Бабич Д. Біфуркаційна стійкість сферичних оболонок при розсіяному тріщинотворенні в матеріалі зсувом / Д. Бабич, Т. Дородних // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 78. — № 2. — С. 7-19. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Д. Бабич, докт. техн. наук, Т. Дородних, канд. фіз.-мат. наук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

БІФУРКАЦІЙНА СТІЙКІСТЬ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ РОЗСІЯНОМУ ТРІЩИНОТВОРЕННІ В МАТЕРІАЛІ ЗСУВОМ

Резюме. *З використанням структурно-ймовірнісного підходу до моделювання сумісного процесу тріщиноутворення й деформування матеріалів розроблено методику розв'язання задач біфуркаційної стійкості тонкостінних елементів конструкцій із пошкоджуваних матеріалів при одноразовому та повторюваному (циклічному) навантаженні. На прикладі рівномірно обтисненої сферичної оболонки показано, що при повторюваному навантаженні тонкостінні елементи конструкцій із пошкоджуваних зсувом матеріалів можуть втрачати стійкість при навантаженнях, менших верхніх критичних. Неоднозначність критичних навантажень пов'язана із залежністю процесу накопичення пошкодженості в матеріалі тонкостінних конструкцій від рівня та характеру навантаження. Зазначене явище може бути однією з можливих причин розкиду експериментальних даних та розбіжності теоретичних і експериментальних результатів з визначення критичних навантажень для сферичних і циліндричних оболонок.*

Ключові слова: *тріщинотворення зсувом, циклічне навантаження, стійкість, сферична оболонка.*

D. Babich, T. Dorodnykh

BIFURCATION STABILITY OF SPHERICAL SHELLS UNDER DISPERSED CRACKING IN SHEAR MATERIALS

Summary. *The present paper deals with the method for solution of the bifurcation stability of thin-walled structural elements of damage materials under single and cyclic loading. This method is developed by using a structural-probabilistic approach to modeling joint processes of cracking and deformation of materials. The phenomenon of the bifurcation stability in elastic part of deformation of thin-walled structures of damaging materials under cyclic loading, the values of which are smaller than corresponding static critical efforts, are considered. The main purpose of solving such problems is to determine of the limiting number of a given load, at which the structure loses stability. It should be mentioned, that the possibility of loss stability of thin-walled structures at loads less than the upper critical is related to the type of failure of the material, such as destruction by rupture or destruction by shear. In the case of destruction by rupture, when microcracks are parallel to the direction of compressive stress, this phenomenon does not take place, because in this type of damage under repeated compression of the same load a material behaves as a continuous medium. The density of microcracks is not increased. This type of stability loss is possible for thin-walled structures made of materials which are damaged by shear, when microcracks are formed on the sloping planes to the direction of the load. Under such type of microfractures, the effective cross-sectional area decreases. It leads to increase of true tangential stresses in the material under constant conditional stresses of repetitive loading.*

The proposed method consists of the following: construction of the constitutive equations for the damaged material by using the Eshelbi method for determining the effective elastic properties of the damaged medium; the model of microdamages accumulation basing on the Treska Saint-Venant, fracture criterion which is formulated in full true tangential stresses in random sections of structural elements and two-parameter power law distribution of limit values of shear microstrength of structural elements and procedures for solving problems bifurcation stability of spherical shells. It should be noted, that the true stresses differ from the conditional in that the former refer to the areas of the damaged medium whereas the latter to the areas of the continuous medium.

On an example of uniformly compressed spherical shell it is shown that the structire can lose stability under loads smaller than the upper critical. From the expression for the critical stress it follows that the ambiguity of critical loads depends on the density of the accumulated damages in material in thin-walled structures, which is associated with the nature of the load. This phenomenon could be one of the possible reason of dispersion in the experimental data and the discrepancy between theoretical and experimental results. For steel spherical shell 15X2MF numerical results are obtained.
Key words: *shear cracking, cyclic loading, stability, spherical shell.*

Вступ. Відомо [1–6], що реальні конструкційні матеріали в процесі навантаження пошкоджуються шляхом утворення розсіяних по об'єму мікротріщин. Пошкодженість призводить до зміни деформаційних і міцнісних властивостей матеріалу. Врахування таких змін при розрахунку несучої здатності інженерних конструкцій за умов порушення цілісності або втрати стійкості основної форми рівноваги є практично важливими й актуальними завданнями в різних областях техніки. Разом з тим у науковій літературі недостатньо висвітлені результати з вивчення впливу набутих й процесі навантаження мікродефектів у структурі матеріалу на стійкість тонкостінних конструкцій. У цьому відношенні в основному проводилися дослідження впливу недосконалостей в геометричній формі тонкостінних конструкцій, які стимулювалися прагненням пояснити суттєві розбіжності в теоретичних і експериментальних значеннях критичних навантажень [7].

Разом з тим з утворенням недосконалостей в структурі матеріалу у процесі навантаження пов'язані не менш важливі особливості явища втрати стійкості тонкостінних конструкцій, які також можуть бути причиною зазначених розбіжностей і відомого розкиду експериментальних даних по їх стійкості [7].

Метою роботи є вивчення явища біфуркаційної стійкості в пружній області деформування тонкостінних конструкцій при пошкоджуваності матеріалів за повторюваного навантаження силами, меншими за значеннями відповідних верхніх статичних критичних зусиль.

Доцільність в розгляді такої задачі пов'язана з тим, що втрата стійкості однакових конструкцій із пошкоджуваного матеріалу можлива при різних значеннях повторюваного навантаження, менших верхнього критичного, внаслідок деградації матеріалу за рахунок розсіяного розтріскування структурних елементів, що призводить до зменшення жорсткості матеріалу.

Вже згадана задача аналогічна задачі про втомну міцність конструкцій з тією різницею, що в одному випадку втрата несучої здатності пов'язана зі зміною розрахункової (експлуатаційної) геометричної форми конструкції, в іншому – з втратою цілісності конструкції, тобто з руйнуванням матеріалу.

Втрата стійкості однакових конструкцій можлива при різних, але цілком певних комбінаціях критичних значень навантаження і відповідних їм густин мікротріщин у матеріалі. Меншим значенням критичного навантаження будуть відповідати більші значення густини мікродефектів, які досягаються за рахунок повторення цього навантаження.

Таким чином, втрата стійкості тонкостінної конструкції з пошкоджуваного матеріалу залежить від характеру навантаження (одноразове статичне або повторюване меншого рівня) і в зв'язку з цим верхнє статичне критичне зусилля слід вважати умовним критерієм несучої здатності конструкцій одноразового використання. Для стисливих конструкцій багаторазового використання виникає необхідність у дослідженнях зазначеного характеру. Основною метою розв'язку подібних задач є визначення граничної кількості повторюваного навантаження (довговічність за умовами стійкості), при якій конструкція втратить стійкість.

Необхідно зазначити, що можливість втрати стійкості тонкостінних конструкцій при навантаженнях, менших верхніх критичних, пов'язана з характером руйнування структурних елементів матеріалу – відривом або зсувом. У разі утворення мікротріщин відривом, паралельних до напрямку діючих стискаючих напружень, вказане явище не має місця, оскільки при пошкоджуваності такого виду при повторюваному стисканні матеріал поводиться як суцільний і густина мікродефектів не збільшуватиметься. Зазначений вид втрати стійкості можливий для тонкостінних конструкцій із матеріалів пошкоджуваних шляхом утворення мікротріщин зсувом на похилих площадках до напрямку дії навантаження. При такому виді мікроруйнування зменшується ефективна площа перетинів, що призводить до підвищення істинних дотичних напружень у матеріалі при постійних умовних напруженнях повторюваного навантаження.

Методика розв'язування вказаної задачі об'єднує запропоновані раніше підхід до побудови рівнянь стану для пошкоджуваних матеріалів [8–10] і структурно-ймовірнісну модель накопичення пошкоджень у матеріалі при відповідному варіанті повторюваного навантаження [11,12] зі способом розв'язування задач про біфуркаційну стійкість тонкостінних конструкцій для фізично нелінійних матеріалів [7,8,13].

Рівняння стану пошкоджуваних зсувом матеріалів. Згідно з роботами [8–10] зв'язок між макронапруженнями й макродеформаціями для неперервного середовища, що моделює ізотропний тріщинуватий матеріал, у загальному випадку має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\sigma_{kl}\,, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{1}$$

де напруження σ_{ij} вважаються заданими в лабораторній системі координат $0x_1x_2x_3$, пов'язаній з представницьким об'ємом, а деформації підлягають осередненню. Ефективні податливості α_{ijkl} пошкодженого середовища визначаються енергетичним методом [4], який грунтується на принципі еквівалентності енергії пошкодженого середовища ($W^0 + W'$) і неперервного середовища (W), що моделює перше

$$W = 1/2a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = W^{0} + W', \;\; W^{0} = 1/2a^{0}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{2}$$

Тут W^0 – густина енергії неушкодженого середовища; W' – приріст густини звільненої енергії деформування пошкодженого середовища, пов'язаний з порушенням зв'язків при нормальному відриві й зсуві поверхонь мікротріщин.

У [9–12] із використанням моделі накопичення пошкоджень Даніельса [2] викладено процедуру побудови співвідношень для густини звільненої внутрішньої енергії при тріщиноутворенні в матеріалі відривом. У роботі [8] вказана процедура, поширена на випадок мікроруйнувань зсувом при стисканні. В цьому випадку для опису розподілу мікродефектів за орієнтаціями використовується критерій, що формулюється щодо повних істинних (істинні напруження $\bar{\sigma}_{r3}$ відрізняються від умовних σ'_{r3} тим, що перші відносяться до площадок пошкодженого мікротріщинами середовища, другі – до площадок у суцільному середовищі) дотичних напружень $\bar{\tau}_3$ у випадкових перетинах структурних елементів

$$\bar{\tau}_3 = \sqrt{(\bar{\sigma}_{13})^2 + (\bar{\sigma}_{23})^2} \ge \tau\,, \tag{3}$$

де τ – випадкова величина, що означає межу зсувної міцності структурних елементів; $\bar{\sigma}_{i3}$ – проекції істинного дотичного напруження $\bar{\tau}_3$ у локальній системі координат тріщини.

Вираз для густини звільненої енергії при мікроруйнуванні зсувом згідно з аналогією з відривним мікроруйнуванням має вигляд [8]

$$W' = \frac{1}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P\left(\bar{\tau}_3\right)B'_k \sin\vartheta\, d\vartheta\; d\psi\; d\phi, \tag{4}$$

де $B'_k = A'_k\left(\sigma'_{k3}\right)^2$ ($i = 1,2$) , $A'_1 = A'_2 = \dfrac{4\left(1-\nu_0{}^2\right)}{\pi\left(2-\nu_0\right)E_0}$, при $a' = b'$, E_0, ν_0 – модуль Юнга і кофіцієнт Пуасона суцільного матеріалу. Символом σ'_{k3} $\left(i = 1,2\right)$ позначені компоненти компоненти тензора локальних умовних напружень у власній системі координат тріщини $0x'_1x'_2x'_3$, в якій осі $0x'_i$ $\left(i = 1,2\right)$ пов'язані з великою (a') і меншою (b') півосями еліптичних тріщин; вісь $0x'_3$ направлена по нормалі до поверхонь мікротріщин; вісь $0x'_3$ направлена по нормалі до поверхонь мікротріщин. Умовні локальні напруження σ'_{k3} $\left(i = 1,2\right)$ і задані в тілі середні напруження σ_{kl} пов'язані перетворенням

$$\sigma'_{i3} = \sigma_{kl}\alpha'_{ik}\alpha'_{3l}, \tag{5}$$

де α'_{ik} – зумовлені кутами Ейлера напрямні косінуси власної системи координат деякої тріщини відносно лабораторної системи координат. Вирази напрямних косинусів представлені в [8,10]. Символом $P\left(\bar{\tau}_3\right)$ в (4) позначена відносна частка зруйнованих зсувом структурних елементів матеріалу в одинці об'єму. Розподіл випадкових значень меж зсувної мікроміцності структурних елементів описується двопараметричним степеневим законом у вигляді [11,12]

$$F(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\alpha}. \tag{6}$$

У формулі (6) введені позначення: τ – випадкові значення меж міцності структурних елементів при зсуві; τ_1, α – відповідно максимальне значення зазначених величин і коефіцієнт розсіювання меж міцності в області навантаження, що розглядається.

Локальні істинні дотичні напруження наближено представляються співвідношенням

$$\bar{\tau}_3 = \tau'_3 / \left[1 - p\left(\bar{\tau}_3\right)\right]. \tag{7}$$

Тут $p\left(\bar{\tau}_3\right) = F\left(\bar{\tau}_3\right)$ – сумарні відносні частки площі перетину зруйнованих структурних елементів шляхом зсуву напруженнями $\bar{\tau}_3$ у перетинах представницького об'єму**.** Поверхнева $p\left(\bar{\tau}_3\right)$ і об'ємна концентрації) мікроруйнувань $P\left(\bar{\tau}_3\right) = N / N_0$, де N_0, N – кількість зруйнованих і загальна кількість структурних елементів в одиниці об'єму, збігаються $p\left(\bar{\tau}_3\right)=P\left(\bar{\tau}_3\right)$ [8–10]. Густина мікродефектів, створених зсувом істинним дотичним напруженням $\bar{\tau}_3$, визначатиметься співвідношенням

$$p(\bar{\tau}_3)=\left(\frac{\bar{\tau}_3}{\tau_1}\right)^{\alpha}. \tag{8}$$

Локальні істинні дотичні напруження, що викликають зсувні мікроруйнування, через відповідні умовні напруги представляються формулою

$$\bar{\tau}_3=\frac{\sqrt{\sigma_{13}'^2+\sigma_{23}'^2}}{1-p\left(\bar{\tau}_3\right)}. \tag{9}$$

Для визначення густини мікродефектів при прогресуючій пошкоджуваності зсувом потрібні параметри функції розподілу мікроміцності τ_1, α. В [11,12] запропоновано опосередкований спосіб визначення параметрів функції розподілу меж міцності структурних елементів із використанням експериментальних данних для механічних параметрів матеріалу, отриманих на макрозразках.

Якщо обмежитися розглядом втрати стійкості оболонок у пружній області деформування, то для визначення параметрів функції розподілу зсувної мікроміцності в інтервалі можливих критичних напружень $0<\sigma_{11}^0\leq\sigma_b$ (σ_b – умовна межа нормальної міцності) будуть потрібні лише значення зсувної межі пропорційності $\sigma_{0,02}$ і відповідний коефіцієнт варіації $w_{0,02}$. У випадку напруг, менших межі пропорційності матеріалу $\sigma_{11}^0\leq\sigma_{0,02}$, параметри функції розподілу зсувної мікроміцності структурних елементів згідно з [8,11,12], будуть визначатися виразами вигляду

$$\alpha=-1+\frac{1}{w_{0,02}}\sqrt{1+w_{0,02}^2},\ \tau_1=\tau_{0,02}\frac{\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha}. \tag{10}$$

Якщо до початку деформування в матеріалі існували початкові зсувні мікропошкодження густиною p_0, то при монотонному (статичному) підвищенні умовних напружень до значень τ_3' концентрація мікродефектів у випадковому об'ємі тіла визначатиметься виразом

$$p=p_0+\left(1-p\right)F(\bar{\tau}_3) \tag{11}$$

У розгорнутому вигляді співвідношення (11) з урахуванням (7), (8) набуде вигляду

$$\left(p-p_0\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-p\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}=\frac{\tau_3'}{\tau_1} \tag{12}$$

Технічні постійні пошкодженого матеріалу через податливості визначаються співвідношеннями [8,9]

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii};\ -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii};\ \frac{1}{G_{ij}} = a_{ijij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{13}$$

де E_{ii}, G_{ij}, ν_{ij} – модулі пружності, модулі зсуву й коефіцієнти Пуассона, а $a_{ijkl} = a^0_{ijkl} + \overline{a}_{ijkl}$, де a^0_{ijkl} – податливості неушкодженого середовища; $\overline{a}_{ijkl}$ – результат усереднення за орієнтаціям густини звільненої внутрішньої енергії W' матеріалу [8,10].

Параметри пружності для пошкоджуваного матеріалу при двовісному напруженому стані. В задачі про стійкість ізотропної обтисненої зовнішнім тиском сферичної оболонки використовуються січні пружні характеристики $E_c = E_{11} = E_{22}$, $\nu_c = \nu_{12} = \nu_{21}$ із (13) при двовісному стисканні. Локальні умовні дотичні напруження при двовісному напруженому стані ($\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$) згідно з (5), визначаються формулою

$$\begin{gathered} \tau_3' = \sqrt{Q},\ \ \mathrm{Q} = \sigma_{11}^2 \left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\cos^2\vartheta\right)\sin^2\psi\sin^2\vartheta + \\ + \sigma_{22}^2 \left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\cos^2\vartheta\right)\cos^2\psi\sin^2\vartheta - 2\sigma_{11}\sigma_{22}\sin^2\psi\cos^2\psi\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta \end{gathered} \tag{14}$$

При обтисненні оболонки радіуса R і товщини h тиском інтенсивністю q маємо

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = qR/2h,\ \tau_3' = \sigma_{11}\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{qR}{2h}\sin\vartheta\cos\vartheta \tag{15}$$

Параметри E_c, ν_c залежно від концентрації й орієнтації тріщин зсуву в пошкоджуваному матеріалі визначаються з використанням співвідношень (7), (10) (14).

При стисканні багатьом матеріалам притаманні мікроруйнування зсувом, що відбуваються в перетинах структурних елементів, орієнтованих під кутом $\theta = \pi/4$ до напрямку дії стискаючих напружень. У цих перетинах встановлюються максимальні дотичні напруження $\tau'_{3\max} = \tau'_{\theta=\pi/4} = \sigma_{ii}/2$. Вказаний механізм зсувного мікроруйнування описується критерієм максимальних дотичних напружень, який при двовісному рівномірному напруженому стані ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$) згідно з (3) і (15) представляється співвідношенням

$$\overline{\tau}_3 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{11}}{1 - p\left(\overline{\tau}_3\right)} = \frac{1}{2}\overline{\sigma}_{11} \geq \tau\,. \tag{16}$$

Параметри функції розподілу мікроміцності (8) у цьому випадку визначаються за формулами (10) із використанням стандартних даних, отриманих для вибірки зразків матеріалу при одновісному стисканні: $w_{0,02}, \tau_{0,02} = \sigma_{0,02}/2$.

Густина звільненої енергії при утворенні в перетинах структурних елементів під кутом $\theta = \pi/4$ кругових мікротріщин відповідно до співвідношень (4), (14) – (16) після інтегрування за кутом φ представляється у формі

$$W' = \frac{1}{4\pi} A_1' \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\bar{\sigma}_{11}}{2\tau_1} \right)^{\alpha} \left[\frac{1}{2} \sigma_{11}^2 \sin\psi^2 \left(\cos\psi^2 + \frac{1}{2} \sin\psi^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma_{22}^2 \cos\psi^2 \left(\sin\psi^2 + \frac{1}{2} \cos\psi^2 \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} \sigma_{11} \sigma_{22} \sin^2\psi \cos^2\psi - \right] \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi. \qquad (17)$$

В результаті інтегрування вираз (17) набуде вигляду

$$W' = A_1' \left[\frac{\bar{\sigma}_{11}}{2\tau_1 (1-p)} \right]^{\alpha} \left[\frac{5}{32} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - \frac{1}{32} \sigma_{11} \sigma_{22} \right] \qquad (18)$$

звідки випливає

$$\bar{a}_{1111} = \bar{a}_{2222} = \frac{5}{16} A_1' \left[\frac{\bar{\sigma}_{11}}{2\tau_1 (1-p)} \right]^{\alpha}, \ \bar{a}_{1122} = -\frac{1}{32} A_1' \left[\frac{\bar{\sigma}_{11}}{2\tau_1 (1-p)} \right]^{\alpha}. \qquad (19)$$

Згідно з (13) з урахуванням (19) модуль пружності й коефіцієнт Пуассона мають вигляд

$$E_c = E_0 \left(1 + \frac{5}{4\pi} \frac{1-\nu_0^2}{2-\nu_0} p \right)^{-1}, \ \nu_c = \frac{E_c}{E_0} \left(\nu_0 + \frac{1}{8\pi} \frac{1-\nu_0^2}{2-\nu_0} p \right). \qquad (20)$$

При статичному навантаженні густина мікротріщин обчислюється за формулою

$$p = p_0 + (1-p)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}}{2\tau_1} \right)^{\alpha} \qquad (21)$$

де p_0 – початкова концентрація мікротріщин в матеріалі.

Рівняння біфуркаційної стійкості для сферичної оболонки із пошкоджуваних матеріалів. Постановка задачі про біфуркаційну стійкість сферичної оболонки із пошкоджуваних матеріалів проводиться з використанням гіпотез Кірхгофа–Лява та концепції триваючого навантаження. Для побудови рівнянь пропонується підхід із використанням прямого варіювання нелінійних рівнянь стану для пошкоджуваного матеріалу при плоскому напруженому стані. Зазначені рівняння в повних напружених згину і мембранних деформаціях серединної поверхні відповідно мають вигляд

$$\sigma_{11} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_{11} + \nu_c \varepsilon_{22}), \ \sigma_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_{22} + \nu_c \varepsilon_{11}), \ \sigma_{12} = 2\mu_c \varepsilon_{12} \ ,$$
$$e_{11} = \frac{1}{E_c} (\tilde{\sigma}_{11} - \nu_c \tilde{\sigma}_{22}), \ e_{22} = \frac{1}{E_c} (\tilde{\sigma}_{22} - \nu_c \tilde{\sigma}_{11}), \ e_{12} = \frac{1}{2\mu_c} \tilde{\sigma}_{12} . \qquad (22)$$

Оболонка товщиною h і кривизною $k = 1/R$ відноситься до системи координат $0x_1x_2x_3$, пов'язаної з серединною поверхнею. Координати x_1, x_2, x_3 відраховуються відповідно в меридіональному, коловому та нормальному до серединної поверхні напрямках. Переміщення точок серединної поверхні в зазначених напрямках позначаються буквами u, v, w. Для розглядуваного типу оболонок при розв'язуванні задач стійкості можна скористатися апаратом теорії пологих оболонок [7]. Тоді в рамках гіпотез Кірхгофа-Лява в довільній точці сферичної оболонки повні деформації визначатимуться співвідношеннями

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + x_3 \chi_{ij} \left(i, j = 1,2\right), \tag{23}$$

де вирази для деформацій, кривизн і кручення серединної поверхні мають вигляд

$$e_{11} = u,_1 - kw; e_{22} = v,_2 - kw; e_{12} = u,_2 + v,_1 ; \ \chi_{11} = -w,_{11} ; \chi_{22} = -w,_{22} ; \chi_{12} = -2w,_{12} . \tag{24}$$

Вигляд рівнянь місцевої втрати стійкості оболонок в змішаній формі від властивостей матеріалу не залежить [7]

$$\begin{gathered} M_{11},_{11} + 2M_{12},_{12} + M_{22},_{22} + hk\left(\ \bar{\bar{\sigma}}_{11} + \bar{\bar{\sigma}}_{22} \ \right) + h\left(\sigma_{11}{}^{0} w,_{11} + 2\sigma_{12} w,_{12} + \sigma_{22}{}^{0} w,_{22}\right) = 0, \\ \bar{e}_{11},_{11} + \bar{e}_{22},_{11} - \bar{e}_{12},_{12} = -k(w,_{22} + w,_{11}) . \end{gathered} \tag{25}$$

Тут $M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3, \sigma_{ij}, \bar{\bar{\sigma}}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \chi_{ij}, w$ позначають прирости моментів і напружень в оболонці внаслідок згину, а також деформацій, кривизн і прогинів серединної поверхні в збуреному стані; σ_{ij}^{0} – напруження в основному безмоментному напруженому стані. До цих рівнянь необхідно приєднати вирази для збурень мембранних напружень через функцію напружень

$$\bar{\bar{\sigma}}_{11} = \Phi,_{22} \ \bar{\bar{\sigma}}_{22} = \Phi,_{11} ; \bar{\bar{\sigma}}_{12} = -\Phi,_{12} . \tag{26}$$

Основним завданням при запису в кінематичних змінних рівнянь стійкості (25) для фізично-нелінійних тіл є побудова виразів для прирощення внутрішніх зусиль і моментів, що виникають унаслідок зміни форми рівноваги. Ці вирази залежать від виду нелінійності рівнянь стану і визначаються з використанням варіювання цих рівнянь в околі основного стану рівноваги. Зазначені рівняння в повних напруженнях згину і мембранних деформаціях серединної поверхні відповідно мають вигляд (22).

Прирощення повних напружень і мембранних деформацій визначаються шляхом варіювання в околі основного стану рівнянь (22), що являють собою нелінійні співвідношення відносно напружень і деформацій у зв'язку із залежністю січних характеристик пружності від густини мікротріщин p, пов'язаної з рівнем навантаження. Густина мікроушкоджень матеріалу в кінцевому рахунку визначається компонентами основного напруженого стану σ_{ij}^{0} в силу нескінченно малих, як це випливає із постановки задачі про біфуркаційну стійкість, збурень докритичного напруженого стану при переході в суміжний стан рівноваги. Прирощення повних напружень і мембранних деформацій представляються у вигляді

$$\bar{\sigma}_{11} = \alpha_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \alpha_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + \alpha_{13}\bar{\varepsilon}_{12} , \bar{\sigma}_{12} = \alpha_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + \alpha_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + \alpha_{33}\bar{\varepsilon}_{12} ,. \tag{27}$$

$$\bar{e}_{11} = A_{11}\bar{\tilde{\sigma}}_{11} + A_{12}\bar{\tilde{\sigma}}_{22} + A_{13}\bar{\tilde{\sigma}}\,,\ \bar{e}_{22} = A_{21}\bar{\tilde{\sigma}}_{11} + A_{22}\bar{\tilde{\sigma}}_{22} + A_{23}\bar{\tilde{\sigma}}_{12}\,,$$
$$\bar{e}_{12} = A_{31}\bar{\tilde{\sigma}}_{11} + A_{32}\bar{\tilde{\sigma}}_{22} + A_{33}\bar{\tilde{\sigma}}, \tag{28}$$

де коефіцієнти α_{ij}, A_{ij}, що визначаються співвідношеннями

$$\alpha_{11} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}},\ \alpha_{12} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}},...;\ A_{11} = \frac{\partial e_{11}}{\partial\tilde{\sigma}_{11}},\ A_{12} = \frac{\partial e_{11}}{\partial\tilde{\sigma}_{22}}, \tag{29}$$

мають вигляд

$$\alpha_{11} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{11}}\sigma_{11}{}^0,\ \alpha_{12} = \frac{\nu_c E}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{22}}\sigma_{11}{}^0,\ \alpha_{13} = \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{12}}\sigma_{11}{}^0,$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{12}}\sigma_{22}{}^0\ \alpha_{31} = 2\frac{1}{\mu_c}\frac{\partial\mu_c}{\partial\varepsilon_{11}}\sigma_{12}{}^0,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\nu_c E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{11}}\sigma_{22}{}^0,\ \alpha_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_{22}}\sigma_{22}{}^0,\quad \alpha_{32} = 2\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_{22}}\sigma_{12}{}^0\ ,$$

$$\alpha_{33} = 2\mu_c + 2\frac{1}{\mu_c}\frac{\partial\mu_c}{\partial\varepsilon_{12}}\sigma_{12}{}^0. \tag{30}$$

$$A_{11} = \frac{1}{E_c} + \left(\sigma_{11}^0 - \nu_c\,\sigma_{22}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{11}}\left(\frac{1}{E_c}\right),\ A_{12} = -\frac{\nu_c}{E_c} + \left(\sigma_{11}^0 - \nu_c\sigma_{22}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{22}}\left(\frac{1}{E_c}\right),$$

$$A_{13} = \left(\sigma_{11}^0 - \nu_c\,\sigma_{22}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{12}}\left(\frac{1}{E_c}\right);$$

$$A_{21} = -\frac{\nu_c}{E_c} + \left(\sigma_{22}^0 - \nu_c\,\sigma_{11}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{11}}\left(\frac{1}{E_c}\right),\ A_{22} = \frac{1}{E_c} + \left(\sigma_{22}^0 - \nu_c\,\sigma_{11}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{22}}\left(\frac{1}{E_c}\right),$$

$$A_{23} = \left(\sigma_{22}^0 - \nu_c\,\sigma_{11}^0\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{12}}\left(\frac{1}{E_c}\right)\ ,$$

$$A_{31} = \frac{1}{2}\sigma_{12}^0\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{11}}\left(\frac{1}{\mu_c}\right),\ A_{32} = \frac{1}{2}\sigma_{12}^0\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{22}}\left(\frac{1}{\mu_c}\right),\ A_{33} = \frac{1}{2\mu_c} + \frac{1}{2}\sigma_{12}^0\frac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_{12}}\left(\frac{1}{\mu_c}\right). \tag{31}$$

З урахуванням співвідношень (27)–(31) система рівнянь (25) набуде вигляду

$$D\left[a_1 w,_{1111} + a_2 w,_{1122} + a_3 w,_{2222} + 2a_4 w,_{1112} + 2a_5 w,_{1222}\right] +$$
$$+ T_{11}{}^0 w,_{11} + T_{22}{}^0 w,_{22} + 2T_{12}{}^0 w,_{12} - h\,k\left(\Phi,_{22} + \Phi,_{11}\right) = 0 \tag{32}$$
$$A_1\Phi,_{1111} + A_2\Phi,_{1122} + A_3\Phi,_{2222} - A_4\Phi,_{1112} - A_5\Phi,_{1222} = -E_0 h\,k\left(w,_{22} + w,_{11}\right),$$

де

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} / E_0; \bar{A}_{ij} = E_0 A_{ij};$$

$$a_1 = \bar{\alpha}_{11};\ a_2 = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21} + 2\bar{\alpha}_{33};\ a_3 = \bar{\alpha}_{22};\ \bar{a}_4 = \bar{\alpha}_{13} + \bar{\alpha}_{31};\ \bar{a}_5 = \bar{\alpha}_{23} + \bar{\alpha}_{32};$$

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_{22};\ \bar{A}_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + 2\bar{A}_{33};\ \bar{A}_3 = \bar{A}_{11}; A_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23};\ \bar{A}_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31}.$$

У рівняннях (32) також позначено $D = E_0 h^3 / 12; T_{ij} = \sigma_{ij}^0 h$ – тангенціальні зусилля докритичного напруженого стану; E_0 – модуль пружності неушкодженого матеріалу.

У загальному випадку до рівнянь (32) приєднуються крайові умови, які відповідають характеру закріплення торців оболонки.

При рівномірному обтисненні замкненої сферичної оболонки тиском інтенсивністю q зусилля в основному напруженому стані визначаються співвідношеннями

$$T_{11}^0 = T_{22}^0 = h\sigma_{11}{}^0 = h\sigma_{22}{}^0 = \frac{qR}{2}. \tag{33}$$

Розв’язок системи рівнянь (32) представляється у вигляді

$$w = A\sin kmx_1 \sin knx_2;\ \Phi = B\sin kmx_1 \sin knx_2, \tag{34}$$

де m, n – хвильові числа в меридіональному і коловому напрямках. Критичне значення інтенсивності тиску визначається формулою

$$\bar{q} = \frac{2k}{1+\gamma}\left[Dk^2 m^2\left(a_1 + a_2\gamma + a_3\gamma^2\right)^2 + \frac{E_0 h(1+\gamma)^2}{m^2\left(A_1 + A_2\gamma + A_3\gamma^2\right)}\right]. \tag{35}$$

У випадку $\gamma = n^2 / m^2 >> 1$ мінімальне значення критичного тиску по хвильовому числу n визначається формулою

$$\bar{q} = \frac{2E_0 h^2}{\sqrt{3}R^2}\sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \tag{36}$$

Меридіональне і колове критичні напруження мають вигляд

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \frac{E_0 h}{\sqrt{3}R}\sqrt{\frac{a_3}{A_3}}, \tag{37}$$

де

$$a_3 = \frac{\alpha_{22}}{E_0},\ \alpha_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{E_c}\frac{\partial E_c}{\partial e_{11}^0}\sigma_{11}^0;\ A_3 = E_0 A_{11},\ A_{11} = \frac{1}{E_c} + \left(1-\nu_c\right)\frac{\partial}{\partial \sigma_{11}^0}\left(\frac{1}{E_c}\right)\sigma_{11}^0. \qquad (38)$$

З урахуванням наведених співвідношень при заданих механічних характеристиках для матеріалу і геометричних параметрах оболонки критичні напруження оболонки з урахуванням мікроруйнування знаходяться шляхом розв’язання рівняння (37) з використанням співвідношень (20), (21), (38).

Вираз для критичних напружень (37) у зв'язку із залежністю співвідношень (20), (21) від σ_{11}^0 є нелінійним рівнянням і не дає явної інформації про вплив пошкоджуваності матеріалу на стійкість оболонки. Пряме розв’язування нелінійного рівняння (37) з урахуванням (20), (21), (38) із визначення критичних значень напружень для оболонок заданих геометричних розмірів можна здійснити за допомогою ітераційних методів. Дослідження впливу мікропошкоджуваності матеріалу на стійкість оболонок при рівномірному обтисненні й деяких інших видах навантаження можна проводити також за допомогою зворотного методу, задаючи залежно від мети дослідження значення концентрації мікродефектів або критичних напружень з наступним обчисленням необхідних параметрів.

Аналіз співвідношення (37) показує, що оболонка заданих розмірів ($h/R = const$) втрачає стійкість не при єдиному значенні стискаючих напружень σ_{11}^0. Це явище зумовлене залежністю критичних напружень σ_{11}^0 від густини мікроруйнувань у матеріалі p, з підвищенням якої знижується жорсткість оболонки. Меншим значенням критичних напружень σ_{11}^0 відповідають більші значення p. Неоднозначність явища втрати стійкості оболонки випливає з існування різних комбінацій значень критичного напруження σ_{11}^0 та відповідної густини мікродефектів p_{cr}.

Можливість досягнення різних комбінацій значень стискаючих напружень і густин мікроруйнування, що визначають втрату стійкості, пов'язана з характером процесу накопичення мікродефектів, який залежить від виду та рівня навантаження тіла.

У разі, коли значення p_{cr} не досягається при одноразовому навантаженні, потрібно визначити необхідну для цього кількість стиснень. При заданій відносній товщині оболонки h/R деяке значення густини дефектів p, яке визначається співвідношеннями (20), (21), (37), (38), може досягатися при одноразовому статичному навантаженні напруженнями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ або при повторюваних навантаженнях нижчого рівня.

Припустимо, що оболонка із суцільного ($p_0 = 0$) матеріалу повторно обтиснюється рівномірними напруженнями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. У цьому випадку згідно з (21) в результаті першого обтиснення оболонки в матеріалі утворюється пошкодженість з концентрацією

$$p_1 = \left(1-p_1\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\tau_1}\right)^{\alpha}. \qquad (39)$$

В результаті n-го обтиснення в матеріалі з'являться зруйновані структурні елементи, густина яких визначатиметься співвідношенням

$$p_n = p_{n-1} + \left(1 - p_n\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\tau_1}\right)^{\alpha}. \qquad (40)$$

Тут p_{n-1} – концентрація мікродефектів, що утворилися внаслідок попереднього ($n-1$)-го обтиснення оболонки. Втрата стійкості оболонки настане при N-ому обтисненні, коли прогресуюча концентрація мікротріщин досягне критичного значення $p_N = p_{cr}$, що визначається дійсним коренем рівняння

$$p_{cr} = p_{N-1} + \left(1 - p_{cr}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\tau_1}\right)^{\alpha}. \qquad (41)$$

Зазначеною кількістю обтискань характеризується довговічність оболонки за умовою втрати стійкості. Довговічність можна визначати шляхом прямого ходу, послідовно розв’язуючи рівняння виду (40) або за допомогою зворотного ходу обчислень із використанням співвідношення (41).

Числовий приклад. Можливість неоднозначності критичних напружень при тріщинотворенні зсувом у тонкостінних елементах конструкцій заданих розмірів ілюструється прикладом сферичної оболонки зі сталі 15Х2МФА. Значення стандартних характеристик механічних властивостей сталі, необхідних для розрахунку, становили [3]

$$E_0 = 0,2 \times 10^{12}\, Па;\ \nu_0 = 0,3; \sigma_{0,02} = 0,287 \times 10^9\, Па;$$

$$\tau_{0,02} = \frac{\sigma_{0,02}}{2} = 0,144 \times 10^9\, Па, w_{0,02} = 0,146.$$

При втраті стійкості оболонки в пружній області деформування критичні значення напружень не перевищують межу пропорційності ($\sigma_{11}^0 < \sigma_{0,02}$).

У відповідності з формулами (10) параметри функції розподілу зсувної мікроміцності (8) в інтервалі зміни дотичних напружень $0 \le \tau_3' \le \frac{\sigma_{11}^0}{2} = \frac{\sigma_{0,02}}{2}$ мають значення $\alpha = 5,922,\ \tau_1 = 0,233 \times 10^9\ Па.$ Січні характеристики пружності згідно з (20) обчислювали за формулами $E_c = E_0(1 + 0,213p)^{-1},\ \nu_c = \frac{E_c}{E_0}(\nu_0 + 0,0213p)$. Концентрація мікротріщин, що відповідає межі пропорційності згідно з (21) дорівнює $p_{0,02} = 0,0904$.

Явище неоднозначності стискаючих критичних напружень ілюструється на прикладі оболонки з відносною товщиною $h/R = 0,229 \times 10^{-2}$. При одноразовому статичному навантаженні така оболонка втрачає стійкість при $\sigma_{11}^0 = 0,275 \times 10^9\ Па$ та $p = 0,06$. При статичному навантаженні напруженням $\sigma_{11}^0 = 0,271 \times 10^9\ Па$ оболонка втратить стійкість при густині мікродефектів $p = 0,09$. Така концентрація мікродефектів у відповідності з (21) досягається на етапі навантаження $N = 2$.

Висновки. З використанням структурно-ймовірнісного підходу до моделювання зв’язаного процесу тріщиноутворення й деформування матеріалів досліджено біфуркаційну стійкість сферичних оболонок із пошкоджуваних зсувом матеріалів. На прикладі рівномірно обтисненої сферичної оболонки показано, що тонкостінним елементам конструкцій із пошкоджуваних відповідно до критерію Треска – Сен-Венана матеріалів зсувом притаманна неоднозначність критичних навантажень, яка пов'язана із залежністю процесу накопичення мікропошкоджень від рівня та характеру програми навантаження.

Conclusions. The bifurcation stability of spherical shells is investigated based on structural probabilistic approach to modeling of joint processes of deformation and accumulation of microcracks in materials. We consider that material of these spherical shells is damaged by shear. For uniformly compressed spherical shell it is shown that under cyclic loading of thin-walled damaged by shear (criterion Tresc-Saint-Venant) structural elements can lose stability at loads less than the critical. Ambiguity of critical loads, under which stability is lost, is associated with the dependence of the process of microdamages accumulation and the level and nature of the loading.

Список використаної літератури

1. Афанасьев, Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов [Текст] / Н. Афанасьев. – К. : Изд. АН УССР, 1953. – 128 с.
2. Болотин, В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций [Текст] / В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
3. Махутов, Н. А. Статистические закономерности малоциклового нагружения [Текст] / Н. А. Махутов, В. В. Зацаринный, Ж. М. Базарас. – М. : Наука, 1989. – 252 с.
4. Salganik, R. L. Mechanics of bodies with many cracs [Text] / R. L. Salganik // Mechanics of Solids, 1973. – Vol. 8, №4. – P. 135–143.
5. Тамуж, В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов [Текст] / В. П. Тамуж, В. С. Куксенко. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Трощенко, В. Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник в 2 частях. Част 1 [Текст] / В. Т. Трощенко, Л. А. Сосновский. – К. : Наук. думка, 1987. – 510 с.
7. Вольмир, А. С. Устойчивость упругих систем [Текст] / А. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 879 с.
8. Бабич, Д. В. Неоднозначность критических нагрузок прициклическом сжатии прямоугольных пластин из повреждающихся материалов [Текст] / Д. В. Бабич, Т. И. Дородных // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2014. – Вып. 22. – С. 20–35.
9. Бабич, Д. В. Деформирование хрупких материалов при рассеянном трещинообразовании [Текст] / Д. В. Бабич // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2012. – №1. – С. 101–109.
10. Babich, D. V. On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation [Text] / D. Babich, V. Bastun // J. Strain Analysis. – 2010. – Vol. 45, № 1. – P. 57–66.
11. Бабич, Д. В. Статистический критерий разрушения для хрупких материалов при статическом и повторяющихся нагружениях [Текст] / Д. В. Бабич // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – №3(49). – С. 16–27.
12. Бабич, Д. В. Статистический критерий прочности для упругохрупких материалов [Текст] / Д. В. Бабич // Проблемы прочности. – 2011. – №5. – С. 26–37.
13. Бабич, Д. В. О локальной устойчивости сжатых оболочек вращения при микроразрушениях в материале [Текст]/ Д. В. Бабич // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – №5. – С. 128–136.

Отримано 25.04.2015