

УДК 539.3

І. Кузь¹, канд. фіз.-мат. наук; О. Кузь², канд. техн. наук; Н. Пиз¹

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Національний університет «Львівська політехніка»

ВПЛИВ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН

Резюме. На основі числового розв'язування крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваного матеріалу з урахуванням розвантаження з'ясовано вплив концентраторів напружень (отвору, розрізу, абсолютно жорсткого включення) в пластині на її напружено-деформований стан за одновісного розтягу.

Ключові слова: пластина, круговий отвір, розріз, абсолютно жорстке включення, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.

I. Kuz', O. Kuz', N. Pyz

INFLUENCE OF STRESS CONCENTRATORS ONTO STRESS-STRAIN STATE OF ELASTO-PLASTIC PLATES

Summary. Effective numerical methods for solving 2D problems related to the theories of elasticity and plasticity have been worked out. The variation-difference method of building finite difference schemes is extended to domains with curvilinear boundaries and disconnected domains.

The application of the variation-difference method for solving problems of the theory of small elasto-plastic deformations relatively the plates with a hole and a cut, taking into account the linear strengthening of the material and unloading, has been developed. For solving the resultant systems of nonlinear and linear equation, the Newton-Kantorovich method and combined iterative method (gradient and cyclic Chebyshev's one) were proposed to be used. The choice of iteration parameters of the methods for solving the obtained systems of linear and nonlinear algebraic equations was made.

The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions, medium and domain parameters.

A variety of problems concerning one-axis stretching of the plates with a disk hole (or rigid body instead of a hole) and a cut (or a thin rigid body instead of a cut) is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed, the residual strains and the limit loads are obtained.

The influence of a disk hole, cut and rigid body instead of a hole or cut in the plates onto the stress magnitude was found. The presence of rigid bodies instead of a hole or a cut strengthen the plate in general, in particular, plastic strains in the plate with rigid bodies instead of a hole and a cut appear under tension stress in 2,75 times more, than in the plate with a disk hole and a cut, and yield limit arrives at tension stress in 1,79 times more. A long thin rigid body strengthens a plate more than a disk one. The residual strains around a rigid body in the plates with a disk rigid body and a cut, and in the plates with a disk hole and a thin rigid body do not arise, in general.

Key words: plate, disk hole, cut, rigid body, theory of small elastic-plastic deformations, linear strengthening, unloading, variation-difference method.

Постановка проблеми. Концентратори напружень (отвори, включення, розрізи, тріщини тощо) існують у всіх конструкціях внаслідок конструкційних вимог, технологічних операцій при їхньому виготовленні або впливу експлуатаційних навантажень. Їхня наявність призводить до концентрації напружень, що може спричинити передчасне руйнування або появу недопустимих деформацій. У багатьох випадках за високого рівня навантажень елементи конструкцій з концентраторами напружень перебувають в умовах допустимого пластичного деформування. Це призводить до складних задач визначення напружено-деформованого стану,

розв'язування яких неможливе без залучення ефективних числових методів розрахунку, оскільки застосування аналітичних методів у зв'язку зі складністю форми тіл (обмеженість розмірів, незв'язність, криволінійна межа) та фізичної нелінійності значно обмежене.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в багатозв'язних областях є варіаційно-різницекий метод із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в області, складеній з прямокутників [1–3]. Проте врахування зміцнення матеріалу при пластичному деформуванні, побудова зон еволюцій пластичних деформацій при покроковому збільшенні навантаження, розрахунок полів залишкових деформацій після розвантаження елементів конструкцій дали б змогу точніше з'ясувати напружено-деформований стан пластини та її міцність.

Мета роботи. З'ясувати вплив концентраторів напружень (отвору, розрізу абсолютно жорсткого включення) на напружено-деформований стан пружно-пластичної пластини з урахуванням зміцнення матеріалу та розвантаження.

Формулювання задачі та числовий метод її розв'язування. Розглядається плоска задача деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у багатозв'язній області V з межею Σ , яка моделює напружено-деформований стан у пластині з круговим отвором та розрізом (рис.2). З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$(C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (1)$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні Σ ($\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma$)

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \quad (2)$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\lambda(\varepsilon_u) = K - (2/3)\mu(\varepsilon_u), \quad \mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)). \quad (3)$$

Тут u_i, P_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно; ε_u – інтенсивність тензора деформацій $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$; K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Ільюшина [4]; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$v_1 = u_x(x, y), \quad v_2 = u_y(x, y), \quad v_3 = u_z \equiv 0. \quad (4)$$

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція $\omega(\varepsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma)(\varepsilon_u - \varepsilon_s) / \varepsilon_u, & \varepsilon_u > \varepsilon_s; \\ 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де $\gamma \equiv \mu'/\mu$ – параметр зміцнення; $2\mu \equiv \text{tg } \alpha$; $2\mu' \equiv \text{tg } \alpha'$; σ_s, ε_s – межі течіння за напруженнями та деформаціями відповідно.

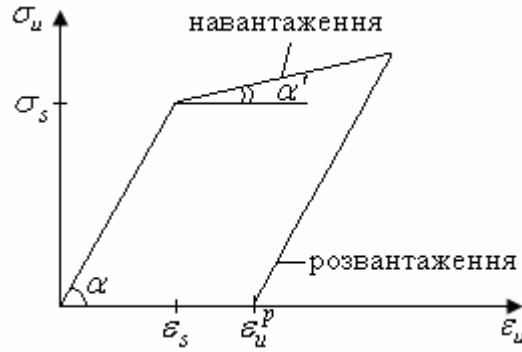


Рисунок 1. Графік залежності $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ для матеріалу з лінійним зміцненням

Figure 1. Graph of dependence $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ for the material with linear strengthening

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e'_{ij} - e_{ij}), \quad (6)$$

де компоненти тензорів e'_{ij} і s'_{ij} відповідають початку процесу розвантаження.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо різницевий аналог цієї задачі, причому будемо виходити з її варіаційної постановки й використовуватимемо варіаційно-різницевий метод побудови різницевої схеми [5].

Оскільки область V є багатозв'язною, то використовуємо такі криволінійні координати β^1, β^2 , що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (7)$$

переводить її в модельну область V_0 (прямокутник розмірами $l_1 \times l_2$ або область, складену з прямокутників). У цій області лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \bar{X} \cdot \bar{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\bar{\beta}) \bar{P}^0 \cdot \bar{v} d\Sigma, \quad (8)$$

де $D^{ijkl} = C^{imkn}(\bar{\beta}) B_m^j B_n^l$, $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$, $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$, $\sqrt{g} = \det \underline{A}$,

$$g(\bar{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Замінивши у (8) всі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (7), яке не мусить бути задане

аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в криволінійній V_1 та в модельній V_0 областях. Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{v}^h) + \vec{F}^h = 0, \quad (9)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона – Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів.

Описаний метод реалізований у вигляді пакета програм, який враховує різні крайові умови, параметри області та середовища. Цей пакет був розвинений на врахування розвантаження у пружно-пластичних задачах, а також проведено підбір ітераційних параметрів методів розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь (9).

Результати числових досліджень. За допомогою викладеного вище варіаційно-різницевого методу розв'язано низку плоских задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластини, виготовленої з матеріалу з лінійним зміцненням (див. рис. 1), наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовується в літакобудуванні, з круговим отвором та розрізом або такими самими за формою абсолютно жорсткими включеннями (АЖВ).

Пластина з круговим отвором та розрізом

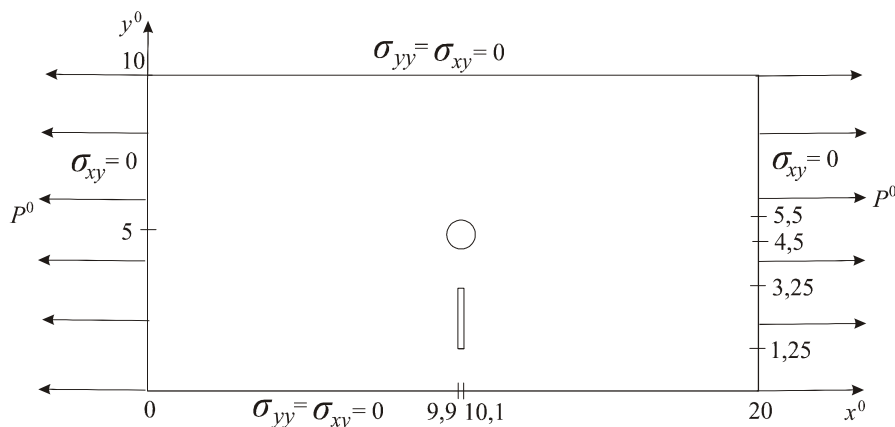


Рисунок 2. Пластина з круговим отвором (АЖВ) та розрізом (АЖВ) й крайовими умовами на зовнішній межі

Figure 2. Plate with a disk hole (rigid body) and a cut (rigid body) and boundary conditions on the external border

На рис.2 зображено геометрію пластини з крайовими умовами. Тут уведено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – діаметр кругового отвору. Круговий отвір та розріз є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{nr} = 0$). До правого та лівого країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $\sigma_{xx}^0 = P^0 \equiv P/\sigma_s$.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$ з'ясовуються області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також можна оцінити міцність пластини за тим чи іншим критерієм. Згідно з умовою течіння Губера – Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна

інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної межі течіння $\sigma_s^0 = 1$. Згідно з критерієм міцності (скажімо найбільшій інтенсивності дотичних напружень) небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної величини $\sqrt{2/3}\sigma_B^0$, де $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$ – безрозмірна межа міцності [6].

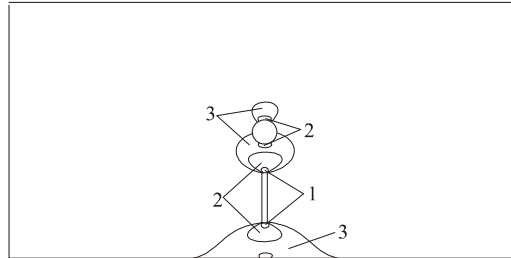


Рисунок 3. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні P^0 у пластині з круговим отвором та розрізом

Figure 3. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with a disk hole and a cut

На рис.3 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для зображеної на рис.2 пластини з круговим отвором та розрізом (модуль пружності $E = 7,31 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; параметр зміцнення $\gamma = 0,1$; межа течіння $\sigma_s = 324$ МПа; межа міцності $\sigma_B = 469$ МПа). На рис.3 зона 1 побудована при $P^0 = 0,28$; зона 2 – при $P^0 = 0,46$; зона 3 – при $P^0 = 0,56$. Як бачимо з рис.3, області пластичних деформацій розвиваються вертикально догори і вниз від верхнього та нижнього країв отвору й розрізу відповідно, причому вперше з'являються біля верхнього та нижнього країв розрізу (зона 1).

Також вивчено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з круговим отвором та розрізом (див. рис.2), попередньо навантаженого збільшеним навантаженням P^0 (рис.4). Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження при $P^0 = 0,28$ біля верхнього та нижнього країв розрізу (див. рис. 4а), а лише пізніше – біля верхнього та нижнього країв отвору (див. рис.4б).

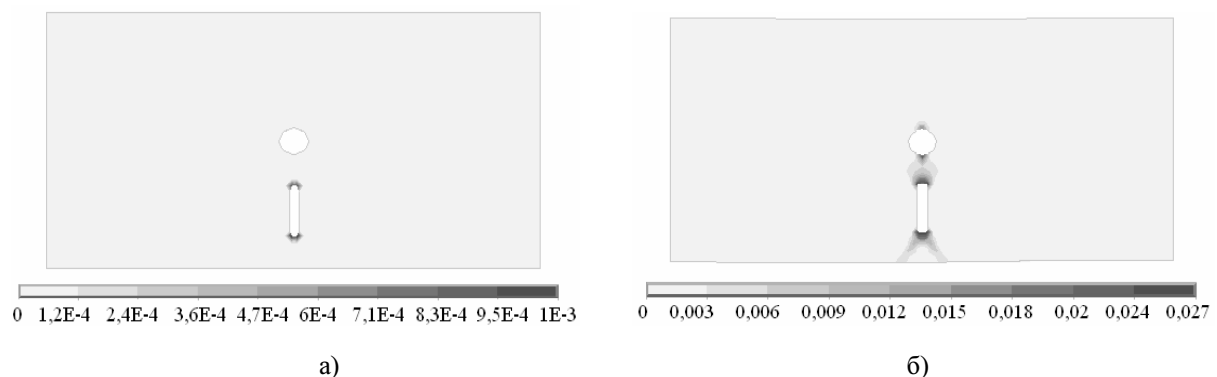


Рисунок 4. Діаграми інтенсивності тензора залишкових деформацій при:
а) $P^0 = 0,28$; б) $P^0 = 0,56$ у пластині з круговим отвором та розрізом

Figure 4. Diagrams of intensity of the residual deformations tensor at:
а) $P^0 = 0,28$; б) $P^0 = 0,56$ in the plate with a disk hole and a cut

При $P^0 = 0,56$ у пластині з круговим отвором та розрізом біля верхнього та нижнього країв розрізу досягається межа міцності (див. рис.4б). На рис.4б також бачимо появу двох смуг максимальних залишкових деформацій (можливі лінії ковзання) під кутом 45° до напрямку розтягу, які розвиваються від нижнього краю розрізу до нижнього краю пластини.

Пластина з круговим АЖВ та розрізом

Розглянуто деформування такої ж за розмірами пластини з круговим АЖВ замість отвору та розрізом (див. рис.2). Для цього на межі отвору задано крайові умови $u_\tau = 0, u_n = 0$, які моделюють наявність АЖВ.

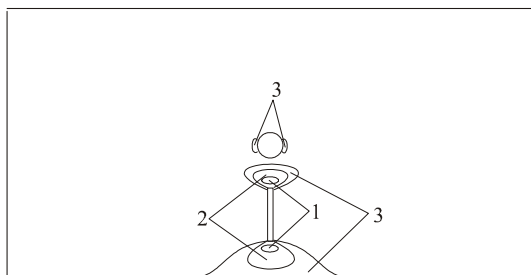


Рисунок 5. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні P^0 у пластині з круговим АЖВ та розрізом

Figure 5. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with a disk rigid body and a cut

На рис.5 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням напруження P^0 . Спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на деякій відстані від верхньої та нижньої сторін розрізу (зона 1). На відміну від пластини з круговим отвором та розрізом, у цьому випадку пластичні деформації розвиваються вправо та вліво від правого і лівого країв включення відповідно (зона 3). На рис.5 зона 1 отримана при $P^0 = 0,4$; зона 2 – при $P^0 = 0,52$; зона 3 – при $P^0 = 0,59$.

Зазначимо, що пластичні деформації у пластині з АЖВ замість отвору виникають при напруженні P^0 у 1,43 раза більшому, ніж у пластині з отвором такої ж форми.

Вивчено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з круговим АЖВ та розрізом (див. рис.2), попередньо навантаженого збільшеним навантаженням P^0 (рис.6).

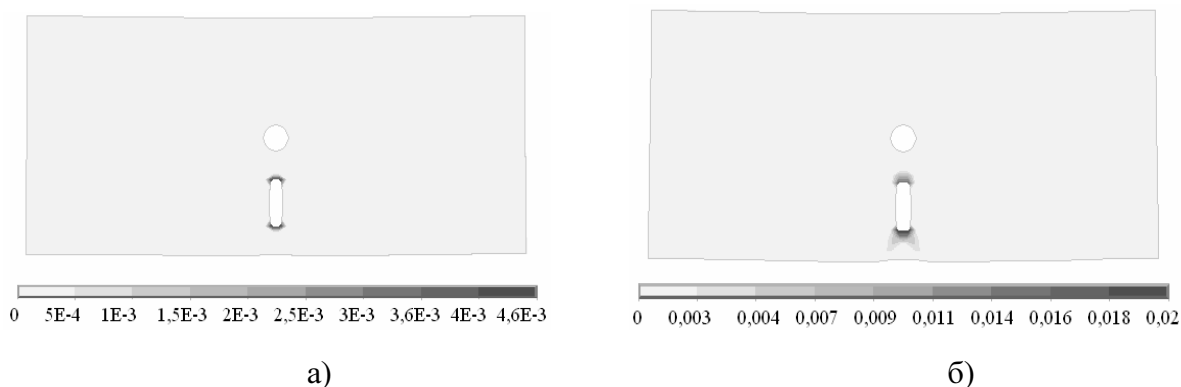


Рисунок 6. Діаграма інтенсивності тензора залишкових деформацій при: а) $P^0 = 0,4$; б) $P^0 = 0,59$ у пластині з круговим АЖВ та розрізом

Figure 6. Diagrams of intensity of the residual deformations tensor at: а) $P^0 = 0,4$; б) $P^0 = 0,59$ in the plate with a disk rigid body and a cut

Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження при $P^0 = 0,4$ біля верхнього та нижнього країв розрізу (див. рис.6а). При навантаженні $P^0 = 0,59$ у пластині з круговим АЖВ та розрізом біля верхнього та нижнього країв розрізу досягається межа міцності (див. рис.6б). Це навантаження лише на 5,3% більше, ніж у пластині з круговим отвором і розрізом. Як бачимо з рис.6, залишкових пластичних деформацій навколо кругового АЖВ взагалі немає.

Пластина з круговим отвором та АЖВ замість розрізу

Розглянуто деформування такої ж за розмірами пластини з круговим отвором та тонким АЖВ замість розрізу (див. рис.2). Для цього на межі розрізу задано крайові умови $u_\tau = 0, u_n = 0$, які моделюють наявність АЖВ.

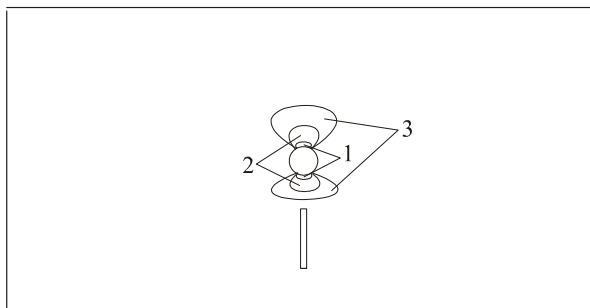


Рисунок 7. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні P^0 у пластині з круговим отвором та АЖВ замість розрізу

Figure 7. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with a disk hole and a thin rigid body instead of a cut

На рис.7 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням напруження P^0 . Спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на верхньому та нижньому краях отвору (зона 1). На рис.7 зона 1 отримана при $P^0 = 0,4$; зона 2 – при $P^0 = 0,77$; зона 3 – при $P^0 = 0,9$.

Вивчено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з круговим отвором та тонким АЖВ замість розрізу (див. рис.2), попередньо навантаженого збільшеним навантаженням P^0 (рис.8).

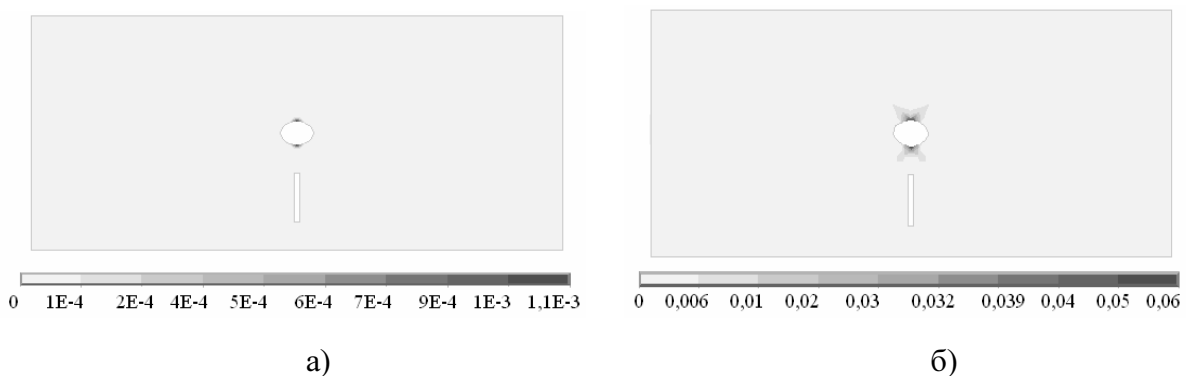


Рисунок 8. Діаграма інтенсивності тензора залишкових деформацій при: а) $P^0 = 0,4$; б) $P^0 = 0,9$ у пластині з круговим отвором та тонким АЖВ

Figure 8. Diagrams of intensity of the residual deformations tensor at: а) $P^0 = 0,4$; б) $P^0 = 0,9$ in the plate with a disk hole and a thin rigid body instead of a cut

Пластичні деформації вперше з'являються при такому самому напруженні P^0 , що і у випадку кругового АЖВ і розрізу. Проте межа міцності у цьому випадку (див. рис.8б) досягається при напруженні P^0 у 1,61 раза більшому, ніж у випадку кругового отвору й розрізу. Це свідчить про те, що тонке довге АЖВ більшою мірою зміцнює пластину, ніж кругове. На відміну від пластини з круговим отвором та розрізом навколо тонкого АЖВ замість отвору залишкові пластичні деформації взагалі не спостерігаються.

Пластина з АЖВ замість отвору та розрізу

Розглянуто деформування такої ж за розмірами пластини з круговим АЖВ замість отвору та тонким АЖВ замість розрізу (див. рис.2). Для цього на межі кругового отвору та розрізу задано крайові умови $u_\tau = 0, u_n = 0$, які моделюють наявність обидвох АЖВ.

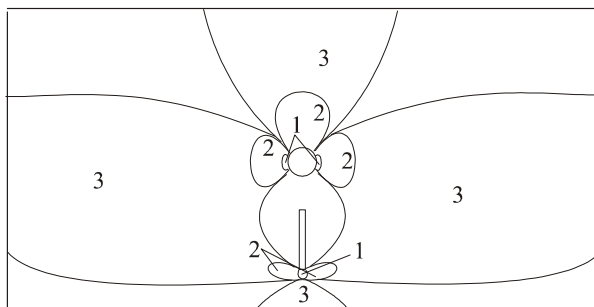


Рисунок 9. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні P^0 у пластині з АЖВ замість отвору та розрізу

Figure 9. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with rigid bodies instead of a disk hole and a cut

На рис.9 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням напруження P^0 . Спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій навколо нижнього краю тонкого АЖВ, правого та лівого країв кругового АЖВ (зона 1). На рис.9 зона 1 отримана при $P^0 = 0,77$; зона 2 – при $P^0 = 0,93$; зона 3 – при $P^0 = 1$.

Вивчено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з АЖВ замість отвору і розрізу (див. рис.2), попередньо навантаженого збільшеним навантаженням P^0 (рис.10).

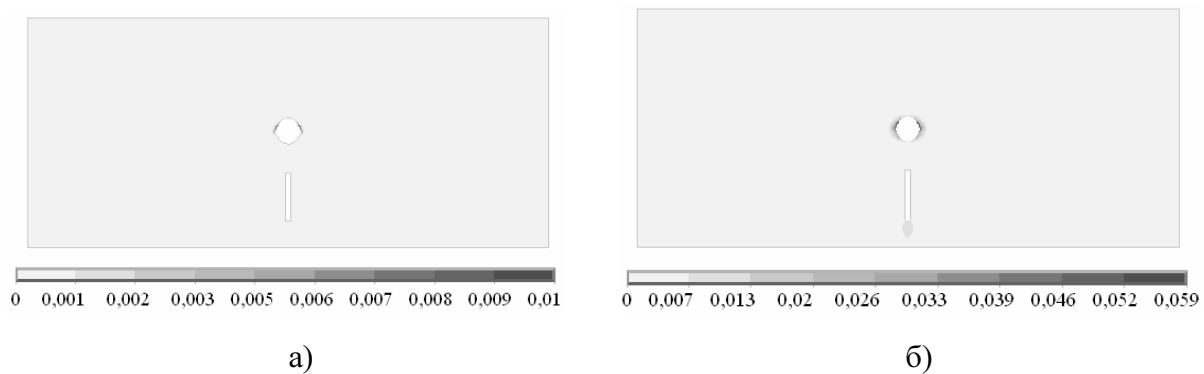


Рисунок 10. Діаграма інтенсивності тензора залишкових деформацій при: а) $P^0 = 0,77$; б) $P^0 = 1$ у пластині з АЖВ замість отвору та розрізу

Figure 10. Diagrams of intensity of the residual deformations tensor at: а) $P^0 = 0,77$; б) $P^0 = 1$ in the plate with rigid bodies instead of a disk hole and a cut

Зазначимо, що пластичні деформації у пластині з АЖВ замість отвору та розрізу розпочинаються при напруженні P^0 у 2,75 раза більшому, ніж у пластині з отвором і розрізом такої ж форми, а межа міцності досягається при P^0 у 1,79 раза більшому.

Висновки. З'ясовано вплив концентраторів напружень (отвір, розріз, АЖВ) на величини напружень у пластині. Наявність АЖВ у пластині загалом її зміцнює, зокрема пластичні деформації у пластині з АЖВ замість отвору та розрізу розпочинаються при напруженні P^0 у 2,75 раза більшому, ніж у пластині з отвором і розрізом такої ж форми, а межа міцності досягається при P^0 у 1,79 раза більшому. Тонке довге АЖВ більшою мірою зміцнює пластину, ніж кругове АЖВ. За одновісного розтягу в пластинах з круговим АЖВ і розрізом та круговим отвором і тонким АЖВ залишкові деформації навколо АЖВ взагалі не виникають.

Conclusions. The influence of a disk hole, a cut and a rigid body instead of a hole or cut in the plates onto the stress magnitude was found. The presence of rigid bodies instead of a hole or a cut strengthen the plate in general, in particular, plastic strains in the plate with rigid bodies instead of a hole and a cut appear under tension stress in 2,75 times more, than in the plate with a disk hole and a cut, and yield limit arrives at tension stress in 1,79 times more. A long thin rigid body strengthens a plate more than a disk one. The residual strains around a rigid body in the plates with a disk rigid body and a cut, and in the plates with a disk hole and a thin rigid body do not arise, in general.

Список використаної літератури

1. Кузь, І.С. Дослідження пружно-пластичного з'єднувального елемента конструкцій під дією нерівномірних навантажень [Текст] / І.С. Кузь // *Механіка і фізика руйнування матеріалів та конструкцій*. – Львів: Каменяр. – 2009. – Вип.8. – С.35–41.
2. Кузь, І. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) [Текст] / І. Кузь // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2012. – Вип. 76. – С.91–98.
3. Кузь, І.С. Одновісний розтяг пружно-пластичних пластин з квадратним отвором різної орієнтації [Текст] / І.С. Кузь, О.Н. Кузь // *Вісник ТНТУ*. – 2013. – № 4(72). – С.52–59.
4. Ильющин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории [Текст] / А.А. Ильющин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
5. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
6. Божидарник, В.В. Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів: Світ. – Т.1. – 1999. – 532 с., Т.2. – 1999. – 419 с.

Отримано 23.05.2014