

УДК 539.3

Л. Піскозуб¹; Г. Сулим² докт. техн. наук; Й. Піскозуб¹

¹Українська академія друкарства

²Львівський національний університет імені Івана Франка

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

Резюме. Побудовано точний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу з міжфазною тріщиною, навантаженого неоднорідним нормальним стиском та циклічним навантаженням у поздовжньому напрямку. Методом функцій стрибка задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь для стрибків зміщень і напружень у зонах проковзування з тертям. Проаналізовано вплив параметрів навантажування і тертя на розміри цих зон та дисипацію енергії.

Ключові слова: тертя, міжфазна тріщина, розсіяння енергії, коефіцієнт інтенсивності напружень, антиплоска деформація, поздовжній зсув, біматеріал, функції стрибка.

L. Piskozub, G. Sulim, J. Piskozub

LONGITUDINAL SHEAR OF BI-MATERIAL WITH INTERFACIAL CRACK CONSIDERING FRICTION

Summary. The present paper investigates the anti-plane problem for a semi-homogeneous bi-material with the closed interface crack considering sliding friction. Solid is exposed to the combined cyclic loading in the longitudinal direction and arbitrary normal load required to prevent loss of contact between the sliding surfaces of the cracks. It is assumed that the load on each step of loading increases from zero to its maximum monotonically and slowly enough not to consider the effect of inertia.

Using jump function method the problem is reduced to the solution of singular integral equations with a Cauchy-type kernel for the jumps of displacements and stresses in areas with sliding friction. This solution allows us to obtain explicit expressions for displacements, stress intensity factors and energy dissipation.

Analyzing of the elasticity problem involving friction under the variable (cyclic) loading requires consideration of the history of loading. No incremental formulation is necessary for solving of this problem on each local step because of quasi-statically way of the step loading. To take account of cyclical loading multistep method of solution is proposed. The basis of this technique is the idea of consideration at every step of loading previous step stresses and displacements as the residual. Correctness of the obtained solution is justified. Evolution of the slip zone in matrix is considered at different stages of loading. Critical load values for determining the onset of slip are investigated. Available size of slip zone with an increase in loading is determined from the condition of equality to zero the stress intensity factor. Upon reaching the second critical value of the load, when the slip zone size matches the size of the crack, there are singular stresses in the crack threshold and non-zero values of stress intensity factors.

We numerically analyze the effect of friction and loading parameters on the size of slip zone and stress intensity factors. It is discovered that the slip zone appears and grows fastest when it pressing normal stresses are minimal. Growth rate of slip zone also promotes increasing the distance of application points of concentrated power factors from her. The growth coefficient of friction significantly reduces the intensity of the stresses in the vicinity of the ends of the crack. Energy dissipation for all examined cases of loading was calculated.

Key words: friction, interface crack, energy dissipation, stress intensity factor, anti-plane deformation, longitudinal shear, bi-material, jump functions.

Вступ. Вивчення контактних явищ є однією з найактуальніших проблем у машинобудуванні, гірничій справі тощо [1–5].

Проблема контакту берегів тріщин із урахуванням тертя вивчена недостатньо. Найбільші здобутки у цьому напрямі належать теорії вивчення тріщин на межі поділу двох середовищ, яка для усунення фізично некоректної осцилюючої особливості

широко застосовує модель локального контакту берегів безпосередньо біля вістря [2,6–8]. Широкий клас задач про вплив сил тертя на контактні напруження між півплощинами із неглибокими гладкими виїмками на поверхні досліджено в [9,10]. У цьому напрямку варто звернути увагу також на праці [11–16].

У цій публікації пропонується методика дослідження впливу тертя при циклічному деформуванні за типом поздовжнього зсуву (антиплоска задача) тіла з налягаючою тріщиною на формування зон проковзування та розсіювання енергії. В основу підходу покладено метод функцій стрибка та апарат сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

1. Постановка задачі. Розглянемо безмежний ізотропний масив, що складається з двох півпросторів з пружними сталими E_k, ν_k , взаємно притиснених до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^\infty < 0$. Крім того, півпростори розтягуються двома зрівноваженими зосередженими силами $P_k = \pm iP$ у точках $z_k = \pm ih \in S_k$ ($k = 1, 2$), значення яких не перевищує певного рівня, щоб запобігти взаємному відриву поверхонь контакту. Тут введено в розгляд систему координат $Oxuz$ із початком у площині контакту півпросторів xOz . Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі z та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

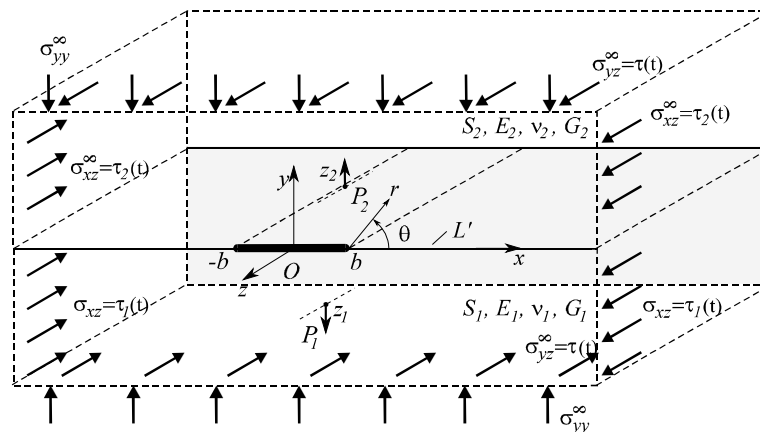


Рисунок 1. Силова й геометрична схема задачі

Figure 1. Problem geometry and external loading

Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу тіла площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k = 1, 2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис. 1). Будемо вважати, що величина і напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично (настільки повільно, щоб не було необхідності враховувати інерційні члени) за певним законом, який може бути різним. Нехай зовнішнє навантаження визначає монотонно змінна в часових проміжках $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$ покрокова послідовність рівномірно розподілених на нескінченності напружень $\sigma_{yz}^\infty(t) = \sum_p \tau_{(p)}(t)$, p у круглих дужках – номер кроку циклу. Відзначимо, що позитивний напрям векторів сил обрано уздовж осі z (так, щоб з осями x, y утворювалася права система).

Контакт між півпросторами уздовж лінії L здійснюється згідно із законами дотикового механічного контакту, під яким будемо розуміти узагальнений ідеальний механічний контакт, за якого тіла контактують механічно ідеально до моменту, коли може початися взаємне проковзування контактуючих поверхонь тіл [17,18].

Таким чином, отримуємо задачу поздовжнього зсуву від дії зусиль $\sigma_{yz}^{\infty}(t)$ з додатковим впливом неоднорідного розподілу стискувальних нормальних напружень, а також сил тертя на межі поділу матеріалів, які на тих поверхнях, де відбувається проковзування, можуть спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо.

Наявність зони проковзування (тріщини з контактуючими (налягаючими) берегами) на кожному кроці циклу можна моделювати стрибком компонент векторів напружень і переміщень на $L'_{(p)}$ [17,19,20], що з урахуванням закону Гука дає

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{yz} \right]_{L'_{(p)}} &\equiv \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x,t), \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'_{(p)}} &\equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{L'_{(p)}} \equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x,t), \quad x \in L'_{(p)}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$f_{3(p)}(x,t) = f_{6(p)}(x,t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L'_{(p)}, \quad (2)$$

де $L'_{(p)} \rightarrow L'_{(p)} = [-a_{(p)}; a_{(p)}]$; t – момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний зі змінюваністю сили. Тут і далі позначено $[\varphi]_L = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$, $\langle \varphi \rangle_L = \varphi(x, -0) + \varphi(x, +0)$; індекси «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L .

Умови дотикового тертьового контакту у налягаючій тріщині передбачають, що при досягненні дотичними напруженнями $\sigma_{yz(p)}$ на ділянці $L'_{(p)}$ певного критичного значення τ_{yz}^{\max} починається проковзування, причому цей поріг дотичні напруження не можуть перевищити. Розглянемо варіант контактної задачі з урахуванням класичного закону тертя Амонтона [1,4,5], який стверджує, що в усіх точках ділянки $L'_{(p)}$ дотичні напруження (зусилля тертя) дорівнюють

$$\sigma_{yz(p)}^{\pm} = -\text{sgn}([w]_{(p)}) \tau_{yz}^{\max}(x), \quad \tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha \sigma_{yy}(x) \left(\sigma_{yy} < 0, |w^- - w^+| \neq 0 \right), \quad (3)$$

де α – коефіцієнт тертя ковзання. Поза ділянкою $L'_{(p)}$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує рівня максимально допустимих

$$|\sigma_{yz(p)}(x)| \leq \tau_{yz}^{\max}(x) \left(\sigma_{yy} < 0, w^- - w^+ = 0 \right) \quad (4)$$

і взаємного переміщення берегів (стрибка зміщень) немає. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знаку різниці переміщень $[w]_{(p)}$ на $L'_{(p)}$ у розглядуваній точці.

Для вищезгаданого випадку нормального притискання отримуємо [19, 20]

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = \alpha \left\{ -\sigma_{yy}^{\infty} - \frac{4Ph\gamma^+}{x^2 + h^2} \right\}, \quad (5)$$

де $\kappa_k = 4 - 3\nu_k$, $\eta_k = 1/8\pi(1 - \nu_k)$, $e_{kj} = 2 \frac{G_k + \kappa_k G_j}{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)}$,

$$\gamma_k = \frac{1}{e_{jk}} + \frac{\kappa_k + 1}{e_{kj}}, \quad \gamma^+ = E_2 \eta_1 \gamma_1 + E_1 \eta_2 \gamma_2.$$

Вимога відсутності взаємного відриву контактуючих поверхонь із урахуванням (5) дозволяє описати зв'язок між навантажувальними притискаючими чинниками у вигляді

$$\frac{4P\gamma^+}{h} = -\delta\sigma_{yy}^\infty \quad (0 \leq \delta \leq 1), \quad (6)$$

який забезпечує граничні випадки значень навантаження.

Застосування закону тертя у класичному вигляді (3) дає можливість спростити крайові умови для основної задачі, однак вибір складніших моделей тертя [3, 5–7], у тому числі з урахуванням спрацювання, не ускладнить принципово процесу розв'язування.

2. Розв'язування задачі. Перший крок циклу. На підставі застосування до розв'язування задачі методики п. 20.2 [19] можна отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії L необмеженої площини S , а також всередині неї дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^\pm(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^\pm(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_j p_k, \\ \sigma_{yz(1)}(z, t) + i\sigma_{xz(1)}(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(1)}^0(z, t) + ip_k g_{3(1)}(z, t) - \\ &- C g_{6(1)}(z, t) \quad (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (7)$$

Верхній індекс «+» стосується значення $k = 2$; «-» – $k = 1$. Величини, відзначені індексом “0” згори, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без модельних неоднорідностей (тріщин) за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок).

Тут і далі для кожного кроку використано позначення

$$\sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(p)}^0(z, t) = \tau_{(p)}(t) + i\tau_{k(p)}(t) \quad (z \in S_k, k = 1, 2). \quad (8)$$

Використовуючи (7), (8) та умову (3) наявності сили тертя на ділянці $L'_{(1)}$ тріщини за взаємного зсуву берегів у напрямі осі z , отримаємо з умов (2) систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} f_{3(1)}(x, t) = 0, \\ g_{6(1)}(x, t) = F_{6(1)}(x, t) = \frac{1}{2C} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max}(x) \right), \end{cases} \quad (9)$$

розв'язком якої з огляду на геометричну й силову симетрію задачі і припущення, що існує єдина ділянка проковзування $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$, є

$$f_{6(1)}(x,t) = \frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left\{ \left(\tau_{(1)}(t) - \alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \sigma_{yy}^{\infty} \right) - \frac{4\alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} P \gamma^+ \sqrt{a_{(1)}^2 + h^2}}{(x^2 + h^2)} \right\}, \quad (x \in [-a_{(1)}; a_{(1)}]). \quad (10)$$

Вираз для стрибка переміщень $[w]_{(1)}$ отримаємо інтегруванням (10) при $|x| \leq a_{(1)}$

$$[w]_{(1)}(x,t) = \int_{-a_{(1)}}^x f_{6(1)}(x,t) dx = -\frac{\tau_{(1)}(t) - \alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \sigma_{yy}^{\infty}}{C} \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2} - \frac{2\alpha P \gamma^+ \operatorname{sgn}[w]_{(1)}}{C} \ln \frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}. \quad (11)$$

Якщо ввести до розгляду узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень виразом

$$K_{31} + iK_{32} = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=0)} \sqrt{\pi r} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}), \quad (12)$$

то нескладно отримати для першого кроку аналітичний вираз для КІН у випадку тріщини $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ із зоною проковзування

$$K_{3(1)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_{(1)}}} \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \sqrt{\frac{a_{(1)} \pm x}{a_{(1)} \mp x}} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x,t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max}(x) \right) dx = \sqrt{\pi a_{(1)}} \left(\tau_{(1)}(t) - \alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \left(\sigma_{yy}^{\infty} - \frac{4P\gamma^+}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2}} \right) \right). \quad (13)$$

Звернемося до питання про розмір зони проковзування $a_{(1)}$. У процесі зміни величини зсувного навантажування можна виділити три стадії, що принципово відрізняються з точки зору розвитку проковзування берегів тріщини поздовжнього зсуву:

1. Комбінація зсувного та стискаючого навантаження є такою, що при зростанні інтенсивності зсувних зусиль до свого локального на кроці максимуму скрізь уздовж L завжди виконується умова (4), тобто проковзування не виникає взагалі.

2. Інтенсивність зсувних зусиль у певний момент часу $t_{(1)}^*$ вже достатня для виникнення умов (3) хоча б на деякій обмеженій ділянці $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ (при симетричному щодо вертикальної осі навантаженні). Навантаження, коли вперше з'являється проковзування, будемо називати першим критичним. У разі переходу до другої стадії навантаження для визначення розміру $a_{(1)}$ зони проковзування можна використовувати умову рівності нулю КІН (13) [6].

3. Інтенсивність зсувних зусиль у певний момент часу $t_{(1)}^{**}$ зростає настільки, що розміри зони проковзування досягли розмірів тріщини – $a_{(1)} = b$. Подальше зростання зусиль не призведе до зростання зони проковзування, яка вимушено співпадає з

тріщиною, у кінчиках тріщини виникатимуть сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові КІН. Навантаження, коли вперше розмір зони проковзування досягне заданого наперед розміру тріщини, назовемо другим критичним.

4. Інтенсивність зсувних зусиль у певний момент часу $t_{(1)}^{***}$ достатня для виникнення умов (3) по всій границі L (за відсутності обмеження на розмір тріщини). Тобто може відбутися миттєве поширення зони проковзування – фактично півпростори повністю ковзають один по одному. У цьому випадку КІН буде дорівнювати нулю скрізь уздовж L . Таке навантаження назовемо пороговим критичним.

Прирівнюючи у (13) КІН до нуля, отримуємо умову для $\tau_{(1)}(t) > \tau_{(1)}^*$

$$\tau_{(1)}^* = -\alpha\sigma_{yy}^\infty(1-\delta) = 4\alpha\gamma^+P(1-\delta)/h\delta, \quad (14)$$

коли вперше з'являється проковзування. Тут і далі $\tau_{(p)}^*$ – перше критичне значення навантаження початку проковзування на кроці p , що досягається у певний момент часу $t_{(p)}^*$ ($t_{(p)}^* \leq t_{(p)}$), де $t_{(p)}$ – момент часу завершення кроку циклу. Розмір зони проковзування визначається за формулою

$$a_{(1)}(t) = h\sqrt{\left(\frac{-\delta\alpha\sigma_{yy}^\infty}{-\delta\alpha\sigma_{yy}^\infty - \tau_{(1)}(t)}\right)^2 - 1} = h\sqrt{\left(\frac{4\alpha\delta\gamma^+P}{4\alpha\gamma^+P - \delta h\tau_{(1)}(t)}\right)^2 - 1}. \quad (15)$$

Покладаючи в (15) $a_{(1)} = b$, отримуємо вираз для другого критичного значення навантаження

$$\tau_{(1)}^{**} = -\alpha\sigma_{yy}^\infty\left(1 - \frac{\delta h}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) = 4\alpha\gamma^+P\left(\frac{1}{h\delta} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right), \quad (16)$$

а спрямовуючи $a_{(1)} \rightarrow \infty$, отримуємо третє критичне значення навантаження

$$\tau_{(1)}^{***} = -\alpha\sigma_{yy}^\infty = 4\alpha\gamma^+P/\delta h. \quad (17)$$

У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C = G/2$, $p_1 = p_2 = 1/2$. За гладкого контакту між півпросторами у згаданих формулах треба покласти коефіцієнт тертя $\alpha = 0$ що відразу дає максимально дозволений розмір зони проковзування для будь-якого незрівноваженого зсувного навантаження.

Наявність аналітичного розв'язку для всіх параметрів НДС і, зокрема, для КІН дає можливість обчислити роботу сил тертя на ділянці $L'_{(1)}$ порушення контакту також аналітично для будь-якого розглянутого виду навантаження. Ця робота і, отже, розсіяна на $L'_{(1)}$ внаслідок зміни зовнішнього навантаження енергія в деякий момент часу t обчислюється за допомогою інтеграла

$$W_{(1)}^d(t) = - \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} |\tau_{yz}^{\max}(x)| |[w]_{(1)}(x, t)| dx. \quad (18)$$

3. Загальна схема розв'язування задачі. Наступні кроки. Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу $t_{(1)}$ його завершення значення напружено-деформованого стану масиву будуть на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тому, вважаючи, що на кожному наступному

кроці знак прикладеної сили змінюється на протилежний, а відносно її значення монотонно змінюється від 0 до максимального за модулем, застосуємо для отримання розв'язку наступну методику.

Вважаємо, що постановка задачі на другому кроці відрізняється від постановки задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданого стрибка переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком. Тоді подання поля напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z,t) + i\sigma_{xz}(z,t) = & \sigma_{yz(1)}(z,t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z,t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z,t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z,t) + ip_k g_{3(2)}(z,t) - Cg_{6(2)}(z,t) \quad (z \in S_k; k=1,2; j=3-k). \end{aligned} \quad (19)$$

Напруження та переміщення повинні задовольняти крайові умови (3) на $L'_{(2)}$. Тоді з урахуванням (19) можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z,t) + i\sigma_{xz(2)}(z,t) = & \left\{ \sigma_{yz}(z,t) + i\sigma_{xz}(z,t) \right\} - \\ & - \left\{ \sigma_{yz(1)}(z,t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z,t_{(1)}) \right\} \quad (z \in S_k; k=1,2; j=3-k) \end{aligned} \quad (20)$$

з крайовими умовами

$$\sigma_{yz(2)}^{\pm}(x,t) = -\text{sgn}[w]_{(2)} \tau_{yz}^{\max}(x) - \sigma_{yz(1)}^{\pm}(x,t_{(1)}), \quad (21)$$

яка, аналогічно до попереднього кроку, породжує СІР

$$\begin{aligned} f_{3(2)}(x,t) = 0, \quad g_{6(2)}(x,t) = F_{6(2)}(x,t) = \\ = \frac{1}{2C} \left\{ \left\langle \sigma_{yz(2)}^0(x,t) \right\rangle + 2 \left(\text{sgn}[w]_{(2)} - \text{sgn}[w]_{(1)} \right) \tau_{yz}^{\max}(x) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень та напружень від локального (для цього кроку) навантаження

$$\tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t_{(1)}), \quad \tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t_{(1)}). \quad (23)$$

Враховуючи, що система рівнянь (22) відрізняється від (9) лише наявністю коефіцієнта $(\text{sgn}[w]_{(2)} - \text{sgn}[w]_{(1)})$ замість $\text{sgn}[w]_{(1)}$, достатньо у виразах (10), (11), (13) здійснити згадану заміну коефіцієнтів, щоб отримати аналогічні вирази для другого і наступних кроків, наприклад КІН

$$K_{3(2)}(t) = \sqrt{\pi a_{(2)}} \left(\tau_{(2)}(t) - \alpha \left(\text{sgn}[w]_{(2)} - \text{sgn}[w]_{(1)} \right) \left(\sigma_{yy}^{\infty} - \frac{4\alpha P \gamma^+}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2}} \right) \right). \quad (24)$$

Оскільки на другому кроці змінюється знак навантаження (тобто $\tau_{(2)}(t) < 0$), то маємо $\text{sgn}[w]_{(2)} = 1$ і, аналізуючи вираз для КІН, отримаємо розмір нової зони проковзування. Прирівнюючи до нуля КІН, отримуємо умову для $|\tau_{(2)}(t)| > \tau_{(2)}^*$, коли вперше з'являється проковзування. Тут $\tau_{(2)}^* = 2\tau_{(1)}^*$ – перше критичне значення

навантаження на другому кроці. Аналогічно вдвічі більшими виявилися також решта критичних значень навантаження: $\tau_{(2)}^{**} = 2\tau_{(1)}^{**}$, $\tau_{(2)}^{***} = 2\tau_{(1)}^{***}$. Відзначимо, що на всіх подальших кроках критичні навантаження вже не змінюються.

Розмір зони проковзування визначається за формулою

$$a_{(2)}(t) = h \sqrt{\left(\frac{-2\delta\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{-2\delta\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \tau_{(2)}(t)} \right)^2 - 1} = h \sqrt{\left(\frac{8\alpha\delta\gamma^+ P}{8\alpha\gamma^+ P + \delta h\tau_{(2)}(t)} \right)^2 - 1}. \quad (25)$$

Міркуючи таким самим чином, можна отримати локальний розв'язок для кожного наступного кроку циклу навантаження.

Підсумкове значення як стрибка переміщень, так і розсіяної енергії після p -ого кроку визначається як суперпозиція

$$[w](x,t) = \sum_{p=1}^N [w]_{(p)}(x,t_{(p)}) + [w]_{(p+1)}(x,t) \quad (|x| \leq a_{(p+1)}; t > t_{(p)}); \quad (26)$$

$$W^d(t) = \sum_{p=1}^N W_{(p)}^d(t_{(p)}) + W_{(p+1)}^d(t) \quad (t > t_{(p)}). \quad (27)$$

4. Числовий аналіз. Рис.2, 3 ілюструють залежність знерозміреної величини $a_{(p)}/b$ на p -ому кроці навантаження величиною $b\tau_{(p)}(t)/4\alpha P\gamma^+$ залежно від параметрів δ та h/b . Бачимо, що у граничному випадку $\delta = 1$ відсутності нормальних напружень на границі у точці $x = 0$ проковзування починається з моменту прикладання зсувного навантаження і зростає найшвидше. Значимо, що добре прослідковується локальність впливу сил притиску – з наближенням точки прикладання сили до межі розділу стає яскравіше вираженим мінімум величини критичної сили.

На рис.4 проілюстровано вплив зростання притискувального навантаження на межі розділу матеріалів при малому h/b на втрату чутливості до зростання розміру зони проковзування.

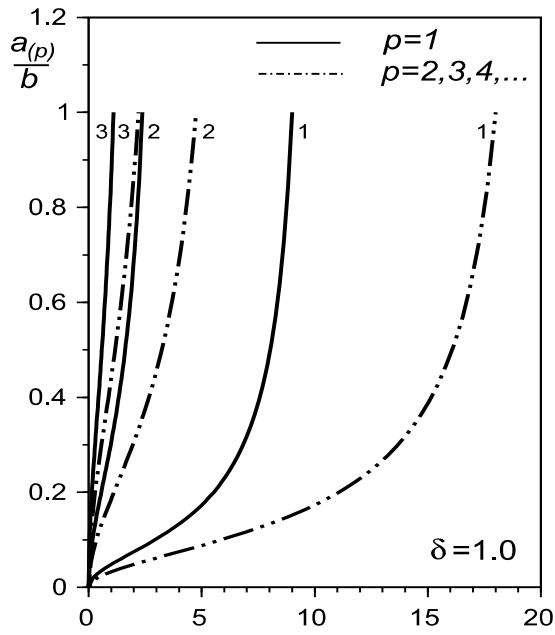


Рисунок 2. Зростання розміру зони проковзування

Figure 2. Growth of the size of the slip zone

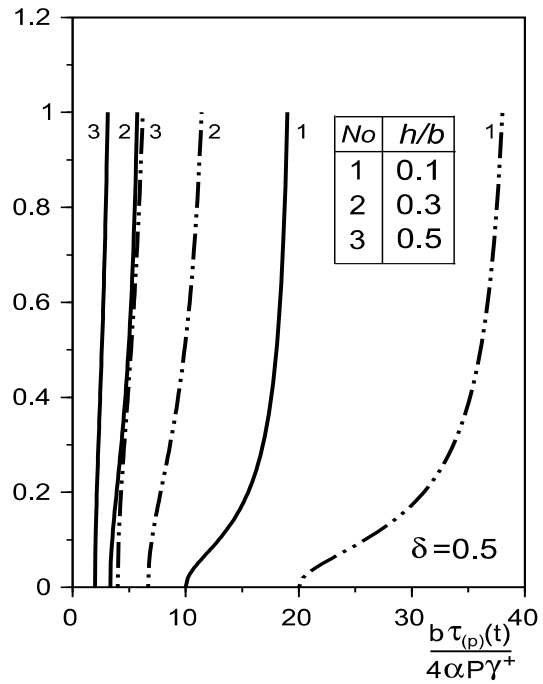


Рисунок 3. Зростання розміру зони проковзування

Figure 3. Growth of the size of the slip zone

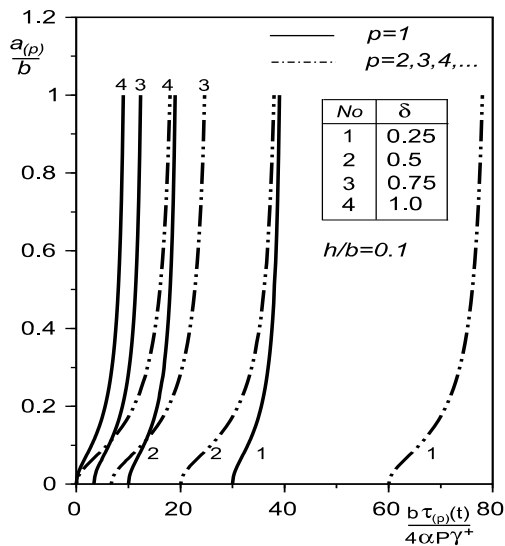


Рисунок 4. Зростання розміру зони проковзування

Figure 4. Growth of the size of the slip zone

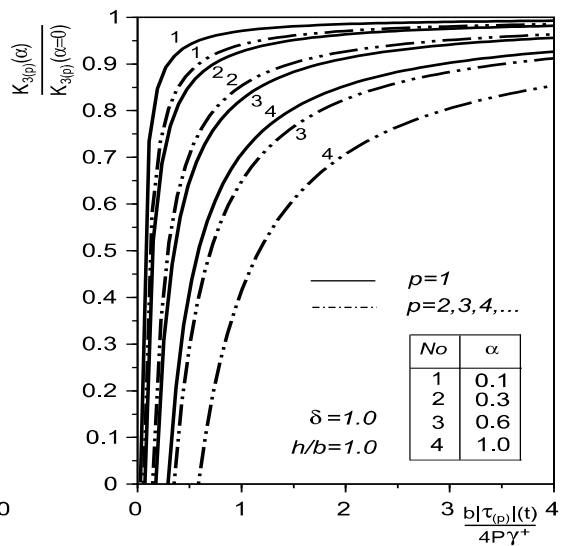


Рисунок 5. КІН

Figure 5. Stress intensity factors

На рис.5–7 зображена динаміка зміни відношення КІН за наявності та відсутності тертя $K_{3(p)}(\alpha > 0)/K_{3(p)}(\alpha = 0)$ залежно від різних параметрів навантаження та коефіцієнта тертя.

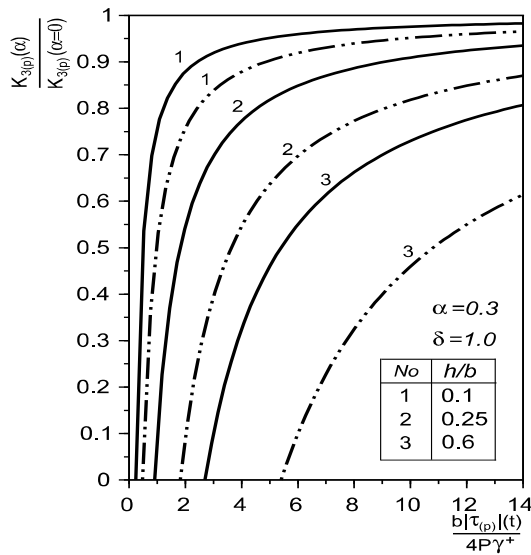


Рисунок 6. КІН

Figure 6. Stress intensity factors

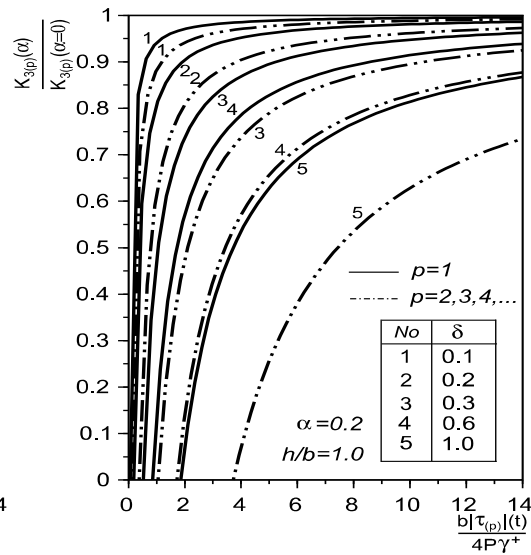


Рисунок 7. КІН

Figure 7. Stress intensity factors

Рис.8,9 відображають характер зміни розсіяної у зоні проковзування енергії $CW_{(p)}(t)/8\pi\alpha^2 P^2 \gamma^{+2}$ залежно від $b\tau_{(p)}(t)/4\alpha P\gamma^+$ при різних значеннях параметрів навантаження. Прямолинійні ділянки ліній на рисунках відповідають третій стадії навантаження. Зазначимо, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів.

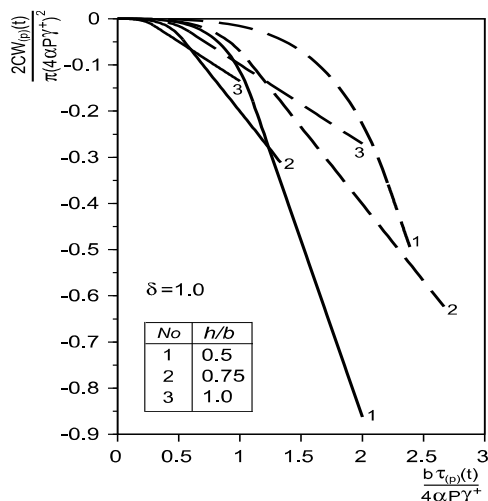


Рисунок 8. Розсіяння енергії

Figure 8. Energy dissipation

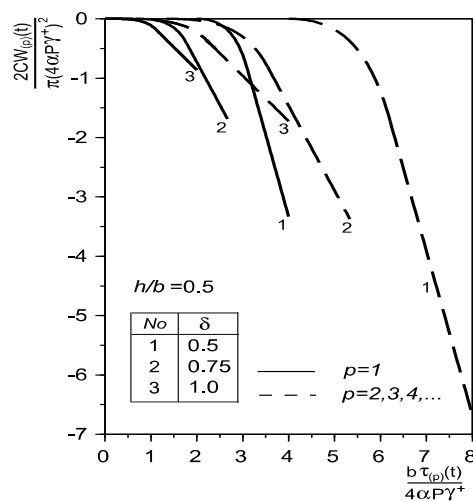


Рисунок 9. Розсіяння енергії

Figure 9. Energy dissipation

Висновки. Отримано ефективний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу з міжфазною тріщиною з контактуючими берегами, де може відбуватися проковзування

з урахуванням тертя. Передбачено різні способи навантаження масиву неоднорідним нормальним стиском та циклічним навантаженням у поздовжньому напрямку. Цей розв'язок дозволяє отримати явні вирази для переміщень, КІН та дисипації енергії. Для врахування циклічності навантаження запропонована багатокрокова методика розв'язування, в основі якої лежить ідея про врахування на кожному кроці навантажування НДС від попереднього кроку як залишкового. Обґрунтовано коректність отриманого розв'язку. Розглянуто залежність розміру зони контакту на різних стадіях навантаження від його параметрів. Досліджені критичні значення навантаження для визначення моменту появи проковзування та сингулярні напруження в околі кінців тріщини, що з'являються при досягненні другого критичного значення навантаження, коли розмір зони проковзування співпадає з розміром тріщини.

Чисельно проаналізовано вплив тертя та різних варіантів навантажування на зміну розміру зони проковзування та коефіцієнтів інтенсивності напружень. Виявлено, що зона проковзування з'являється і зростає найшвидше у випадку, коли в ній притискаючі нормальні напруження мінімальні. Швидкості зростання зони проковзування також сприяє віддалення від неї точок прикладання зосереджених силових чинників. Зростання коефіцієнта тертя суттєво зменшує інтенсивність напружень в околі кінців тріщини на третій стадії навантаження. Обчислено дисипацію енергії для всіх розглянутих випадків навантажування. Досліджено, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів.

Conclusions. We build the effective solution for the problem of bi-material with closed interfacial crack, where the sliding friction is possible. Different ways of loading solid by nonuniform normal compression and cyclic loading in the longitudinal direction can be taken into account. This solution allows obtaining of explicit expressions for displacements, stress intensity factors and energy dissipation. To take account of cyclical loading multistep method of solution is proposed. The basis of this technique is the idea of consideration at every step of loading previous step stresses and displacements as the residual. Correctness of the obtained solution is justified. Contact zone size dependence on the loading parameters at different stages is analyzed. The critical load values for determining the onset of slip are investigated. Upon reaching the second critical value of the load when the slip zone size matches the size of the crack, the singular stresses in the crack threshold and non-zero values of stress intensity factors appears.

We numerically analyze the effect of friction and loading parameters on the size of slip zone and stress intensity factors. It is discovered that the slip zone appears and grows fastest when its pressing normal stresses are minimal. Growth rate of slip zone also promotes increasing the distance from the point of application of concentrated power factors. The growth coefficient of friction significantly reduces the intensity of the stresses in the cracks threshold on the third stage of loading. Energy dissipation for all examined cases of loading is calculated. Energy dissipation becomes more intense when the point of force application is closer to the sliding zone.

Список використаної літератури

1. Горячева, И.Г. Механика трения [Текст] / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Дундурс, Дж. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины [Текст] / Дж. Дундурс, М. Комниноу // Механика композитных материалов. – 1979. – №3. – С.387–396.
3. Сулим, Г.Т. Умови контактної взаємодії (огляд) [Текст] / Г.Т. Сулим, Й.З. Піскозуб // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – №3. – С.110–125.
4. Hills, D.A. Mechanics of elastic contact [Text] / D.A. Hills, D. Nowell, A. Sackfield. – Butterworth-Heinemann, Oxford. – 1993. – P.238.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. [Текст] / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989 – 510 с.
6. Черепанов, Г.П. О развитии трещин в сжатых телах [Текст] / Г.П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1966. – №1. – С.82–93.
7. Comninou, M. Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load [Text] / M. Comninou, D. Schmueser, J. Dundurs // Int. J. Engn. Sci. – 1980. – 18(1). – P.131–137.

8. Herrmann, K.P. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial [Text] / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // Archive of App. Mech. – 1999. – 69. – P.317–335.
9. Мартиняк, Р.М. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту [Текст] / Р.М. Мартиняк, Н.І. Маланчук, Б.Є. Монастирський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – №3. – С.101–109.
10. Мартыняк, Р.М. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками [Текст] / Р.М. Мартыняк, А.А. Криштафович // Трение и износ. – 2000. – №4. – С.350–360.
11. Архипенко, К.М. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною [Текст] / К.М. Архипенко, О.Ф. Кривий // Машинознавство. – 2008. – №3(129). – С.16–21.
12. Острык, В.И. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости [Текст] / В.И. Острык, А.Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
13. Кундрат, М.М. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях [Текст] / М.М. Кундрат, Г.Т. Сулим // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С.322–324.
14. Семенов, Б.Н. Контакт с трением двух упругих полуплоскостей с жестким включением на границе контакта [Текст] / Б.Н. Семенов // Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела». – Одесса, 1989. – С.85.
15. Sekine, H. Mechanics of debonding along the surfaces of dispersed flat inclusions in composite materials (A model of debonding along the surface of a flat inclusion) [Text] / H. Sekine // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1982. – 48A. – №11(435). – P.1415–1420.
16. Weertman, J. Double slip plane crack model [Text] / J. Weertman, I.-H. Lin, R. Thomson // Acta met. – 1983. – 31. – №4. – P.473–482.
17. Божидарник, В.В. Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
18. Пастернак, Я.М. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим, Л.Г. Пискозуб // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010. – Минск; БГУ, 2010. – С.399–404.
19. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.
20. Piskozub, J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // Journal of Engineering Mathematics [Text] / J.Z. Piskozub, G.T. Sulim. – Special Issue Thermomechanics, 2008. – 61.– P.315–337.

Отримано 23.12.2014