Сулим Г. Т. Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання / Г. Сулим, Ю. Колодій, І. Турчин // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 77. — № 1. — С. 71-79. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Г. Сулим[1], докт. фіз.-мат. наук; Ю. Колодій[1]; І. Турчин[2], канд. фіз.-мат. наук;

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

КВАЗІСТАТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ В ПІВПРОСТОРІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ НАГРІВАННЯ

Резюме. *Побудовано розв'язок плоскої квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям, на границі якого в смузі певної ширини задана температура, а зовні відбувається теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок отримано із використанням інтегральних перетворень Лагерра й Фур'є та методу рядів Фур'є при розв'язуванні послідовностей парних інтегральних рівнянь. Наведено результати числового аналізу термонапруженого стану в півпросторі та покритті залежно від відносної товщини покриття та інтенсивності охолодження.*

Ключові слова: *квазістатична задача термопружності, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.*

H. Sulym, Yu. Kolodiy, I. Turchyn

THE QUASISTATICS THERMAL STRESS ANALYSIS IN COATED HALF-SPACE WITH MIXED BOUNDARY HEATING CONDITIONS

Summary. *Analysis of thermal stresses in bodies with coatings is important for many engineering researches. Taking into account the actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The steady problem of thermoelasticity with mixed boundary conditions currently is sufficiently investigated. However, the corresponding transient problem, despite its relevance, is poorly understood. This is due to mathematical difficulties that arise in applying the integral Laplace transform. The authors of this paper developed a new effective method of constructing solutions of mixed boundary-value non-stationary problems.*

The half-space with a coating, on the surface of which on the band of 2d width the temperature distribution is given and outside of this area the heat transfer according to the Newton's law is performed, is analysed in the work. On the surface of separation of materials of half-space and coating the conditions of ideal thermomechanical contact are satisfied. The initial temperature of the coating and half-space is equal to zero.

To the heat conductivity problem the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable are applied. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions results in dual integral equations. For solution of this problem the method of Newton's series is proposed. Taking advantage of this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved.

The solution of thermoelasticity problem is built using resulting temperature field in the assumption, that the border of coating is free of load. The solution is obtained in the form of series in Laguerre polynomials. Calculations were carried for the half-space made of titanium alloy and ceramic coating.

Key words: *quasi-static thermoelasticity problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.*

Постановка проблеми. Класичним аналітичним методом розв'язування задач нестаціонарної теплопровідності та квазістатичної термопружності є метод інтегральних перетворень [1]. Для усунення з розгляду похідних за часовою змінною зазвичай використовують інтегральне перетворення Лапласа. У двовимірних випадках за наявності змішаних крайових умов застосування інтегрального перетворення за просторовою змінною призводить до так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [2], які містять як незалежну змінну параметр перетворення за Лапласом. У роботі [3] такі дуальні інтегральні рівняння зведені до рівнянь Фредгольма 2-го роду. Тут же запропонована схема отримання розв’язку цих рівнянь із використанням методу послідовних наближень. У цій же роботі можна знайти синтез результатів, заснованих на методах теорії потенціалу. Всі зазначені розв’язки отримані для безмежних або напівбезмежних однорідних об'єктів. У роботі [4] за допомогою інтегральних перетворень Лапласа і Ханкеля змішана задача нестаціонарної теплопровідності для пластини теж зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наближений розв’язок цього рівняння пропонується шукати у вигляді ряду за степенями параметра перетворення Лапласа, остаточні формули і будь-який числовий аналіз відсутні.

Ми в даній праці пропонуємо методику, що використовує відносно новий підхід до розв’язування початково-крайових задач математичної фізики – метод поліномів Лагерра [5–7].

Розглянемо півпростір з покриттям, що моделюється шаром товщини h з відмінними від півпростору теплофізичними характеристиками. З моменту часу $t>0$ на поверхні покриття $y=0$ задано розподіл температури $Q(x,t)$, симетрично розподіленої в смузі ширини $2d$. Зовні цієї смуги відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура півпростору та покриття дорівнює нулю, а на межі поділу покриття та півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини $\alpha = x/d$, $\gamma = z/d$, $\tau = a_T^{(2)} t/d^2$, $\gamma_1 = h/d$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$, $Bi = \kappa d / \lambda_T^{(1)}$, $q(\alpha,\tau) = Q(\alpha,\tau) d / \lambda_T^{(1)}$. У термінах цих змінних задачу теплопровідності сформулюємо таким чином:

$$\partial^2_{\alpha\alpha} T^{(i)} + \partial^2_{\gamma\gamma} T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_\tau T^{(i)}, \; i = 1,2; \tag{1}$$

$$T^{(i)}(\alpha,\gamma,0) = 0, \; i = 1,2; \tag{2}$$

$$T^{(1)} = Q(\alpha,\tau), \; \gamma = 0, \; |\alpha| \le 1; \tag{3}$$

$$\partial_\gamma T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \; \gamma = 0, \; |\alpha| > 1; \tag{4}$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \;\; \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T^{(1)} = \partial_\gamma T^{(2)}, \;\; \gamma = \gamma_1; \tag{5}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} T^{(2)}(\alpha,\gamma,\tau) = \lim_{\gamma\to\infty} \partial_\gamma T^{(2)}(\alpha,\gamma,\tau) = 0. \tag{6}$$

Тут $\lambda_T^{(i)}, a_T^{(i)}$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності й температуропровідності покриття $(i=1)$ та півпростору $(i=2)$; κ - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття, $T^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)$; $i=1,2$ – температурне поле в покритті та півпросторі.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ та, враховуючи симетричність температурного поля відносно площини $\alpha = 0$, $\cos$-перетворення Фур’є за змінною α [8]. У результаті [6] отримаємо трикутну послідовність звичайних диференційних рівнянь

$$d^2_{\gamma\gamma} \overline{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) \overline{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^{n-1} \overline{T}_k^{(i)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \; i = 1,2, \tag{7}$$

де $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda\tau)\left[\int\limits_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)\cos(\xi\alpha)d\alpha\right]L_n(\lambda\tau)d\tau$ – трансформанта за Лагерром та Фур'є.

Загальний розв'язок послідовностей (7), як відомо [5], можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi,\gamma)+B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi,\gamma)\right],\ i=1,2\ , \tag{8}$$

де $G_j^{(i)}(\xi,\gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi,\gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які згідно з методом невизначених коефіцієнтів матимуть вигляд

$$G_j^{(i)}(\xi,\gamma)=\exp\left(-\omega_i\gamma\right)\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}^{(i)}\frac{(\omega_i\gamma)^k}{k!},\quad W_j^{(i)}(\xi,\gamma)=\exp\left(\omega_i\gamma\right)\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}^{(i)}\frac{(-\omega_i\gamma)^k}{k!}, \tag{9}$$

де введено позначення $\omega_i=\sqrt{\xi^2+\lambda\tilde{a}_i}$. Коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ при цьому отримуються із рекурентних рівнянь

$$a_{j,k+1}^{(i)}=0.5\left(a_{j,k+2}^{(i)}-\frac{\lambda\tilde{a}_i}{\omega_i^2}\sum_{m=k}^{j-1}a_{m,k}^{(i)}\right)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)}\equiv 0$ при $k>j$. У подальших розрахунках покладемо $a_{0,0}^{(i)}=1,\ a_{j,0}^{(i)}=0,\ j\geq 1, i=1,2$.

Невідомі $A_n^{(1)},B_n^{(1)},A_n^{(2)},B_n^{(2)}$ знайдемо з умов (3) – (7). Розглянемо спочатку змішані умови (3), (4), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$\gamma=0:\ \ T_n^{(1)}=Q_n(\alpha),\ |\alpha|\leq 1;\ \partial_\gamma T_n^{(1)}-BiT_n^{(1)}=0,\ |\alpha|>1\,. \tag{10}$$

Безпосереднє застосування $\cos$-перетворення Фур'є до цих умов неможливе внаслідок їх різнорідності. Тому продовжимо другу умову (10) на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію $g_n(\alpha)$

$$\gamma=0:\ \ \partial_\gamma T_n^{(1)}-BiT_n^{(1)}=\begin{cases}g_n(\alpha),\ |\alpha|\leq 1;\\ 0,\ |\alpha|>1.\end{cases} \tag{11}$$

Після застосування до (11) $\cos$-перетворення Фур'є, отримаємо

$$\partial_\gamma\overline{T}_n^{(1)}-Bi\overline{T}_n^{(1)}=\overline{g}_n(\xi),\ \gamma=0\,, \tag{12}$$

де $\overline{g}_n(\xi)=\int\limits_0^1 g_n(\alpha)\cos(\alpha\xi)d\alpha$. Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та $\cos$-перетворення Фур'є до умов (5)–(6), отримаємо

$$\overline{T}_n^{(1)}=\overline{T}_n^{(2)},\ \ \tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\gamma\overline{T}_n^{(1)}=\partial_\gamma\overline{T}_n^{(2)},\ \ \gamma=\gamma_1; \tag{13}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty}\overline{T}_n^{(2)}(\xi,\gamma)=\lim_{\gamma\to\infty}\partial_\gamma\overline{T}_n^{(2)}(\xi,\gamma)=0\,. \tag{14}$$

З вигляду фундаментальних розв'язків (9) та умов (14) випливає, що $B_n^{(2)}\equiv 0$. З умов (12), (13) знайдемо решту невідомих у вигляді рекурентних співвідношень

$$A_n^{(1)} = \frac{-c_{n,1}(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1)\exp(\omega_1\gamma_1) + (\omega_1 - Bi)(\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3})}{(\omega_1 + Bi)\left(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\right)\exp(\omega_1\gamma_1) + (\omega_1 - Bi)\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\right)\exp(-\omega_1\gamma_1)};$$

$$B_n^{(1)} = \frac{c_{n,1}(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1)\exp(-\omega_1\gamma_1) + (\omega_1 + Bi)(\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3})}{(\omega_1 + Bi)\left(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\right)\exp(\omega_1\gamma_1) + (\omega_1 - Bi)\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\right)\exp(-\omega_1\gamma_1)};$$

$$A_n^{(2)} = \frac{c_{n,3} - \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\exp(\omega_1\gamma_1)B_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1\exp(-\omega_1\gamma_1)A_n^{(1)}}{\omega_2\exp(-\omega_2\gamma_1)}, \tag{15}$$

де

$$c_{n,1} = \overline{g}_n(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{G}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{W}_j^{(1)}(0)\right];$$

$$c_{n,2} = \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j^{(2)}(\gamma_1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)}W_j^{(1)}(\gamma_1)\right];$$

$$c_{n,3} = \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)\tilde{G}_j^{(2)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)}A_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)}B_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{W}_j^{(1)}(\gamma_1)\right];$$

$$G_j^{(i)}(\gamma) \equiv G_j^{(i)}(\xi,\gamma),\ W_j^{(i)}(\gamma) \equiv W_j^{(i)}(\xi,\gamma),\ \tilde{G}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma G_j^{(i)}(\xi,\gamma),\ \tilde{W}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma W_j^{(i)}(\xi,\gamma).$$

Повернемося до змішаних умов (10). Враховуючи подання (11) та формули обернення $\cos$-перетворення Фур'є, ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \xi^{-1}\overline{g}_n(\xi)\left[1 + f(\xi)\right]\cos(\xi\alpha)d\xi = -Q_n(\alpha) - \int_0^\infty F_n(\xi)\cos(\xi\alpha)d\xi,\ |\alpha| \le 1; \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \overline{g}_n(\xi)\cos(\xi\alpha)d\xi = 0,\quad |\alpha| > 1,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

де

$$f(\xi) = \frac{\left(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\left(\omega_1 - \xi + Bi\right) - \left(\omega_1 + \xi - Bi\right)\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\exp(-2\omega_1\gamma_1)}{\left(\omega_1 + Bi\right)\left(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T\omega_1\right) + \left(\omega_1 - Bi\right)\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\exp(-2\omega_1\gamma_1)};$$

$$F_n(\xi) = \frac{\tilde{c}_{n,1}\left[\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\exp(-\omega_1\gamma_1) - (\omega_2 + \tilde{\lambda}_T\omega_1)\exp(\omega_1\gamma_1)\right] + 2\omega_1\left(c_{n,2}\omega_2 + c_{n,3}\right)}{\left(\omega_1 + Bi\right)\left(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\exp(\omega_1\gamma_1) + \left(\omega_1 - Bi\right)\left(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T\omega_1\right)\exp(-\omega_1\gamma_1)};$$

$$\tilde{c}_{n,1} = -\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{G}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)\tilde{W}_j^{(1)}(0)\right].$$

Для побудови розв'язку парних інтегральних рівнянь (18), (19) скористаємося методикою, описаною в [5]. Для цього запишемо шукану функцію $\overline{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана

$$\overline{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} J_{2k}(\xi). \tag{18}$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитися, що рівняння (17) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (16) після перетворень отримуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k}, \tag{19}$$

де

$$\tilde{a}_{n,k} = a_{n,k}(2k)^{-1/2};$$

$$b_{m,k} = 2\sqrt{2m}\sqrt{2k}\int_0^{\infty} \xi^{-1} f(\xi) J_{2m}(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi;$$

$$c_{n,k} = 2\sqrt{2k}\int_0^{\infty}\left[-\xi^{-1/2}\overline{q}_n(\xi) + \xi^{-1}F_n(\xi)\right] J_{2k}(\xi) d\xi;$$

$$\overline{q}_n(\xi) = \int_0^{\infty} Q_n(\alpha)\cos(\alpha\xi) d\alpha.$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [9], можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} \left(b_{m,k}\right)^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{n,k}\right)^2 < \infty, \; n = 0,1,2,\dots \; . \tag{20}$$

У роботі [10] показано, що виконання умов (20) свідчить про квазірегулярність систем (19) і забезпечує збіжність числової процедури редукції.

Знаходження невідомих $\tilde{a}_{n,k}$ із систем (19) завершує побудову розв'язку задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та півпросторі розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau) = \lambda \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} \overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)\cos(\xi\alpha) d\xi\right] L_n(\lambda\tau), \quad i = 1,2\,. \tag{21}$$

Напружено-деформований стан у півпросторі з покриттям, зумовлений температурним полем (21), знайдемо за умови, що поверхня покриття $\gamma = 0$ вільна від навантажень, на безмежності переміщення та напруження дорівнюють нулю, а на поверхнях поділу матеріалу покриття та півпростору виконуються умови ідеального механічного контакту.

Таким чином [6], задача полягає у відшуканні розв'язку двох рівнянь Пуассона відносно ключових функцій $\theta^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau) = \operatorname{div}\vec{\mathbf{U}}^{(i)}, i = 1,2$ – об'ємного розширення і $w^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau), i = 1,2$ – нормальних компонент вектора пружного переміщення $\vec{\mathbf{U}}^{(i)}$:

$$\Delta\theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)}\left(3 - 4\kappa_i^{-2}\right)\Delta T^{(i)}; \; \Delta w^{(i)} = \left(1 - \kappa_i^2\right)\partial_\gamma\theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)}\left(3\kappa_i^2 - 4\right)\partial_\gamma T^{(i)}, \; i = 1,2 \tag{22}$$

при крайових умовах

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha,\, 0,\tau) = 0\,, \; \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha,\, 0,\tau) = 0\,; \tag{23}$$

умовах на нескінченності

$$\lim_{\alpha,\gamma\to\infty}\theta^{(2)}(\alpha,\gamma,\tau)=\lim_{\alpha,\gamma\to\infty}w^{(2)}(\alpha,\gamma,\tau)=0 \tag{24}$$

і умовах спряження

$$w^{(1)}(\alpha,\gamma_1,\tau)=w^{(2)}(\alpha,\gamma_1,\tau),\ u^{(1)}(\alpha,\gamma_1,\tau)=u^{(2)}(\alpha,\gamma_1,\tau);$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\rho,\gamma_1,\tau)=\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\rho,\gamma_1,\tau),\ \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha,\gamma_1,\tau)=\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha,\gamma_1,\tau). \tag{25}$$

Тут $\kappa_i^2=(\lambda_i+2\mu_i)/\mu_i$; $\alpha_T^{(i)}$, λ_i, μ_i – відповідно коефіцієнт лінійного температурного розширення та сталі Ляме матеріалу покриття та півпростору.

Після застосування до рівнянь (22) інтегрального перетворення Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є отримаємо їх розв'язок [6]

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=C_n^{(i)}(\xi)\exp(-\xi\gamma)+D_n^{(i)}(\xi)\exp(\xi\gamma)+\alpha_T^{(i)}\left(3-4\kappa_i^{-2}\right)\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma).$$

$$\overline{w}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=F_n^{(i)}(\xi)\exp\left(-\xi\gamma\right)+H_n^{(i)}(\xi)\exp\left(\xi\gamma\right)+$$

$$+\frac{\gamma}{2}(1-\kappa_i^2)\left[C_n^{(i)}(\xi)\exp(-\xi\gamma)+D_n^{(i)}(\xi)\exp(\xi\gamma)\right]+\frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i}\left(3-4\kappa_i^{-2}\right)d_\gamma\tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma),$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)-\overline{T}_{n-1}^{(i)}(\xi,\gamma),\ n=1,2,...;\ \tilde{T}_0^{(i)}(\xi,\gamma)=\overline{T}_0^{(i)}(\xi,\gamma)$.

Враховуючи умови (24), знайдемо, що

$$D_n^{(2)}=H_n^{(2)}\equiv 0.$$

Решту невідомих знайдено із трансформованих крайових умов (23) та умов спряження (25). Оскільки серед них немає умов змішаного типу, то алгоритм знаходження невідомих є традиційним і в роботі не наводиться.

Остаточний розв'язок задачі (22)–(25) подається у вигляді

$$\theta^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty\overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\gamma)\cos(\xi\alpha)d\xi\right]L_n(\lambda\tau);$$

$$w^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty\overline{w}_n^{(i)}(\xi,\gamma)\cos(\xi\alpha)d\xi\right]L_n(\lambda\tau).$$

Компонента вектора пружного переміщення $u^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)$ визначається з рівності

$$u^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty\xi^{-1}\left[\overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\gamma)-d_\gamma\overline{w}_n^{(i)}(\xi,\gamma)\right]\sin(\xi\alpha)d\xi\right]L_n(\lambda\tau),$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля-Неймана.

Числовий розрахунок термонапруженого стану в півпросторі з покриттям проведено у випадку, коли температура смуги на поверхні покриття задається співвідношенням

$$Q(\alpha,\tau)=q^{*}\times(1-\exp(-\tau_0\tau)),$$

де q^{*} – величина, що має розмірність температури. Множник $1-\exp(-\tau_0\tau)$ в цій умові слугує для її узгодження з нульовими початковими умовами, параметр τ_0 при цьому дає змогу змінювати час виходу температурного навантаження на стаціонарне значення.

Числові розрахунки виконувались для основи, виготовленої із титанового стопу й покриття із кераміки, теплофізичні властивості яких [11] наведено в табл.1.

Таблиця 1

Термомеханічні властивості матеріалів покриття та півпростору

	$a_T^{(i)}$ (м^2/сек)	$\lambda_T^{(i)}$ (Вт/(м·К))	$\alpha_T^{(i)}$ (1/К)	E_i (ГПа)	ν_i
$i=1$ (Ti-6Al-4V)	4.92×10^{-7}	1.21	5.8×10^{-6}	348.4	0.24
$i=2$ (Si_3N_4)	2.61×10^{-6}	6.2	8.86×10^{-6}	105.6	0.29

На рис.1 наведено результати розрахунку знерозміреної температури $T^*(\alpha,\gamma,\tau)=T^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)/q^*$ на поверхнях $\gamma=const$ при $Bi=1$, $\gamma_1=0{,}1$ у момент часу $\tau=2$. При утриманні 50 членів ряду за поліномами Лагерра та 20 рівнянь у системах (19) похибка при задоволенні крайових умовах не перевищує 1%, а незначна осциляція розв'язку на поверхні $\gamma=0$ пояснюється ефектом Гіббса [10] при числовому розрахунку інтегралів (21). Як бачимо з рисунка, в областях, розташованих під поверхнею нагрівання, виникають великі градієнти температури, пов'язані з різнорідністю умов. Як свідчать результати розрахунків для інших значень часової змінної τ, така картина має місце впродовж усього перехідного періоду і зберігається в стаціонарному режимі.

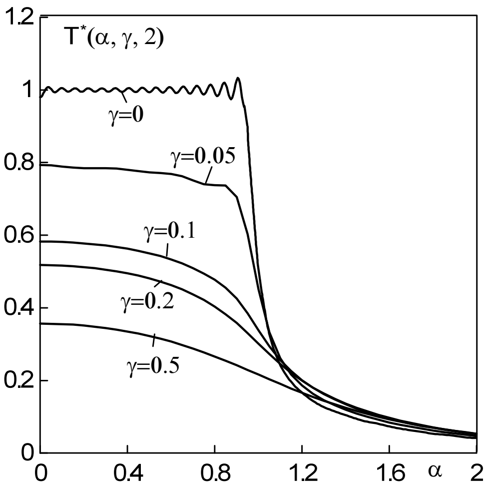

Рисунок 1. Розподіл температури на різних поверхнях $\gamma=const$

Figure 1. Temperature distribution on different surfaces $\gamma=const$

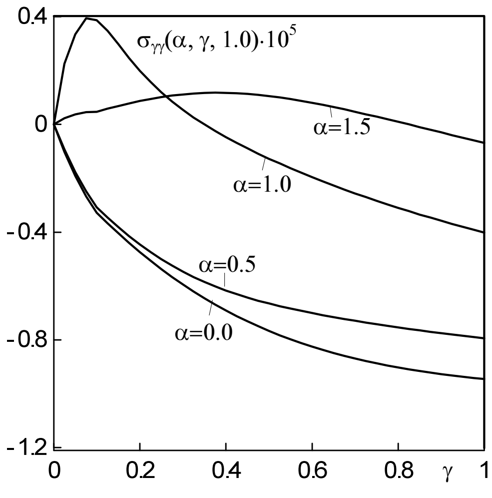

Рисунок 2. Розподіл нормальних напружень для різних α

Figure 2. Distribution of normal stress for different α

На рис.2 зображено розподіл знерозмірених нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)=\sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha,\gamma,\tau)/\mu_2$ за змінною γ для різних α та Bi при $\tau=1$. Як випливає з наведеного, рівень нормальних напружень із віддаленням від центру ділянки нагріву знижується. В областях, розташованих під областю нагріву ці напруження скрізь стискуючі, а в областях поза зоною нагріву змінюють знак. Причому максимального додатного значення набувають на поверхні поділу матеріалів покриття та основи під лінією $\alpha = 1$.

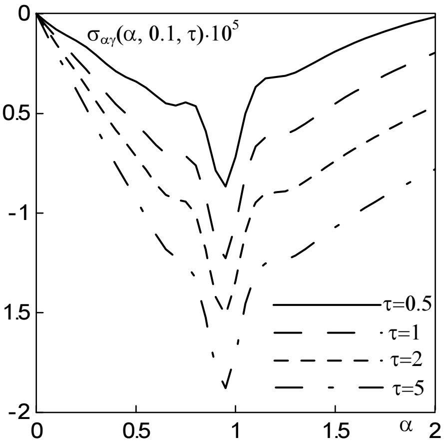

Рисунок 3. Розподіл дотичних напружень на поверхні поділу матеріалів покриття та півпростору в різні моменти часу

Figure 3. Distribution of tangential stresses at the interface of coating materials and half-spaces at different times

Трансформація в часі знерозмірених дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \mu_2$ на поверхні між покриттям та основою при $Bi = 1$ зображена на рис.3. Як і слід було очікувати, максимального за модулем значення ці напруження досягають поблизу лінії поділу крайових умов (в областях із найбільшим градієнтом температури) та з плином часу зростають.

Висновки. Із використанням інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є побудовано розв'язок плоскої квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям зі змішаними крайовими умовами нагрівання. Врахування змішаних крайових умов під час розв'язання призводить до послідовностей парних інтегральних рівнянь, які із використанням методу рядів Неймана зводяться до безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь. Особливістю отриманих систем є можливість довести їх квазірегулярність і, відповідно, обґрунтувати збіжність методу редукції. Наведено результати числового аналізу термонапруженого стану в півпросторі, виготовленого із титанового сплаву та покриття із кераміки.

Conclusions. Using the Fourier and Laguerre integral transformations the solution of the plane quasi-static thermoelasticity problem for the coated half-space with mixed boundary heating conditions had been constructed. Considering the mixed boundary conditions while solving results in sequences dual integral equations, using by the method of Neumann series are reduced to infinite systems of linear algebraic equations. The characteristic of the obtained systems is the possibility to prove their quasi-regularity and therefore justify the convergence of the method of reduction. Calculations were carried for the half-space made of titanium alloy and ceramic coating.

Список використаної літератури

1. Коляно, Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела [Текст] / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Sneddon, I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory [Text] / I. Sneddon. // North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1966. – 282 p.
3. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел [Текст] / Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
4. Mandrik, P.A. Solution of a Heat Equation of Hyperbolic Type with Mixed Boundary Conditions on the Surface of an Isotropic Half-Space [Text] / P.A. Mandrik // Differential Equations. - 2002. – 38. – No.7. – P.1054–1057.
5. Galazyuk, V.A. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions [Text] / V.A. Galazyuk, I.M. Turchin // International Applied Mechanics. – 1998. – V.34, No.9. – P.886–893.
6. Сулим, Г.Т.Осесиметричний квазістатичний термонапружений стан у півпросторі з покриттям [Текст] / Г.Т. Сулим, І.М. Турчин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, №4. – С.85–95.
7. Turchin, I.M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate [Text] / I.M. Turchin // Journ. of Eng. Physics and Thermoph.- 2012. – Vol. 85, Iss. 6. – P.1453–1462.

8. Снеддон, И. Преобразования Фурье [Текст] / И. Снеддон. - М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
9. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая [Текст] / Г.Н. Ватсон. - М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 798 с.
10. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л.В. Канторович., В.И. Крылов. – М.-Л.: Физматлит, 1962. – 708 с.
11. Taya, M. Metal Matrix Composites - Thermomechanical Behavior [Text] / M. Taya, R.J. Arsenault - Pergamon Press: New York, 1989. – 264 p.

Отримано 19.02.2015