забезпечення виконання умов на спільних межах шарів пропонується модифікація методу матриць податливості. Сформульовано алгоритм розв'язання задачі та показано, що спосіб дає точний розв'язок задачі для будь-якої скінченної кількості шарів. Наведено приклади результатів числових досліджень для різних граничних умов. Проведено порівняльний аналіз і зроблено висновки.

Ключові слова: багатошарові плити, гармонійне рівняння, рекурентні співвідношення, послідовності податливості, ряд Фур'є, закон Фур'є.

S. Boyko, H. Velichko

ANALYTICAL METHOD FOR DETERMINING THE STATIONARY THERMAL FIELDS IN LAYERED STRUCTURES

Summary. The method of two-dimensional thermal stationary fields' calculation in multilayer plates is proposed. Thermal fields are considered periodical along spatial value. The temperature of the upper and lower limits is described by pair periodic functions with similar periods. Continuity condition of thermal field and thermal flow equality is realized within layer limits. Found temperatures of the layers are expressed in trigonometric series cosines. There are two free constants of differential equations solution about amplitude to every layer and harmonic. The method of compliance matrices is proposed for realizing conditions within layer limits. Two auxiliary sequences are introduced for every layer. These sequences are connected with temperature and thermal flow on the upper layer limit. They realize thermal field distribution within layer. The author proved that the elements of one of these sequences are expressed by the elements of another sequence in this layer, and appropriate coefficient of Fourier series of the lower plate limit. Recurrence relations are built for the coefficients of these dependences. These dependences allow calculating the coefficients in accordance with geometrical and physical properties of the plate's layers, beginning with the lower one. Algorithm of task solution is stated. The author stresses that if the functions describing the upper and lower plate's limits spread out into the complete Fourier series, then the proposed method provides accurate task solution for any complete quantity of layers.

The main advantage of this method is that its labor coefficient rises slowly with layer growth. The results of numerical experiments show the influence of geometrical and physical parameters on the heat distribution in a two-layer plate. Just shows graphs constructed for different conditions at the external borders of the plate. Influence of heat conductivity factor changing in the middle layer of three-dimensional plate on heat distribution within plate is analyzed. Three-dimensional temperature graphs are built. The conclusion has been drawn.

Key words: multilayer plates, harmonic equation, recurrence relations, compliance sequence, Fourier's law.

Постановка проблеми. Складовими елементами багатьох інженерних споруд є багатошарові плити, пластини, основи, оболонки. Це пов'язано з тим, що за рахунок шаруватості матеріалів можна досягти зменшення ваги, поліпшення звукоізоляційних, теплоізоляційних властивостей при зменшенні їх вартості. При розробленні відповідних споруд необхідно вміти розраховувати результати дій різних фізичних

полів на багатошарові конструкції. Особливий інтерес становить розробка аналітичних методів, оскільки в цьому випадку можна гарантувати необхідну точність обчислень і досліджувати вплив фізичних і механічних характеристик конструкцій на їх поведінку. Однак такі розв'язки можна отримати лише у виняткових випадках. Одним із важливих видів фізичних полів є теплове поле. Таким чином, задача аналітичного опису теплового поля в багатошаровій плиті з плоскопаралельними шарами актуальна.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Докладніший аналіз побудови та застосування моделі, яка описує теплопровідність багатошарових конструкцій, наведено у роботі [1]. Розв'язанню деяких задач термопружності присвячено чимало фундаментальних досліджень, як, наприклад, [2–4]. Відомі різні способи отримання точних і наближених аналітичних рішень. Метод однорідних рішень використовується в роботах [5,6]. Метод функцій Гріна, з використанням апарату узагальнених функцій, використовується в роботі [7]. Метод жорсткісних функцій до подібних задач застосовувався в [8]. Наближені методи аналізу термопружних багатошарових плівок обговорюються в [9].

В даній роботі використовується ідея методу матриць податливості, введена в роботі [10]. Метод матриць податливості є модифікація методу функцій податливості, який для задач термопружності розглянуто в роботах [11–13]. Запропоновано підхід, де невідомі функції розкладаються в ряди Фур'є, а для знаходження невідомих коефіцієнтів використовуються рекурентні співвідношення та метод функцій податливості, який використовується в задачах теорії пружності.

Постановка задачі. Розглянемо багатошарову плиту, на верхній і нижній межах якої задана температура, причому теплове поле в плиті стаціонарне. Будемо розглядати двовимірну задачу, тобто вважаємо, що вздовж одного з напрямків температурне поле не змінюється. Кількість шарів дорівнює n . На верхній межі верхнього і нижній межі нижнього шарів температура описується парними періодичними функціями. На загальній межі шарів виконується умова неперервності температурного поля і рівність теплових потоків (закон Фур'є). Кожен шар характеризується товщиною h_i і коефіцієнтом теплопровідності α_i . Ставиться задача про визначення функцій, якими характеризуються зміни температурного поля в кожному шарі.

У кожному шарі вводимо локальну декартову систему координат з початком на верхній межі відповідного шару так, щоб усі осі Ox_i лежали на одній прямій і були спрямовані вглиб шару. Перейдемо до безрозмірних величин таким чином, щоб період функції, що описує температуру на верхній межі, дорівнював $2b$. Задача зводиться до розв'язання гармонійного рівняння для кожної з функцій $T_i(x, z)$, яка описує температуру в i -ому шарі:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови задаються для верхньої межі верхнього шару і для нижньої межі нижнього шару

$$T_1(x, 0) = f(x), \quad T_n(x, h_n) = g(x). \quad (2)$$

Функції $f(x)$, $g(x)$ за умовою є періодичними з періодом $2b$ і парними, тому

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \cos \lambda_k x, \quad g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \cos \lambda_k x, \quad (3)$$

де

$$f_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(s) \cos \lambda_k s ds, \quad g_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(s) \cos \lambda_k s ds, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b}. \quad (4)$$

На загальній межі шарів виконуються умови спряження

$$T_i(x, h_i) = T_{i+1}(x, 0), \quad (5)$$

$$\alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, h_i) = \alpha_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}(x, 0). \quad (6)$$

Метод розв'язування. Шукані функції $T_i(x, z)$ також будуть задовольняти умовам $T_i(x + 2b, z) = T_i(x, z)$. Тому їх можна розкласти в тригонометричні ряди

$$T_i(x, z) = \frac{a_{i0}(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(z) \cos \frac{\pi k x}{b}. \quad (7)$$

Для визначення коефіцієнтів Фур'є підставимо (7) в (1). Після того, як розділимо гармоніки, будемо мати систему диференціальних рівнянь:

$$a''_{i0} = 0, \quad a''_{ik} - \lambda_k^2 a_{ik} = 0, \quad k \in N.$$

Її розв'язок має вигляд

$$a_{i0} = r_{i0} + r_{i1}z, \quad a_{ik} = l_{ik} \cosh(\lambda_k z) + \tilde{l}_{ik} \sinh(\lambda_k z). \quad (8)$$

Таким чином, температура в i -му шарі описується виразом

$$T_i(x, z) = \frac{r_{i0} + r_{i1}z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (l_{ik} \cosh(\lambda_k z) + \tilde{l}_{ik} \sinh(\lambda_k z)) \cos(\lambda_k x). \quad (9)$$

Введемо поняття допоміжних послідовностей $\{\eta_{ik}\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{\varepsilon_{ik}\}_{k=0}^{\infty}$ i -го шару, які пов'язані з температурою та потоком на верхній межі шару,

$$T_i(x, 0) = \frac{\eta_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{ik} \cos(\lambda_k x), \quad \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, 0) = \frac{\varepsilon_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \varepsilon_{ik} \cos(\lambda_k x). \quad (10)$$

Порівнявши (9) та (10), робимо висновок, що

$$r_{i0} = \eta_{i0}, \quad r_{i1} = \varepsilon_{i0}, \quad l_{ik} = \eta_{ik}, \quad \tilde{l}_{ik} \lambda_k = k \varepsilon_{ik}.$$

Таким чином, ми з'ясували, що температура в i -му шарі однозначно виражається через допоміжні послідовності цього шару за формулами

$$T_i(x, z) = \frac{\eta_{i0} + \varepsilon_{i0}z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\eta_{ik} \cosh(\lambda_k z) + \varepsilon_{ik} \frac{b}{\pi} \sinh(\lambda_k z) \right) \cos(\lambda_k x), \quad (11)$$

і для розв'язання задачі нам достатньо знайти допоміжні послідовності кожного з шарів. Зауважимо, що безпосередньо з межових умов ми можемо відразу знайти одну з допоміжних послідовностей першого шару

$$\eta_{1k} = f_k, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (12)$$

Записавши обидві частини умов (2) та (3) через представлення (11), отримаємо

$$\frac{\eta_{i+1,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{i+1,k} \cos(\lambda_k x) = \frac{\eta_{i0} + \varepsilon_{i0}h_i}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\eta_{ik} C_{ik} + \varepsilon_{ik} \frac{b}{\pi} S_{ik} \right) \cos(\lambda_k x).$$

$$\alpha_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \varepsilon_{i+1,k} \cos(\lambda_k x) \right) = \alpha_i \left(\frac{\varepsilon_{i,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\eta_{ik} S_{ik} + \varepsilon_{ik} \frac{b}{\pi} C_{ik} \right) \cos(\lambda_k x) \right).$$

Тут $C_{ik} = \cosh(h_i \lambda_k)$, $S_{ik} = \sinh(h_i \lambda_k)$.

Звідси можемо записати рекурентні співвідношення для допоміжних послідовностей сусідніх шарів.

$$\eta_{i+1,0} = \eta_{i0} + \varepsilon_{i0}h_i, \quad \eta_{i+1,k} = \eta_{ik} C_{ik} + \varepsilon_{ik} \frac{b}{\pi} S_{ik}, \quad (13)$$

$$\alpha_{i+1} \varepsilon_{i+1,0} = \alpha_i \varepsilon_{i,0}, \quad \alpha_{i+1} k \varepsilon_{i+1,k} = \alpha_i \lambda_k \left(\eta_{ik} S_{ik} + \varepsilon_{ik} \frac{b}{\pi} C_{ik} \right). \quad (14)$$

Оскільки потік на верхній межі i -го шару однозначно визначається температурами на цій межі й на нижній межі пакета, то введемо константи R_{ik} та L_{ik} , які є аналогами функцій податливості для задач теорії пружності багат шарових основ [10]. Ці константи пов'язані з допоміжними послідовностями співвідношеннями

$$\varepsilon_{ik} = R_{ik} \eta_{ik} + L_{ik} g_k, \quad (15)$$

де $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, \infty}$.

Отримаємо рекурентні формули для обчислення констант. Для цього запишемо співвідношення (15) для шару з номером $i+1$

$$\varepsilon_{i+1,k} = R_{i+1,k} \eta_{i+1,k} + L_{i+1,k} g_k. \quad (16)$$

Для $k > 0$ обчислимо константу $\varepsilon_{i+1,k}$ двома способами з використанням формул (13)–(16). З одного боку,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1,k} &= R_{i+1,k}\eta_{i+1,k} + L_{i+1,k}g_k = R_{i+1,k}\left(\eta_{ik}C_{ik} + \varepsilon_{ik}\frac{b}{\pi}S_{ik}\right) + L_{i+1,k}g_k = \\
&= R_{i+1,k}\left(\eta_{ik}C_{ik} + (R_{ik}\eta_{ik} + L_{ik}g_k)\frac{b}{\pi}S_{ik}\right) + L_{i+1,k}g_k = \\
&= \left(R_{i+1,k}C_{ik} + R_{i+1,k}R_{ik}\frac{b}{\pi}S_{ik}\right)\eta_{ik} + \left(R_{i+1,k}L_{ik}\frac{b}{\pi}S_{ik} + L_{i+1,k}\right)g_k.
\end{aligned}$$

З іншого, –

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{i+1}}{\lambda_k\alpha_i}k\varepsilon_{i+1,k} &= \eta_{ik}S_{ik} + \varepsilon_{ik}\frac{b}{\pi}C_{ik} = \eta_{ik}S_{ik} + (R_{ik}\eta_{ik} + L_{ik}g_k)\frac{b}{\pi}C_{ik} = \\
&= \left(S_{ik} + R_{ik}\frac{b}{\pi}C_{ik}\right)\eta_{ik} + L_{ik}\frac{b}{\pi}C_{ik}g_k.
\end{aligned}$$

Оскільки результати обчислень величин $\varepsilon_{i+1,k}$ за цими двома формулами повинні співпадати при будь-яких значеннях η_{ik} та g_k , то маємо тотожності

$$R_{i+1,k}C_{ik} + R_{i+1,k}R_{ik}\frac{b}{\pi}S_{ik} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\left(\frac{\pi}{b}S_{ik} + R_{ik}C_{ik}\right), \quad R_{i+1,k}L_{ik}\frac{b}{\pi}S_{ik} + L_{i+1,k} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}L_{ik}C_{ik}.$$

Звідси отримаємо рекурентні співвідношення

$$R_{ik} = \frac{R_{i+1,k}C_{ik} - \frac{\pi}{b}\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}S_{ik}}{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}C_{ik} - R_{i+1,k}\frac{b}{\pi}S_{ik}}, \quad L_{ik} = \frac{L_{i+1,k}}{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}C_{ik} - \frac{b}{\pi}R_{i+1,k}S_{ik}}. \quad (17)$$

Для початку розрахунку нам потрібно знати R_{nk} та L_{nk} . Для цього в другу з формул (13) підставимо $i = n$ і врахуємо, що $\eta_{n+1,k} = g_k$.

$$g_k = \eta_{nk}C_{nk} + \varepsilon_{nk}\frac{b}{\pi}S_{nk}.$$

Перепишемо це співвідношення у вигляді

$$\varepsilon_{nk} = -\frac{\pi}{b}\frac{C_{nk}}{S_{nk}}\eta_{nk} + \frac{\pi}{bS_{nk}}g_k \quad (18)$$

і порівняємо з виразом (15). Робимо висновок, що

$$R_{nk} = -\frac{\pi}{b}\coth(h_n\lambda_k), \quad L_{nk} = \frac{\pi}{bS_{nk}}. \quad (19)$$

Перейдемо до нульової гармоніки, тобто до випадку $k = 0$. Аналогічні міркування доводять, що мають місце рекурентні співвідношення

$$R_{i,0} = \frac{R_{i+1,0}}{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} - h_i R_{i+1,0}}, \quad L_{i,0} = \frac{L_{i+1,0}}{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} - h_i R_{i+1,0}}, \quad (20)$$

обчислення яких починається з констант

$$R_{n,0} = -\frac{1}{h_n}, \quad L_{n,0} = \frac{1}{h_n}. \quad (21)$$

Тепер сформулюємо алгоритм обчислення стаціонарного теплового поля в k -му шарі n -шарової плити:

1. Знаходимо константи R_{nk} та L_{nk} за формулами (19) та (21).
2. Послідовно знаходимо константи R_{ik} та L_{ik} за формулами (17) та (20) для $i = n-1, i = n-2, \dots, i = 1$.
3. Із межових умов обчислюємо елементи послідовностей $\{f_k\}$ та $\{g_k\}$ за формулами (4).
4. За формулами (12) визначаємо елементи допоміжної послідовності першого шару.
5. За формулами (15) при $i = 1$ обчислюємо елементи другої допоміжної послідовності першого шару.
6. За формулами (13) та (14) послідовно знаходимо допоміжні послідовності шарів від другого шару до шару з номером k .
7. За формулами (11) отримуємо вираз для теплового поля в k -му шарі.

Якщо межові умови на верхній та нижній межах плити описуються скінченими тригонометричними поліномами, то запропонований алгоритм дає точний розв'язок.

Чисельний приклад. Наведемо розв'язки задачі про розподіл тепла в тришаровій плиті, шари якої мають однакові товщини, що дорівнюють $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

На верхній межі плити температура задана функцією $(x^2 - 1)^2, |x| \leq 1$, яка періодично продовжена на всю межу з періодом $2b = 2$. На нижній межі температура описується формулою $\cos(2\pi x)$, а також є періодичною з періодом 2. При чисельних розрахунках утримувалася нульова, перша та друга гармоніки.

Оскільки, як випливає з теоретичних міркувань, істотними є тільки відношення коефіцієнтів теплопровідності сусідніх шарів, а не їх абсолютне значення, то будемо всі коефіцієнти відносити до деякого фіксованого коефіцієнта теплопровідності α .

На рис.1, 3 та 5 зображено розподіл температур у плиті в рамках одного періоду в системі координат, пов'язаній з першим шаром. На рис.2, 4 та 6 зображено двовимірні графіки температури на межах шарів у рамках одного періоду. Позначення i відноситься до верхньої межі i -го шару, а позначення 4 – до нижньої межі нижнього шару.

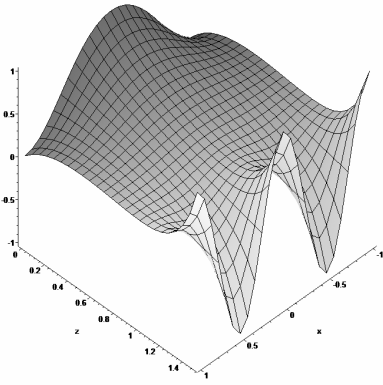


Рисунок 1. Розподіл температур у плиті, пов'язаній з першим шаром для значень $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

Figure 1. Distribution of temperatures in the plate connected with the first layer to the values $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

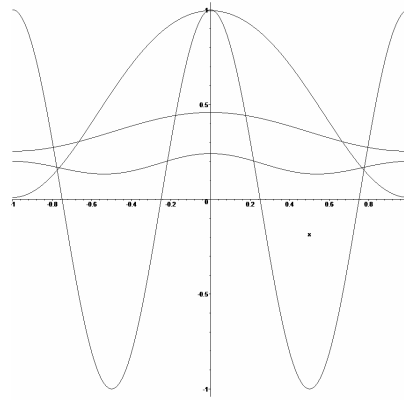


Рисунок 2. Двовимірний графік температури на межах трьох шарів для значень $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

Figure 2. The two-dimensional graph of temperature on the borders of three layers for $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

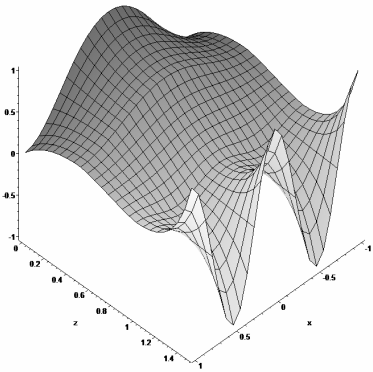


Рисунок 3. Розподіл температур в плиті, пов'язаною с першим шаром для значень $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0,1\alpha, \alpha_3 = \alpha$

Figure 3. Distribution of temperature in the plate connected with the first layer to the values $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0,1\alpha, \alpha_3 = \alpha$

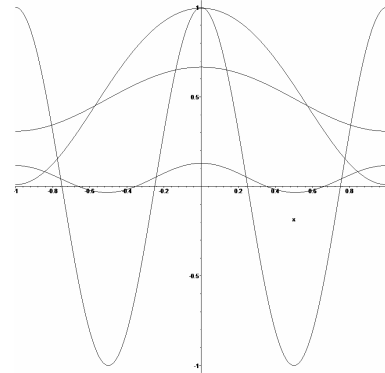


Рисунок 4. Двовимірний графік температури на межах трьох шарів для значень $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0,1\alpha, \alpha_3 = \alpha$

Figure 4. The two-dimensional graph of temperature on the borders of three layers for $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0,1\alpha, \alpha_3 = \alpha$

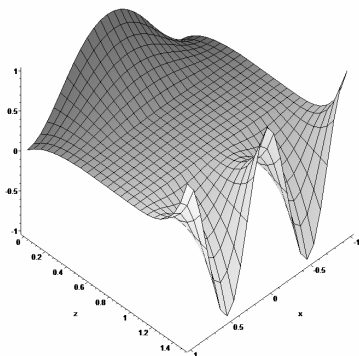


Рисунок 5. Розподіл температур в плиті, пов'язаною с першим шаром для значень $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 10\alpha, \alpha_3 = \alpha$

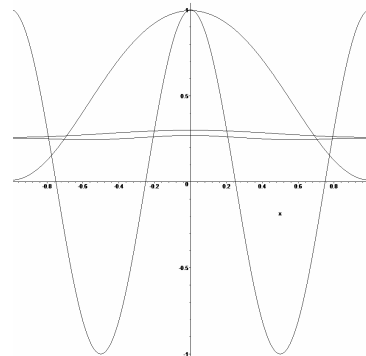


Рисунок 6. Двовимірний графік температури на межах трьох шарів для $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 10\alpha, \alpha_3 = \alpha$

Figure 6. The two-dimensional graph of temperature

Figure 5. Distribution of temperatures in the plate connected with the first layer to the values $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 10\alpha$, $\alpha_3 = \alpha$

on the borders of three layers for $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 10\alpha$, $\alpha_3 = \alpha$

На рис.1 та 2 наведено результати для значень $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, тобто для однорідної плити. На рис.3 та 4 – для значень $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0.1\alpha$, $\alpha_3 = \alpha$. На рис.5 та 6 наведено результати для значень $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 10\alpha$, $\alpha_3 = \alpha$.

Як бачимо, збільшення коефіцієнта теплопровідності середнього шару при незмінних коефіцієнтах крайніх шарів призводить до зменшення різниці температур між відповідними точками нижньої та верхньої межі цього шару.

На рис.7 та 8 наведено результати чисельного моделювання стаціонарного розподілу в тришаровій плиті, яка складається з трьох шарів однакової товщини $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. На верхній та нижній межах плити температура задана функціями $(x^2 - 1)^2$, та $-(x^2 - 1)^2$, $|x| \leq 1$, які періодично продовжені на всю межу з періодом $2b = 2$. Коефіцієнти теплопровідності $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 4\alpha$.

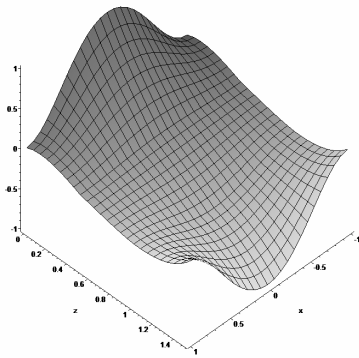


Рисунок 7. Розподіл температур в плиті, пов'язаною с першим шаром для значень $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 4\alpha$

Figure 7. Distribution of temperature in the plate connected with the first layer to the values $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 4\alpha$

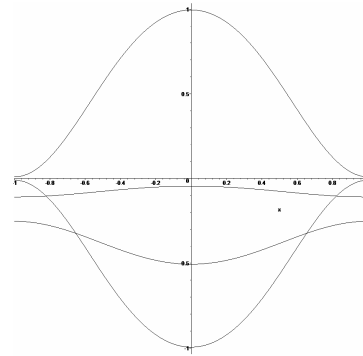


Рисунок 8. Двовимірний графік температури на межах трьох шарів для $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 4\alpha$

Figure 8. The two-dimensional graph of temperature on the borders of three layers for $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 4\alpha$

Як впливає з цих графіків, розподіл температур не є симетричним відносно серединної площини, хоча межові умови симетричні. В другому й третьому шарах температура від'ємна, тобто ближча до температури на нижній межі. Це пояснюється тим, що два нижні шари є кращими провідниками тепла, ніж перший шар.

Висновки. Запропоновано спосіб точного розв'язання задачі про двовимірний розподіл температур у багатошаровій основі з плоскопаралельними межами шарів. Вважається, що функції, які описують температуру на верхній та нижній межах, є парними та періодичними з однаковим періодом. Основною перевагою цього методу є така особливість, що його трудомісткість повільно зростає зі зростанням кількості шарів.

Conclusions. The method of task solution about two-dimensional heat distribution within multilayer plate is proposed. Supposed that the functions describing the temperature of the upper and lower limits are dual and periodical with similar periods. The main advantage of this method is that its labor coefficient rises slowly with layer growth.

Список використаної літератури

1. Ухин, Д.В. Математическая модель расчета температуры многослойной конструкции дорожной одежды в условиях перемены температур [Текст] / Д.В. Ухин // Вестник ВолгАСУ. Сер: Стр-во и архит. 2010 – Вып. 17(36). – С.66–69.
2. Подстригач, Я.С. Теплоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно // М.: Наука, 1984. – 368 с.
3. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости [Текст] / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
4. Кудинов, В.А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций [Текст] / В.А. Кадинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников // М.: Высшая школа. – 2005. – 430 с.
5. Алтухов, Е.В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин [Текст] / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. мех. – 2003. – №37. – С.8–13.
6. Алтухов, Е.В. Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транспортных термоупругих пластинах [Текст] / Е.В. Алтухов, В.П. Шевченко // Доп. НАН України. – 2007. – №4. – С.49–53.
7. Процюк, Б.В. Метод функций Грина в осесимметричных задачах пружности та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл [Текст] / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, №1. – С.94–101.
8. Горынин, Г.Л. Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках [Текст] / Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2012. – 55, №2. – С.144–155.
9. Neng-Hus Zhang. Thermoelastic stresses in multilayered beams [Text] / Neng-Hus Zhang // Thin Solid Films. – 2007. – 515 – P.8402–8406.
10. Величко, О.В. Плоска деформація пружної багатошарової плити під дією періодичної системи навантажень [Текст] / О.В. Величко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2004. – №6. – Вип. 8 т.1. – С.162–170.
11. Величко, І.Г. Просторова термопружна деформація багатошарової основи [Текст] / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип.8. – Т.1., №6. – С.154–161.
12. Величко, І.Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи [Текст] / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип.8. – Т.2., №6/2. – С.36–43.
13. Ткаченко, І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи [Текст] / І.Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки та математики. – 2005. – Вип.3. – С.70–78.

Отримано 15.12.2014