

Назарчук З. Математичне моделювання взаємодії  $H$ -поляризованої електромагнітної хвилі з системою тонких проникливих включень / З. Назарчук, Я. Кулинич, Т. Стаднік // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 77. — № 1. — С. 229-239. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 537.8.029.6

З. Назарчук<sup>1</sup>, академік НАН України;  
Я. Кулинич<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; Т. Стаднік<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

<sup>2</sup>Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ $H$ -ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ПРОНИКЛИВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

**Резюме.** Запропоновано математичну модель взаємодії електромагнітного поля  $H$  – поляризованої плоскої хвилі з системою тонких діелектричних циліндричних включень у вигляді системи інтегродиференціальних сингулярних інтегральних рівнянь, визначених на середній лінії поперечного перетину розсіювачів. З використанням квадратурних формул інтерполяційного типу за вузлами, що співпадають з коренями полінома Чебишева, числову реалізацію математичної моделі зведено до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Наведено результати числового дослідження поперечника розсіяння двох включень.

**Ключові слова:** сингулярне інтегральне рівняння, поліном Чебишева, тонке проникливе включення, поперечник розсіяння,  $H$  – поляризована електромагнітна хвиля.

Z. Nazarchuk, Ya. Kulynych, T. Stadnik

## MATHEMATICAL MODELING OF INTERACTION OF $H$ -POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVE WITH A SYSTEM OF THIN PENETRABLE INCLUSIONS

**Summary.** Using the method of integral equations the mathematical model of interwork between the electromagnetic field of  $H$ -polarized plane wave and the system of thin dielectric or little conducting cylindrical embedding has been built. For its building the system of two-dimensional integral equations defined on the basis transverse section diffusers was taken. The direct implementation of the available methods for their numerous solving faces numerical difficulties caused by the little thickness of diffuser and are connected with calculus of singular and quasisingular two-dimensional integrals. Taking into consideration the fact that inside the diffuser the field changes its thickness unsufficeintly the mathematical model of interwork between the electromagnetic field of  $H$ -polarized plane wave with the system of thin dielectric cylindrical inclusions in the form of the system of integrodifferential singular integral equations defined on the centre line of the diffusers transverse section has been proposed. They were obtained by averaging of the system of integral equations defined the diffusers transverse section area. Using the quadrature formula of interpolatory type by the crosspoints which coincide with the Chebyshev polynomial, roots the numerical realization of mathematical model is redused to the solving of the system of linear algebraic equations. To test the proposed mathematical model the case of whole and cross-cut plate and half-ring shape has been proposed. The research of the influence of the distance between the two parts of infusions and the direction of plane wave propagation on the field in the far-field zone was conducted. The built mathematical model allows conducting research of the field scattered characteristics scattered by the arbitrarily-spaced cylindrical open coverings, the maximum thickness of which is considerably less than the length, the latter being considerably bigger or the same as the length of the explorative electromagnetic wave.

**Key words:** Singular integral equation, Chebishev polinomial, thin penetrating inclusions, diameter of dispersion,  $H$  – polarized electromagnetic wave.

**Постановка проблеми.** До теоретичного дослідження взаємодії електромагнітних хвиль із системою довгих тонких проникливих включень зводиться ряд прикладних задач інтегральної оптики, геофізики, неруйнівного контролю

цілісності конструкцій і т.п., де з терміном «довге тонке проникливе включення» пов'язують циліндричну діелектричну або слабо провідну оболонку, максимальна товщина якої значно менша за її довжину. При цьому остання значно більша або співмірна з довжиною зондуєчої електромагнітної хвилі.

Попри існуючі дослідження практично не вивченими залишаються залежності характеристик поля, розсіяного довільно розташованими тонкими проникливими включеннями за зміни параметрів задачі: довжини хвилі, відстаней між включеннями та інше, аналіз яких необхідний для синтезу нових технічних пристроїв.

Це зумовлено тим, що теорія, яка адекватно описує взаємодію електромагнітних хвиль з тонкими включеннями, на сьогодні далека від завершення. У переважній більшості досліджень розглядається задача розсіяння хвиль на одному тонкому включенні. Це зумовлює актуальність подальшого розвитку та узагальнення відомих математичних моделей, що описують взаємодію електромагнітної хвилі з системою тонких включень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Одним зі шляхів побудови математичної моделі взаємодії електромагнітної хвилі з системою тонких проникливих включень є узагальнення відомих моделей, побудованих для одного включення на випадок кількох. Тому як перший крок для вибору математичної моделі, яку будемо узагальнювати на випадок системи включень, дамо короткий виклад методів розв'язання задачі розсіяння електромагнітних хвиль на одиничному тонкому циліндричному включенні.

Відомо, що задача розсіювання електромагнітного поля розв'язана аналітично тільки для включення кругової або еліптичної форми [4], а для включення з довільним поперечним перерізом побудовані тільки наближені розв'язки. Поміж великої кількості різноманітних підходів до наближеного розв'язання таких задач, метод інтегральних рівнянь  $\epsilon$ , очевидно, одним із найбільш універсальних, математично строго обґрунтованим та зручним для побудови наближених математичних моделей взаємодії хвиль із включенням.

Найчастіше для розв'язання отриманих інтегральних рівнянь застосовують метод граничних елементів із використанням різного виду сіток. Безпосереднє застосування цього методу до інтегральних рівнянь для тонкого розсіювача наштовхується на числові труднощі, які зв'язані з обчисленням сингулярних та майже сингулярних двовимірних інтегралів, які виникають у процесі дискретизації інтегральних рівнянь [5,24] і зумовлені малою товщиною розсіювача. Тому для моделювання процесу розсіяння на такому включенні переходять до наближених одновимірних інтегральних рівнянь. У цьому випадку задача обчислення сингулярних та майже сингулярних двовимірних інтегралів зведеться до побудови спеціальних квадратурних формул одновимірних інтегралів вказаних типів.

Такий перехід здійснюють, як правило, двома шляхами. У першому випадку для побудови наближених одновимірних інтегральних рівнянь включення моделюють безмежно тонкою поверхнею, на якій задано спеціальні граничні умови. Частота зондуєчого поля, геометричні розміри включення, електромагнітні властивості (діелектрична та магнітна проникність, провідність) як оточуючого середовища, так і розсіювача визначають узагальнені параметри, що входять у відповідні граничні умови.

На даний час запропоновано кілька типів згаданих граничних умов. Відповідний огляд можна знайти у [1,10–13,15,18,19,25,26]. У працях [9,14,16,17,20,21,27–29] ці граничні умови та відповідні інтегральні рівняння використано для аналізу різних електродинамічних структур. Показано, що побудовані інтегральні рівняння дають ефективний наближений розв'язок задачі розсіяння на тонкому включенні за таких умов: 1) довжина хвилі всередині включення повинна бути

значно меншою, ніж довжина хвилі в оточуючому середовищі; 2) товщина включення постійна величина. Виключення складає робота [10], де зроблена спроба узагальнення запропонованих у [18] граничних умов на випадок розсіювача зі змінною товщиною. Наведені вимоги призводять, фактично, до деякого обмеження фізичних параметрів розсіювачів, за яких можна використовувати описаний підхід. Перевага побудованих моделей – їх універсальність відносно поляризації падаючої плоскої хвилі.

Другий шлях зведення задачі розсіювання поля на тонкому включенні до наближених одновимірних інтегральних рівнянь використовує той факт, що електромагнітне поле всередині розсіювача несуттєво змінюється за його товщиною. Вперше, можливо, цей підхід був застосований до розв'язування досліджуваної задачі у працях [22,23]. Для чисельного розв'язання отриманих інтегральних рівнянь застосовано спеціальний алгоритм обчислення квазісингулярних інтегралів. Інший перехід до наближених одновимірних інтегральних рівнянь, визначених на середній лінії поперечного перерізу, ґрунтується на усередненні строгих інтегральних рівнянь, визначених на площі поперечного перетину розсіювача. Вперше ця процедура була здійснена у [8] і в подальшому розвинена у [6] для дослідження розсіяння плоскої хвилі довільної поляризації тонким включенням.

На сьогодні опубліковано низку наукових праць, у яких вище описані методи дослідження розсіяного поля одиничним включенням узагальнені на кілька включень. Використовуючи теорему додавання для циліндричних хвильових функцій, задачу розсіяння на двох циліндрах кругової або еліптичної форми у праці [3] зведено до розв'язування нескінченної системи лінійних рівнянь. Проведено дослідження їх числового розв'язання, зокрема для тонких циліндрів. Автори праці [2] методом допоміжних джерел побудували числовий алгоритм розв'язання задачі дифракції електромагнітної хвилі на двох тонких паралельних діелектричних кругових циліндрах скінченної довжини в резонансній частотній області. Розроблений алгоритм використаний для чисельних розрахунків перерізів розсіювання розглянутої структури.

У праці [7] для дослідження взаємодії  $E$ -поляризованої електромагнітної хвилі з тонкими включеннями довільної форми використано систему одновимірних інтегральних рівнянь, отриману усередненням відповідної системи двовимірних інтегральних рівнянь по поперечному перерізу включень. Показано, що вона дозволяє ефективно досліджувати електромагнітне поле, розсіяне на включеннях зі змінною товщиною, зокрема, коли довжина хвиль всередині включення суттєво більша, ніж довжина хвиль в оточуючому середовищі, і тому є привабливішою для теоретичних потреб прикладних досліджень. Зауважимо, що випадок  $H$ -поляризованої електромагнітної хвилі у цій роботі не розглядається.

**Мета роботи.** Побудувати математичну модель для дослідження розсіяного електромагнітного поля, створеного  $H$ -поляризованою хвилею, що падає на систему тонких діелектричних циліндричних включень шляхом узагальнення відповідної математичної моделі для одиничного включення, отриманої усередненням відповідної системи двовимірних інтегральних рівнянь по поперечному перерізу включень.

**Постановка задачі.** Нехай в однорідному ізотропному середовищі розташовано  $N$  циліндричних включень, твірні яких паралельні між собою. Необхідно побудувати розв'язок задачі розсіювання на такій структурі плоскої електромагнітної  $H$ -поляризованої (єдина відмінна від нуля магнітна складова є співвісною з направляючими циліндричних включень, а вектор електричного поля лежить у площині,

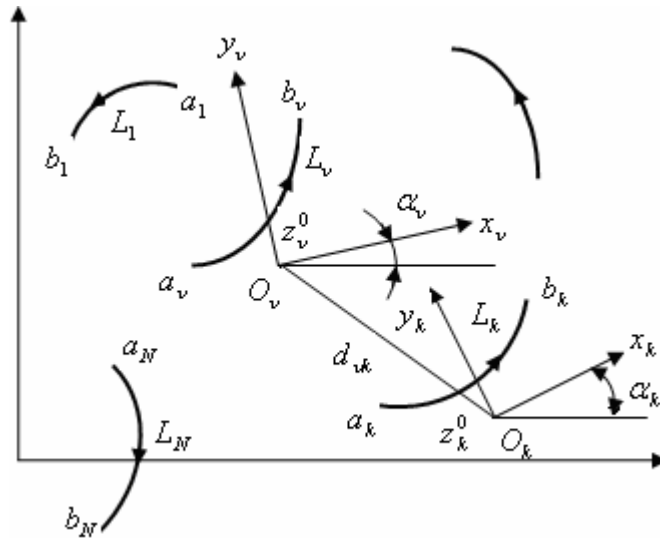


Рисунок 1. Геометрична схема задачі

Figure 1. Geometrical scheme of the problem

перпендикулярній направляючим) монохроматичної (часова залежність  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega$  – кругова частота) хвилі. Введемо у розгляд базисну систему координат  $Oxzy$ , вісь  $Oz$  якої направимо паралельно твірним включень. Так як зондуєче поле та геометрія розсіювачів не залежать від поздовжньої координати  $z$ , то цією властивістю володіє і розсіяне поле. Тоді електродинамічна задача розсіювання зведена до знаходження двох декартових компонент вектора електричного поля, що залежать тільки від координат  $x, y$  [8]. Будемо вважати, що матеріали включень та оточуючого середовища є немагнітними (тобто їх магнітні проникності співпадають з магнітною сталою вакууму  $\mu_0$ ), а їх діелектричні проникності  $\epsilon_k$  та електропровідності  $\sigma_k$  – постійні величини,  $k = 1, N$ ; середні лінії  $L_k$  областей, утворених перетином включень площиною  $xOy$  – прості розімкнені дуги Ляпунова, віднесені до локальних систем декартових координат  $x_k O_k y_k$  (рис.1).

Позначимо товщину включень через  $2h_k$ ; електричні компоненти сумарного та первинного (без включень) поля –  $E_{x,y}$  та  $E_{x,y}^*$ ;  $\chi_k = \omega(\mu_0(\epsilon_k + i\sigma_k / \omega))^{1/2}$  та  $\chi = \omega(\mu_0(\epsilon + i\sigma / \omega))^{1/2}$  – хвильові числа включень та оточуючого середовища;  $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$  – комплексні координати точки  $O_k$  у базисній системі  $xOy$ ;  $\alpha_k$  – кут між осями  $O_k x_k$  та  $Ox$ ;  $t_k$  – комплексна координата точки на контурі  $L_k$  у відповідній локальній системі координат, причому  $t_k = t_k(s)$ , де  $s$  – дугова абсциса (натуральний параметр) контуру  $L_k$ ;  $a_k$  і  $b_k$  – координати початку і кінця дуги  $L_k$  у системі координат  $x_k O_k y_k$ .

**Основні рівняння задачі.** Шляхом аналогічних викладок, які наведені у праці [6], отримаємо систему  $2N$  інтегродиференціальних рівнянь з ядром Коші другого роду, яка наближено описує взаємодію  $H$ -поляризованої плоскої хвилі з системою тонких циліндричних включень

$$\left\{ \begin{aligned}
 E_x^*(t_l^0) &= \beta_l^-(t_l^0) E_x(t_l^0) + \delta_l(t_l^0) E_y(t_l^0) + A_1^l(t_l^0) - \gamma_l \left[ i \int_{L_l} \frac{(E_x(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds - \right. \\
 &- i \int_{L_l} \frac{(E_x(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds - \int_{L_l} \frac{(E_y(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds - \int_{L_l} \frac{(E_y(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds \left. \right] - \\
 &- \frac{i}{4} \sum_{k \neq l}^N \left\{ \alpha_k \int_{L_k} (E_x(t_k) D_{kl}^+(t_k, t_l^0) - E_y(t_k) M_{kl}(t_k, t_l^0)) ds \right\} - \\
 &- \frac{i}{4} \alpha_l \int_{L_l} [E_x(t_l) b_l^+(t_l, t_l^0) - E_y(t_l) m_l(t_l, t_l^0)] ds, \\
 E_y^*(t_l^0) &= \delta_l(t_l^0) E_x(t_l^0) + \beta_l^+(t_l^0) E_y(t_l^0) + A_2^l(t_l^0) + \gamma_l \left[ \int_{L_l} \frac{(E_x(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds + \right. \\
 &+ \int_{L_l} \frac{(E_x(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds + i \int_{L_l} \frac{(E_y(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds - i \int_{L_l} \frac{(E_y(t_l) e^{-i\psi_l})'_s}{t_l - t_l^0} ds \left. \right] - \\
 &- \frac{i}{4} \sum_{k \neq l}^N \left\{ \alpha_k \int_{L_k} (-E_x(t_k) M_{kl}(t_k, t_l^0) + E_y(t_k) D_{kl}^-(t_k, t_l^0)) ds \right\} - \\
 &- \frac{i}{4} \alpha_l \int_{L_l} [-E_x(t_l) m_l(t_l, t_l^0) + E_y(t_l) b_l^-(t_l, t_l^0)] ds.
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Тут

$$D_{kl}^\pm(t_k, t_l^0) = H_0^{(1)}(\chi r_k) \pm \operatorname{Re} W_k^l(t_k, t_l^0) H_2(\chi r_k) \pm \frac{4}{\pi i \chi^2} \operatorname{Re} Q_k^l(t_k, t_l^0),$$

$$M_{kl}(t_k, t_l^0) = \operatorname{Im} W_k^l(t_k, t_l^0) H_2(\chi r_k) + \frac{4}{\pi i \chi^2} \operatorname{Im} Q_k^l(t_k, t_l^0),$$

$$b_l^\pm(t_l, t_l^0) = H_0^{(1)}(\chi r_l) \pm \operatorname{Re} w_l(t_l, t_l^0) H_2(\chi r_l), \quad m_l(t_l, t_l^0) = \operatorname{Im} w_l(t_l, t_l^0) H_2(\chi r_l),$$

$$A_1^l(t_l^0) = -\frac{h_l}{\pi} \left[ E_x(t_l) \operatorname{Im} c(t_l, t_l^0) + E_y(t_l) \operatorname{Re} c(t_l, t_l^0) \right] \Big|_{t_l^0}^{t_l=b_l},$$

$$A_2^l(t_l^0) = -\frac{h_l}{\pi} \left[ E_y(t_l) \operatorname{Im} c(t_l, t_l^0) + E_x(t_l) \operatorname{Re} c(t_l, t_l^0) \right] \Big|_{t_l^0}^{t_l=b_l},$$

$$\alpha_l = h_l (\chi_l^2 - \chi^2), \quad \gamma_l = \frac{h_l}{\pi} T_2^l, \quad \beta_l^\pm(t_l^0) = T_1^l \mp T_2^l \cos(2\psi_l^0), \quad \delta_l(t_l^0) = T_2^l \sin(2\psi_l^0),$$

$$c(t_l, t_l^0) = \frac{e^{-i\psi_l}}{t_l - t_l^0}, \quad W_k^l(t_k, t_l^0) = \frac{\bar{T}_k - \bar{T}_l^0}{T_k - T_l^0}, \quad w_l(t_l, t_l^0) = \frac{\bar{t}_l - \bar{t}_l^0}{t_l - t_l^0}, \quad Q_k^l(t_k, t_l^0) = \frac{1}{(T_k - T_l^0)^2 - h_k^2 e^{2i\psi_k}},$$

$$T_l^0 = t_l^0 \exp(i\alpha_l) + z_l^0, \quad T_k = t_k \exp(i\alpha_k) + z_k^0, \quad T_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_l^2}{\chi^2} \pm 1 \right), \quad e^{i\psi} = it'_s, \quad r_k = |t_k - t_k^0|, \quad t_l \equiv t_l(s),$$

$$t_l^0 \equiv t_l(s_0), \quad \psi_l \equiv \psi_l(s), \quad \psi_l^0 \equiv \psi_l(s_0), \quad H_2(z) = H_2^{(1)}(z) - \frac{4}{i\pi z^2}, \quad H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z) - \text{функції}$$

Ганкеля,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$  позначено, відповідно, дійсну і уявну частини числа  $z$ .

Для побудови алгоритму чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь

(1), запишемо їх у нормалізованому вигляді. Позначимо через  $t_k = t_k(\tau)$ ,  $(-1 \leq \tau \leq 1)$  параметричне рівняння контуру  $L_k$  у локальній системі координат  $x_k O_k y_k$  та введемо нові функції  $\varphi_{1,k}(\tau) = E_x[t_k(\tau)]|t'_k(\tau)|$  і  $\varphi_{2,k}(\tau) = E_y[t_k(\tau)]|t'_k(\tau)|$ . Так як

$$(E_{x,y}(s_l)e^{-i\psi_l})'_{s_k} ds_k = -i \left( E_{x,y}[t_k(\tau)] \frac{|t'_l|}{t'_l} \right)'_{\tau} d\tau,$$

то (1) зведемо до системи інтегродиференціальних сингулярних інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta_l^- \varphi_{1,l}(\tau_0) + \delta_l \varphi_{2,l}(\tau_0) - 2\gamma_l \left[ \rho_1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_{1,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} - \theta_1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{1,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} - \rho_2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_{2,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} + \right. \\ & \left. + \theta_2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{2,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} \right] - \frac{i}{4} \sum_{k \neq l}^N \left\{ \alpha_k \int_{-1}^1 [\varphi_{1,k}(\tau) D_{kl}^+(\tau, \tau_0) - \varphi_{2,k}(\tau) M_{kl}(\tau, \tau_0)] d\tau \right\} - \\ & - \frac{\alpha_l}{2\pi} \left\{ - \int_{-1}^1 \varphi_{1,l}(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau + \int_{-1}^1 [\varphi_{1,l}(\tau) K_1^l(\tau, \tau_0) - \varphi_{2,l}(\tau) K_2^l(\tau, \tau_0)] d\tau \right\} = E_x^{*l}(\tau_0), \\ & \delta_l \varphi_{1,l}(\tau_0) + \beta_l^+ \varphi_{2,l}(\tau_0) - 2\gamma_l \left[ -\rho_2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_{1,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} + \theta_2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{1,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} - \rho_1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_{2,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} + \right. \\ & \left. + \theta_1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{2,l}(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} \right] + \frac{i}{4} \sum_{k \neq l}^N \left\{ \alpha_k \int_{-1}^1 [\varphi_{1,k}(\tau) M_{kl}(\tau, \tau_0) - \varphi_{2,k}(\tau) D_{kl}^-(\tau, \tau_0)] d\tau \right\} - \\ & - \frac{\alpha_l}{2\pi} \left\{ - \int_{-1}^1 \varphi_{2,l}(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau + \int_{-1}^1 [-\varphi_{1,l}(\tau) K_2^l(\tau, \tau_0) + \varphi_{2,l}(\tau) K_3^l(\tau, \tau_0)] d\tau \right\} = E_y^{*l}(\tau_0), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де  $\rho_1 = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(t'_{0,l})^2} \right]$ ,  $\rho_2 = \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(t'_{0,l})^2} \right]$ ,  $\theta_1 = \operatorname{Re} \left[ \frac{t''_{0,l}}{(t'_{0,l})^3} \right]$ ,  $\theta_2 = \operatorname{Im} \left[ \frac{t''_{0,l}}{(t'_{0,l})^3} \right]$ ,

$t_{0,k} = t_k(\tau_0)$ ,  $M_{kl}(\tau, \tau_0) \equiv M_{kl}(t_l(\tau), t_l(\tau_0))$ ,  $B_{kl}^{\pm}(\tau, \tau_0) \equiv B_{kl}^{\pm}(t_l(\tau), t_l(\tau_0))$ ,  $t'_{0,k} = t'_k(\tau_0)$ ,  $t''_{0,k} = t''_k(\tau_0)$ ,  $t'''_{0,k} = t'''_k(\tau_0)$ ,  $E_{x,y}^{*l}(\tau) = E_{x,y}^*[t_l(\tau)]$ .

Регулярні ядра за умови  $\tau \neq \tau_0$  описують формули

$$K_{1,3}^l(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\chi r_l) + \ln|\tau - \tau_0| \pm \frac{\pi i}{2} H_2^{(1)}(\chi r_l) \operatorname{Re} w_l(\tau, \tau_0) \pm \frac{2u_l(\tau, \tau_0)}{\chi^2},$$

$$K_2^l(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{2} H_2^{(1)}(\chi r_l) \operatorname{Im} w_l(\tau, \tau_0) + \frac{2u_l(\tau, \tau_0)}{\chi^2},$$

де  $u_l(\tau, \tau_0) = \operatorname{Re} \left( \frac{t'''_{0,l}}{(t'_{0,l})^3 (\tau - \tau_0)} - \frac{1}{(t'_{0,l})^2 (\tau - \tau_0)^2} \right)$ ,  $w_l(\tau, \tau_0) \equiv w_l(t_l(\tau), t_l(\tau_0))$ .

У випадку  $\tau = \tau_0$  вони набувають вигляду

$$K_{1,3}^l(\tau, \tau) = \frac{\pi i}{2} - C - \ln\left(\frac{\chi}{2}|t'_l|\right) \pm \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{t}'_l}{t'_l}\right) \pm \frac{1}{\chi^2} \operatorname{Re} e_l(\tau), \quad K_{2,2}^l(\tau, \tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{t}'_l}{t'_l}\right) + \frac{1}{\chi^2} \operatorname{Im} e_l(\tau),$$

де  $e_l(\tau) = \frac{9t_l''^2 - 4t_l' t_l'''}{6t_l'^4}$ ,  $t'_l = t'_l(\tau)$ ,  $t''_l = t''_l(\tau)$ ,  $t'''_l = t'''_l(\tau)$ ,  $C$  – стала Ейлера.

Як і у випадку одного включення [3], приймаємо, що в околі кінцевих точок інтервалу інтегрування  $\varphi_{1,k}(\tau), \varphi_{2,k}(\tau) \sim \sqrt{1-\tau^2}$ . Це дає підставу подати шукані функції у вигляді

$$\varphi_{1,k}(\tau) = \sqrt{1-\tau^2} \varphi_{1,k}^*(\tau), \quad \varphi_{2,k}(\tau) = \sqrt{1-\tau^2} \varphi_{2,k}^*(\tau).$$

Далі, для побудови дискретного аналога системи інтегральних рівнянь (2) методом механічних квадратур невідомі функції  $\varphi_{1,k}^*(\tau), \varphi_{2,k}^*(\tau)$  наближаємо інтерполяційним поліномом Лагранжа за вузлами, що співпадають з коренями полінома Чебишева другого роду степені  $U_n(\tau)$ :

$$\tau_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Після підстановки цих виразів у (2), застосування відповідних квадратурних формул [8] систему інтегральних рівнянь та елементарних перетворень зведемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень  $\phi_{1,k}^l = \varphi_{1,l}(\tau_k), \phi_{2,k}^l = \varphi_{2,l}(\tau_k)$ :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \left( \phi_{1k}^p R_{1k}^{pq} + \phi_{2k}^p R_{2k}^{pq} \right) + \sum_{l \neq p}^N \sum_{k=1}^n \left( \phi_{1k}^l B_{1kq}^{lp} + \phi_{2k}^l B_{2kq}^{lp} \right) = E_{xqp}^*, \\ \sum_{k=1}^n \left( \phi_{1k}^p R_{2k}^{pq} + \phi_{2k}^p R_{3k}^{pq} \right) + \sum_{l \neq p}^N \sum_{k=1}^n \left( \phi_{1k}^l B_{2kq}^{lp} + \phi_{2k}^l B_{3kq}^{lp} \right) = E_{yqp}^*, \end{cases} \quad (3)$$

де  $q = \overline{1, n}; p = \overline{1, N}$ .

Тут

$$\begin{aligned} R_{1k,3k}^{pq} &= \pm G_p \left[ \rho_{1pq} S_{3kq} - \theta_{1pq} S_{2kq} \mp S_{1kq} \mp \sin v_k K_{1,3}^p(\tau_k, \tau_q) \right], \quad (k \neq q), \\ R_{2k}^{pq} &= G_p \left[ \sin v_k K_2^p(\tau_k, \tau_q) - \rho_{2pq} S_{3kq} + \theta_{2pq} S_{2kq} \right], \quad (k \neq q), \\ R_{1q,3q}^{pq} &= \frac{T_1^p}{|t'_{pq}|} \pm T_2^p \cos(2\psi_l^q) \pm G_p \left[ (n+1)^2 \rho_{1pq} \mp S_{1qq} \mp \sin v_q K_{1,3}^p(\tau_q, \tau_q) \right], \\ R_{2q}^{pq} &= T_2^p \sin(2\psi_l^q) + G_p \left[ -(n+1)^2 \rho_{2pq} + \sin v_q K_2^p(\tau_q, \tau_q) \right], \\ B_{1kq,3kq}^{lp} &= -G_l \sin v_k D_{lp}^\pm(t_l(\tau_k), t_p(\tau_q)), \quad B_{2kq}^{lp} = -G_l \sin v_k M_{lp}(t_l(\tau_k), t_p(\tau_q)), \\ S_{1kq} &= \sin v_k \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \cos 2v_q \right) + \sum_{m=2}^n \sin(mv_k) \left( \frac{\cos(m-1)v_q}{m-1} - \frac{\cos(m+1)v_q}{m+1} \right), \end{aligned}$$

$$S_{2kq} = \frac{1}{\sin v_q} \left( \operatorname{ctg} \frac{v_k + v_q}{2} - (-1)^{k-q} \operatorname{ctg} \frac{v_k + (-1)^{k-q} v_q}{2} \right),$$

$$S_{3kq} = \operatorname{ctg}^2 \frac{v_k + v_q}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{v_k + (-1)^{k-q} v_q}{2},$$

$$\rho_{1pq} = \frac{1}{\chi^2 \sin v_q} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(t'_{pq})^2} \right),$$

$$\rho_{2pq} = \frac{1}{\chi^2 \sin v_q} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{(t'_{pq})^2} \right), \theta_{2pq} = \frac{1}{\chi^2} \operatorname{Im} \left( \frac{t''_{pq}}{(t'_{pq})^3} \right), \theta_{1pq} = \frac{1}{\chi^2} \operatorname{Re} \left( \frac{t''_{pq}}{(t'_{pq})^3} \right), G_l = h_l \frac{\chi_l^2 - \chi^2}{2(n+1)};$$

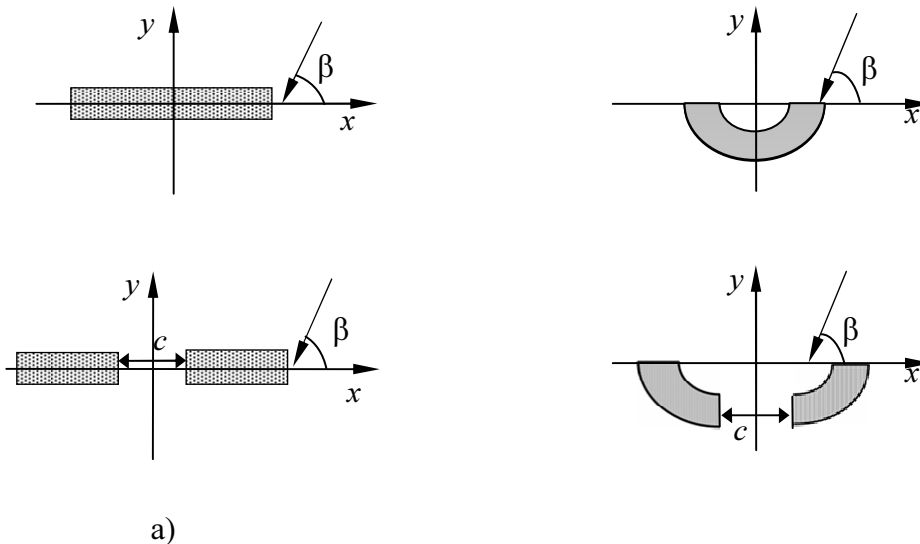
$$v_k = \frac{k\pi}{n+1}, t_{pq} = t_p(\tau_q), E_{x,yqp}^* = E_{x,y}^* [t_p(\tau_q)].$$

Поведінку розсіяного поля у далекій зоні характеризує діаграма направленості, яка за знайденими значеннями  $\phi_{1k}^l$  і  $\phi_{2k}^l$  описує формула [8]

$$D_h(\kappa) = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{l=1}^N h_l (\chi_l^2 - \chi^2) \sum_{k=1}^n (\phi_{1k}^l \sin \varphi - \phi_{2k}^l \cos \varphi) \sin v_k \exp \left\{ -i\chi \operatorname{Re} [t_{lk} e^{-i\varphi}] \right\}. \quad (4)$$

Тут  $\varphi$  – полярний кут, який обчислюємо проти годинникової стрілки від осі  $Ox$  базисної системи координат.

**Реалізація алгоритму для випадку двох розсіювачів.** Для апробації запропонованої моделі дослідимо поведінку енергетичної характеристики далекого розсіяного поля – поперечника розсіяння  $\sigma(\varphi) = \frac{4}{\chi} |D_h(\varphi)|^2$  – для суцільного і розділеного навпіл включення у формі пластини та півкільця (рис.2). Плоска  $H$ -поляризована електромагнітна хвиля одиничної амплітуди довжиною  $\lambda$ , яка поширюється в матеріалі, падає під кутом  $\beta$  до додатної осі абсцис. Прийmemo, що ширина діелектричної пластини рівна  $2.5\lambda$ , а товщина –  $0.05\lambda$  (рис.2a); зовнішній і внутрішній радіуси півкільця рівними, відповідно,  $0.3\lambda$  і  $0.25\lambda$  (рис.2b). Пластина і півкільце розміщені симетрично до осі  $Oy$ , причому їх центри співпадають із початком базисної системи координат.



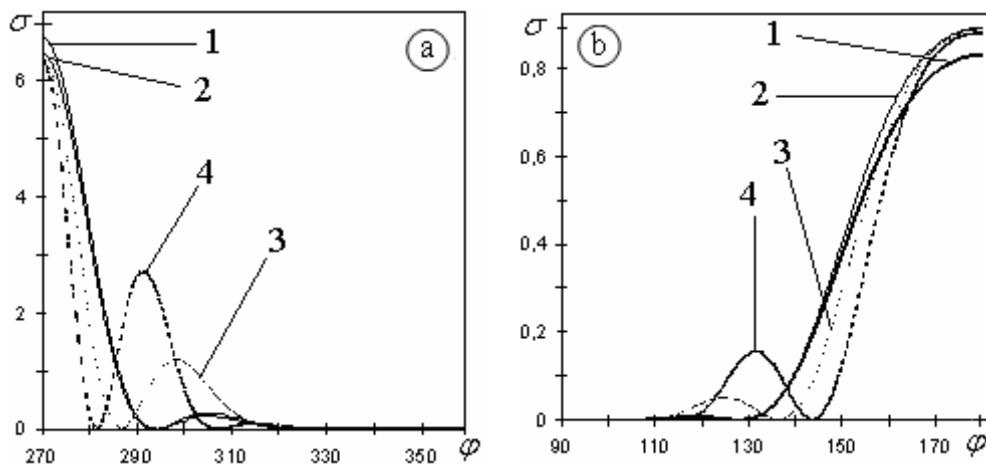


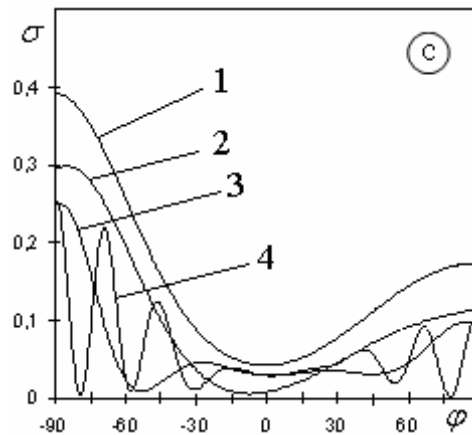
b)

Рисунок 2. Геометрія задачі

Figure 2. Problem geometry

Результати розрахунків поперечника розсіяння для суцільного і розділеного включення (з прошарком шириною  $c$ ) наведено на рис.3. Як бачимо з рис.2, при зменшенні відстані  $c$  спостерігається наближення поперечників розсіяння від одного і розділених навпіл двох включень, при  $c = 0,01\lambda$  найбільша відмінність спостерігається у напрямку  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}$  і складає приблизно 4,2% – за нормального падіння хвилі, 7% – за ковзного падіння і 25% – у випадку півкола. За зростання ширини щілини  $c$  відмінності поля у далекій зоні збільшуються.





**Рисунок 3.** Залежність поперечника розсіяння  $\sigma$  від кута спостереження  $\varphi$  для пластини (а), (b) і півкільця (с): 1 – суцільне включення; 2 –  $c = 0,01\lambda$ , 3 –  $c = 0,5\lambda$ , 4 –  $c = 2,5\lambda$

**Figure 3.** Dependence of dispersion diameter  $\sigma$  on view angle  $\varphi$  for plate(a), (b) and half-ring (c): 1 – whole inclusion; 2 –  $c = 0,01\lambda$ , 3 –  $c = 0,5\lambda$ , 4 –  $c = 2,5\lambda$

**Висновки.** Узагальнено математичну модель взаємодії  $H$ -поляризованої плоскої електромагнітної хвилі з тонким включенням на систему довільно розташованих тонких діелектричних включень. Суть цієї моделі складають система інтегродиференціальних сингулярних інтегральних рівнянь другого роду, визначених на середній лінії поперечного перетину включень. Запропоновано числовий алгоритм їх розв'язання, який базується на квадратурних формулах Гауса – Лежандра. Для апробації запропонованої математичної моделі розглянуто випадок двох розсіювачів. Проведено дослідження впливу відстані між двома тонкими циліндричними включеннями на розсіяне поле у далекій зоні.

**Conclusions.** Generalization in mathematical model of interwork between the electromagnetic field of  $H$ -polarized plane wave and the system of thin dielectric inclusions was done. The system of integrodifferential singular integral equations defined on the centre line of transverse section inclusions is the essence of this model. The numerical algorithm of their solving which is based on Gaussian quadrature was proposed. To test the proposed mathematical model the case of two diffusers has been proposed. The research of the influence of the distance between the two parts of inclusions and the direction of the plane wave propagation on the scattering field in the far-field zone has been conducted.

#### Список використаної літератури

1. Гринберг, Я.Р. Граничные условия для электромагнитного поля в присутствии тонких металлических оболочек [Текст] / Я.Р. Гринберг // Радиотехника и электроника. – 1981. – 26. – №12. – С.2494–2499.
2. Дмитренко, А.Г. Моделирование электромагнитного рассеяния на двух тонких параллельных диэлектрических цилиндрах [Текст] / А.Г. Дмитренко, Е.П. Гольцварт // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №2. – С.31–41.
3. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Е.А. Иванов // Наука и техника. – 1968. – 584 с.
4. Марков, Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн [Текст] / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М.: Радио и связь, 1983. – 296 с.
5. Медведик, М.Ю. Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на теле сложной формы, расположенном в свободном пространстве [Текст] / М.Ю. Медведик, А.А. Щукина, И.А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № (26). – С.17–32.

6. Назарчук, З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах [Текст] / З.Т. Назарчук. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
7. Назарчук, З.Т. Дифракція Е-поляризованої електромагнітної хвилі на системі тонких проникливих розсіювачів [Текст] / З.Т. Назарчук, Т.М. Стаднік // Відбір і обробка інформації. – 2006. – № 5(101). – С.5–12.
8. Панасюк, В.В. Метод сингулярних інтегральних уравнений в двумерных задачах дифракции [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
9. Дифракция электромагнитных волн на плоской решетке резистивных лент [Текст] / С.Л. Просвирнин, С.А. Масалов, А.В. Рыжак, В.М. Шкиль // Радиотехника и электроника. – 1998. – 43, №7. – С.792–796.
10. Aslanyürek, B. Generalized impedance boundary conditions for thin dielectric coatings with variable thickness [Text] / B. Aslanyürek, H. Haddar, H. Şahintürk // Wave Motion. – 2011. – 48, №7. – С.681–700.
11. Bleszynski, E. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets [Text] / E. Bleszynski, M. Bleszynski, T. Jaroszewicz // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 1993. – 35, № 6. – P.14–25.
12. Bouchitte, G. On the concept of a perfectly conducting material and of a perfectly conducting and infinitely thin screen [Text] / G. Bouchitte, R. Petit // Radio Science. – 1989. – 24, №1 – С.13–26.
13. Harrington, R.F. An impedance sheet approximation for thin dielectric shells [Text] / R.F. Harrington, J.R. Mautz // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1975. – 36. – P.531–534.
14. Hoppe, D.J. Scattering by superquadric dielectric-coated cylinders using higher order impedance boundary conditions [Text] / D.J. Hoppe, Y. Rahmat-Samii // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1992. – 40. – P.1513–1523.
15. Karlsson, A. Approximate boundary conditions for thin structures [Text] / A. Karlsson // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 2009. – 57, №1. – С.144–148.
16. Lerer, A.M. Full-wave analysis of three-dimensional planar structures [Text] / A.M. Lerer, A.G. Schuchinsky // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. – 1993. – 41, №11. – P.2002–2014.
17. Integral equation analysis of plane wave scattering from multilayered resistive strip gratings [Text] / A. Matsushima, T.L. Zinenko, H. Minami, Y. Okuno // J. Electromagnetic Waves and Application. – 1998. – 12. – P.1449–1469.
18. Mitzner, K.M. Effective boundary conditions for reflection and transmission by an absorbing shell of arbitrary shape [Text] / K.M. Mitzner // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1968. – 16. – P.706–712.
19. Nazarchuk, Z.T. Singular integral equations in diffraction theory [Text] / Z.T. Nazarchuk. – Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute, 1994. – 210 p.
20. Nazarchuk, Z.T. Mathematical modeling of electromagnetic scattering from a thin penetrable target [Text] / Z.T. Nazarchuk, K. Kobayashi // Progress in Electromagnetic Research. – 2005. – 55. – P.95–116.
21. Nosich, A.I. Scattering and absorption of E- and H-polarized plane waves by a circularly curved resistive strip [Text] / A.I. Nosich, Y. Okuno, T. Shiraishi // Radio Science. – 1996. – 31, №6. – P.1733–1742.
22. Richmond, J.H. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape [Text] / J.H. Richmond // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1965. – 13, №3. – P.334–341.
23. Richmond, J.H. TE-wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape [Text] / J.H. Richmond // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1966. – 14, №4. – P.460–464.
24. Schmidt, K. Asymptotic boundary element methods for thin conducting sheets in two dimensions [Text] / K. Schmidt, R. Hiptmair // IEEE Trans. Magn. – 2014. – 50, №2. – С.469–472.
25. Senior, B.A. Combined resistive and conductive sheets [Text] / B.A. Senior // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1985. – 33. – P.577–579.
26. Senior, B.A. Approximate boundary conditions in electromagnetics [Text] / B.A. Senior, J. Volakis. – London: The Institution of Electrical Engineers, 1995. – 353 p.
27. Tsalamengas, J.L. Direct and efficient solutions of integral equations for scattering from strips and slots [Text] / J.L. Tsalamengas, J.G. Fikioris, B.T. Babili // J. Applied Physics. – 1989. – 66, № 7. – P.69–80.
28. Zinenko, T.L. Scattering and absorption of electromagnetic plane waves by a multilayered resistive strip grating embedded in a dielectric slab [Text] / T.L. Zinenko, A. Matsushima, Y. Okuno // Trans. IEICE Electronics. – 1999. – E82-C, №12. – P.2255–2264.
29. Zinenko, T.L. Plane wave scattering and absorption by resistive-strip and dielectric-strip periodic gratings [Text] / T.L. Zinenko, A.I. Nosich, Y. Okuno // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1998. – 46, №10. – P.1498–1505.

*Отримано 26.01.2015*