

УДК 539.375

**А. Бойко; В. Валяшек, канд. фіз.-мат. наук;
В. Кривень, докт. фіз.-мат. наук; А. Каплун, докт. пед. наук**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У СМУЗІ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

***Резюме.** Отримано аналітичний розв'язок антиплоскої пружно-пластичної задачі про розвиток пластичних шарів для ідеально пружно-пластичної смуги з кутовими точками на її межі. Знайдено довжину пластичних шарів залежно від величини зосередженої сили, прикладеної на великій відстані від вершин кутів. Визначено критичне навантаження, за якого настає пластичне руйнування смуги.*

***Ключові слова:** антиплоска деформація, пластична смуга, кутова точка, конформне відображення, задача Келдиша-Седова.*

A. Boyko, V. Valiashek, V. Kryven, A. Kaplun

DEVELOPMENT OF PLASTIC AREAS IN ANGLE POINTS ZONE UNDER CONCENTRATED FORCE

***Summary.** Investigations of plastic areas in the strain concentrators threshold is still the main problem of solid body mechanics and fracture mechanics. They are important because of wide introduction into engineering practice high-plastic materials with high fracture toughness in which while operating considerable plastic deformation can occur. Analytical solution of anti-plane elasto-plastic problem for the ideal elasto-plastic area with angular points on its edges was obtained. Plastic deformations are considered to be localized in the layers of zero thickness on the notch angles bisectrices. The length of plastic layers as the function of concentrated force applied in great distance from angle apexes was found. Maximum load value was found under which the layers coincide, developing from the opposite notch tips and the area loses its load resistance. The less is the angle on notch tips, the less is maximum load. When the notch angle equals zero (the notch changes into mathematical section) it is minimum and equals 78% of the critical load for smooth zone. When the angle value in notch tips approaches its maximum acceptable value 90° , under which angular points disappear and zone edges become smooth, plastic areas gradually disappear as well and stress-strained state gradually becomes homogeneous. Simple formulae for the plastic layer lengths dependence on loading according to the plastic area linear model (PALM) were reduced. Their analysis testified the high accuracy of this model. For steel 0,3X14H7B with shearing yield limit 688 mPa the PALM will provide accuracy not less than 5% until the average shearing load in the zone cross-section does not exceed 75,5 mPa. Carried out investigations consider the case of maximum possible interaction of stress concentrators – the distance between concentrators in infinitely small in comparison with their dimensions. As concentrators interaction decreases the plastic area linear model accuracy, it is reasonable to consider the obtained estimations of accuracy to be the highest and not to be decreased under weaker interactions.*

***Key words:** anti-plane deformation, plastic zone, angular point, conformal mapping (angle diagram), Keldysh-Sedov problem.*

Вступ. Дослідження пластичних зон в околі концентраторів напружень залишається важливою задачею механіки деформівного твердого тіла та механіки руйнування. Вони актуальні у зв'язку з широким упровадженням в інженерну практику високопластичних матеріалів з великою в'язкістю руйнування, в яких у процесі експлуатації можлива поява значних пластичних деформацій. Найбільш суттєвого прогресу в цьому напрямку досягнуто для випадків малої товщини вирізів і жорстких тонких включень, коли аналітичні дослідження напружено-деформівного стану можливі методом функцій стрибка [1,2]. Значно слабше представлено в літературі

дослідження розвитку пластичних зон для тіл з вирізами у включеннями складніших форм, зокрема V-подібними вирізами [3–6] та прямокутними вирізами і включеннями [7–9]. Актуальними залишаються дослідження пластичних зон поблизу вершин кутових точок вирізу [10,11] та з'ясування впливу величини кута при вершині на форму та розвиток пластичних зон в околі концентратора напружень. Недослідженою наразі є зміна форми пластичної зони в околі кутової точки межі тіла, яка у граничному випадку стає гладкою.

Мета роботи. Дослідження квазістатичного розвитку напружено-деформівного стану та пластичних зон у смузі з кутовими точками під зсувним навантаженням.

Результати дослідження. Проаналізуємо розвиток пластичних зон при вершинах кутових точок у смузі під впливом пари зосереджених сил. Матеріал тіла

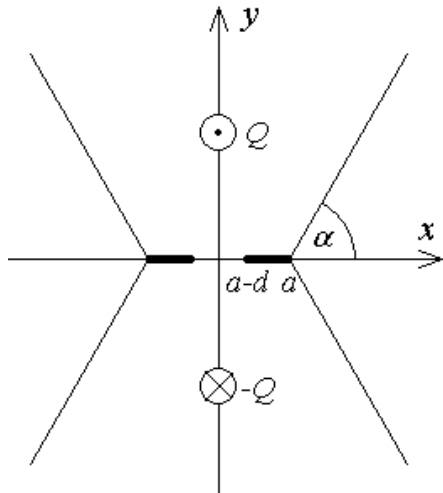


Рисунок 1. Поперечний переріз тіла.
Потовщені лінії – пластичні шари

Figure 1. Cross -section of the body.
Thickened lines – plastic bands

вважаємо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею, яка дорівнює k . Дослідимо розвиток пластичних деформацій, зосереджених у площині на продовженні бісектриси вирізу (рис.1). У системі координат Oxy межі смуги задаються рівнянням $|y| = (|x| - a) \operatorname{tg} \alpha$ ($|x| \geq a$), вершини вирізів віддалені на відстань $2a$. Зосереджені сили $\pm Q$ прикладені настільки далеко від вершин вирізів, що можна брати до уваги лише величину цих сил і нехтувати впливом їх відстані від вершин вирізів. Задача полягає у визначенні залежності довжини шарів d від величини сил Q і знаходженні величини сили $Q = Q^*$, за якої пластичні шари, що розвиваються від обох вершин клина, зникають, в результаті чого тіло втрачає опір навантаженню. Зауважимо, що у випадку $\alpha = 0$

тіло являє собою простір з двома півбезмежними тріщинами, а у випадку $\alpha = \pi/2$ отримуємо смугу з паралельними гладкими гранями без концентраторів напружень.

За вказаних умов у тілі виникне антиплоский напруженодеформівний стан, а складена із компонент напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ є аналітичною у пружній частині тіла. Компоненти напружень – парні функції обох аргументів.

Зауважимо, що оскільки зосереджена сила прикладена далеко від вершин вирізів, можна вважати відомим напруження в одній довільно взятій точці тіла, зв'язавши його з величиною сили Q . Зручно покласти $\tau_{yz}(0,0) = \tau_0$ ($0 < \tau_0 < k$).

Розвиток локалізованих пластичних деформацій. Вважаємо, що пластичні деформації зосереджені у шарах нульової товщини на бісектрисах кутових вирізів (див. рис.1). Унаслідок симетрії функцію $\tau(\zeta)$ достатньо визначити в області D – частині першого квадранта, обмеженого віссю абсцис, віссю ординат та прямою $y = a + x \operatorname{tg} \alpha$.

На межі цієї області повинні виконуватися такі умови:

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = iy, 0 < y < +\infty);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x, 0 \leq x < a - d);$$

$$\begin{aligned} & \left[\text{ } \right] \left[\text{ } \right]; \\ & \left[\text{ } \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Крім того, оскільки пластичний стан не може досягатися ніде поза пластичними шарами, всередині області D повинна виконуватися умова

$$\left[\text{ } \right] \quad (2)$$

Зрозуміло, що зосереджені сили, під впливом яких відбувається деформування тіла, врівноважуються напруженням $\left[\text{ } \right]$ на лінії, яка з'єднує вершини вирізів. Тому повинна виконуватися рівність

$$\left[\text{ } \right] \quad (3)$$

Можна переконатися, що функція $\left[\text{ } \right]$ є однолистою в області D і конформно відображає її на круговий сектор $\left[\text{ } \right]$ (область G) площини $\left[\text{ } \right]$ (рис.2).



Рисунок 2. Области конформного відображення у площинах ζ і τ

Figure 2. Conformal mapping area in ζ and τ planes

Розв'язування задачі (1)–(2) звелось до побудови конформного відображення, наведеного на рис.2. Уведемо допоміжну комплексну площину t , у якій областям D і G відповідатиме верхня півплощина (рис.3, область H).

Пара функцій

$$\left[\text{ } \right] \quad (4)$$

визначатиме шукане відображення, якщо відповідні точки на межах областей D і G матимуть спільний прообраз на межі півплощини H .

Оскільки D – прямолінійний багатокутник відображення $\left[\text{ } \right]$ можна отримати з допомогою перетворення Крістоффеля-Шварца [12]

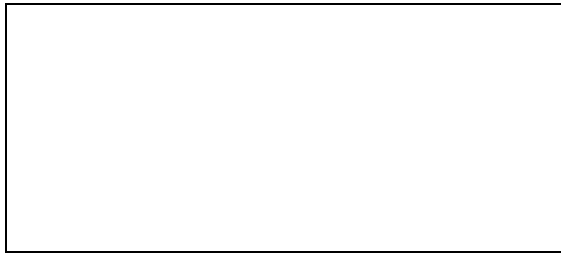


Рисунок 3. Допоміжна комплексна площина

Figure 3. Subsidiary complex plane

$$\left[\text{Blank Box} \right], \quad (5)$$

де $\left[\text{Blank Box} \right]$, $\left[\text{Blank Box} \right]$.

Тут і далі під виразами $\left[\text{Blank Box} \right]$ ($\left[\text{Blank Box} \right]$, $\left[\text{Blank Box} \right]$ – дійсні числа, $\left[\text{Blank Box} \right] \in \mathbb{H}$) розуміємо аналітичні в області \mathbb{H} функції, які приймають дійсні додатні значення, коли $\left[\text{Blank Box} \right]$ є дійсним додатним і достатньо великим числом.

Другу із функцій (3) знаходимо композицією елементарних відображень

$$\left[\text{Blank Box} \right], \quad (6)$$

де $\left[\text{Blank Box} \right]$, $\left[\text{Blank Box} \right]$.

Надалі нам потрібна буде також обернена до $\left[\text{Blank Box} \right]$ функція

$$\left[\text{Blank Box} \right].$$

Тепер подамо довжину пластичних шарів як функцію параметра $\left[\text{Blank Box} \right]$

$$\left[\text{Blank Box} \right]. \quad (7)$$

Для завершення розв'язку задачі (1)–(3) залишилося зв'язати параметр $\left[\text{Blank Box} \right]$ із силою $\left[\text{Blank Box} \right]$. Оскільки $\left[\text{Blank Box} \right]$, то, скориставшись рівностями (5), (6), отримуємо

$$\left[\text{Blank Box} \right], \quad (8)$$

де $\left[\text{Blank Box} \right]$.

Залежність довжини пластичних шарів від навантаження для кількох величин кутів вирізу наведена на рис.6 (суцільні лінії). Зі збільшенням навантаження довжини пластичних шарів збільшуються. Коли ж вони досягають величини $\left[\text{Blank Box} \right]$, відбувається злиття пластичних шарів, що розвиваються від протилежних вершин вирізів, і настає

пластичне руйнування тіла. Найменшу величину сили \square , за якої тіло перестає чинити опір зсуву, називатимемо критичним навантаженням. Як бачимо із рис.3, пластичні шари зливатимуться, коли \square . За формулою (8) знаходимо

$$\square$$

Критична сила тим більша, чим більша величина кута при вершині вирізів. Коли кут \square , ця сила є найменшою і дорівнює, як це випливає із формули (10), величині \square . У граничному випадку \square (грані смуги стають гладкими) пластичне руйнування можливе тільки за умови переходу всієї смуги в пластичний стан. Відповідне значення критичної сили \square .

Уздовж обох пластичних шарів відбувається відносно проковзування нижнього і верхнього берегів та з'являється тангенціальний розрив переміщення. Максимальне значення розриву \square (\square – переміщення вздовж осі аплікату) досягається у вершинах вирізів.

$$\square$$

Часткові випадки. Розглянемо крайні можливі значення кутів при вершинах вирізу \square і \square .

Нехай спочатку \square – вершини вирізу зникають, а грані смуги стають гладкими. У цьому випадку \square і, відповідно, \square . Із очевидного співвідношення

$$\square$$

випливає, що \square при \square . Оскільки

$$\square$$

то при \square для усіх \square . Отже, \square при \square

$$\square$$

поточково збіжна до \square . Ми отримали цілком сподіваний результат: коли грані стають гладкими, тіло деформується однорідно і поки \square пластичні деформації не виникають, а коли \square , вся смуга переходить у пластичний стан.

Для найменшого можливого кута при вершинах вирізу смуга вироджується у тіло з двома півбезмежними розрізами. У цьому випадку з формул (5), (6) отримуємо функцію напружень у явному вигляді

$$\square$$

(9)

Тут для . Коли , то .

Із формул (5), (6) як частковий випадок можна отримати пружний розв'язок задачі, спрямувавши границю текучості до нескінченності. У такий спосіб знаходимо

$$\text{[Blank Box]} \quad (10)$$

Формули (5), (10) дають пружний розв'язок задачі, для якого сила лінійно пов'язана із напруженням

$$\text{[Blank Box]} \quad (11)$$

Дослідимо поле пружних напружень в околі вершин вирізів. Із формул (5) для отримуємо

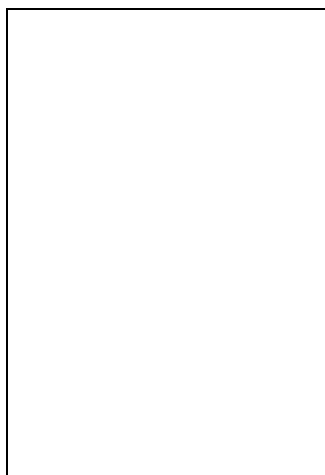
$$\text{[Blank Box]}$$

Отже, при

$$\text{[Blank Box]} \quad (12)$$

Поле пружних напружень в околі вершин вирізів сингулярне з показником . Коефіцієнт при сингулярному члені дорівнює . Коли кут наближається до нуля, .

Дослідження початкової стадії розвитку пластичних деформацій. Як відомо [13], за низького навантаження, коли розміри пластичної зони значно менші за інші



лінійні виміри тіла, для дослідження розвитку пластичних деформацій застосовна лінійна модель пластичної зони (ЛМПЗ), що опирається на пружний розв'язок задачі. Ця модель потребує розв'язків двох відповідних допоміжних задач у пружній та пружно-пластичній постановках в області, що не містить параметра з розмірністю довжини. Для задачі (1) таким параметром є відстань між вершинами. Вважаючи її нескінченно великою і помістивши початок системи координат у вершину правого вирізу, отримуємо що для допоміжних задач області, у якій слід розв'язати задачі, ϵ : для пружної задачі D_1 – частина площини поза кутом утвореним променями і

Рисунок 4. Область D_1

Figure 4. D_1 area

\dots , рис. 4); для пружно-пластичної $-D_2$ (область D_1 розрізана вздовж відрізка дійсної осі $[-l;0]$, рис.5). Тут l – довжина пластичного шару, яку знаходять із умови узгодженості допоміжних розв’язків та пружного розв’язку основної задачі.

Утворена компонентами тензора напружень функція \dots повинна задовольняти в області D_2 таким крайовим умовам:

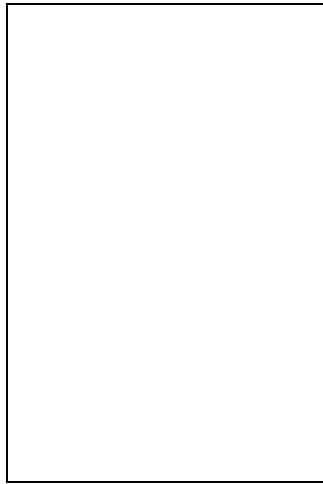
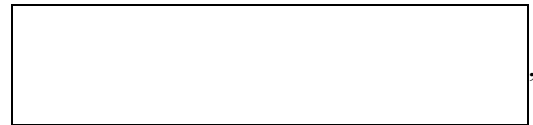


Рисунок 5. Область D_2

Figure 5. D_2 area

$$\begin{aligned} & \dots; \\ & \dots; \\ & \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Внаслідок умов (13) функція \dots конформно відображає область \dots на сектор G і може бути знайденою безпосередньою побудовою відповідного конформного відображення:



(14)
де \dots .

Допоміжний пружний розв’язок \dots можна отримати як частковий випадок співвідношення (14) при \dots і \dots . Таким способом отримуємо

$$\dots \quad (15)$$

де $M = \text{const}$, яку слід знайти із умови асимптотичної еквівалентності на нескінченності функцій \dots і \dots .

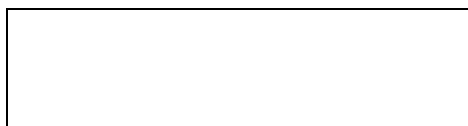
Оскільки при \dots

$$\dots$$

то пружний розв’язок допоміжної задачі стане узгодженим допоміжним пружно-пластичним розв’язком, коли \dots і тоді

$$\dots \quad (16)$$

Узгодимо тепер основний та допоміжний пружні розв’язки. Для цього слід забезпечити їх асимптотичну еквівалентність у вершині вирізів. Із формул (12) і (16) отримуємо



На початковій стадії розвитку довжина пластичних шарів збільшується пропорційно \square степені навантаження і визначається у замкненій формі



(17)

Порівняння точних залежностей довжин пластичних шарів від навантаження (формули (7), (8)) і наближених (формули (11), (17)) наведено на рис.6. У табл.1 для кількох кутів вирізу і кількох рівнів навантаження наведено точність визначення довжин пластичних шарів за ЛМПЗ в одиницях \square та самі ці довжини в одиницях \square .

Таблиця 1

Точність визначення довжини міжфазних смуг за ЛМПЗ

Table 1

The accuracy of measurement of the interphase zone length by PALM

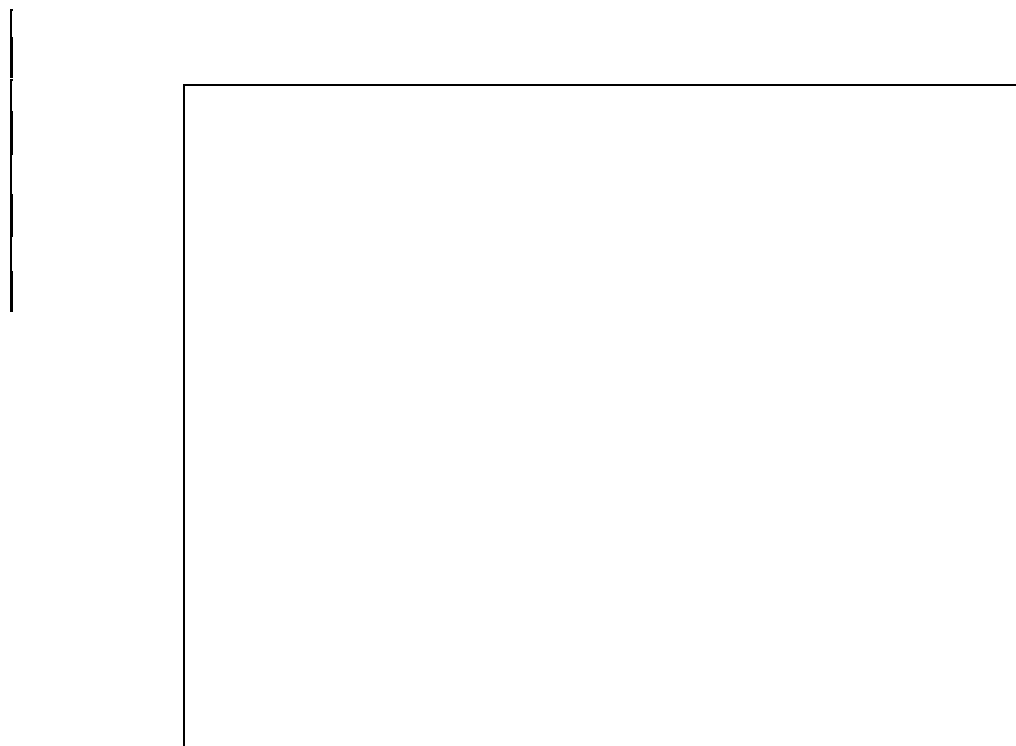


Рисунок 6. Залежності довжин пластичних шарів від навантаження, визначених за точним розв'язком (суцільні лінії) та за ЛМПЗ (штрихові лінії), α – кут у градусах

Figure 6. Dependence of plastic layer lengths on loading determined by explicit solution (full lines) and by plastic area linear model PALM (dash-dotted), α – angle in degrees

Точність ЛМПЗ тим краща, чим більший кут вирізу і достатньо висока для широкого діапазону навантажень. При великих кутах вирізу результати ЛМПЗ забезпечують високу точність навіть для досить великих навантажень. Для прикладу,

відзначимо, що ЛМПЗ забезпечує визначення довжин пластичних шарів з точністю не нижчою 5% поки навантаження Q . Зокрема для сталі 0,3X14H7B із зсувною границею текучості 688 МПа означає, що така точність забезпечуватиметься, поки середнє зсувне навантаження у попереку смуги не перевищуватиме 75,5 МПа.

Зауважимо, що проведені дослідження стосуються випадку максимально можливої взаємодії концентраторів напружень – відстань між концентраторами нескінченно мала проти їх розмірів. Оскільки взаємодія концентраторів знижує точність ЛМПЗ [13], є підстави вважати, що отримані тут оцінки точності є верхніми оцінками і не будуть знижуватися для слабших взаємодій.

Точність ЛМПЗ підвищується зі збільшенням кута вирізу, що може бути пов'язане зі звуженням форми континуальної пластичної зони при збільшенні кута вирізу і вартує детальнішого дослідження.

Висновки. Отримано аналітичний розв'язок антиплоскої пружно-пластичної задачі про розвиток пластичних шарів для ідеально пружно-пластичної смуги з кутовими точками на її межі. Знайдено довжину пластичних шарів залежно від величини зосередженої сили, прикладеної на великій відстані від вершин кутів. Визначено величину критичного навантаження Q^* , за якого зливаються пластичні шари, що розвиваються від протилежних вершин вирізів і смуга втрачає опір навантаженню. Критичне навантаження менше за $2\sigma_k$, причому різниця $2\sigma_k - Q^*$ тим більша, що менший кут при вершинах вирізу. Коли величина кута при вершинах вирізу наближається до максимально допустимого значення 90° , за якого кутові точки щезають, а грані смуги стають гладкими, пластичні шари теж поступово зникають, а напружено деформований стан поступово стає однорідним. Отримано прості формули для залежностей довжини пластичних шарів від навантаження за лінійною моделлю пластичної зони. Їх аналіз засвідчив високу точність цієї моделі.

Conclusions. Analytical solution of anti-plane elasto-plastic problem on plastic layers development for ideal elasto-plastic zone with angular points on its edges were obtained. The length of plastic layers depending on the value of the concentrated force applied in large distance from the angles apexes has been found. Maximal load value Q^* was found, under which plastic layers coincide developing from the opposite notch tips and the zone loses its load resistance. Maximal load is less than $2\sigma_k$, the difference $2\sigma_k - Q^*$ being larger, the angle being the less in the notch tips. When the angle value in the notch tips approaches its maximum acceptable value 90° , at which angular points disappear and the zone edges become smooth, the plastic layers disappear gradually and stress-strained state gradually becomes homogeneous. Simple formulae for the plastic layer lengths dependence on load according to the plastic area linear model has been obtained. Their analysis testified the high accuracy of this model.

Список використаної літератури

1. Саврук, М.П. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. Механіка руйнування та міцність матеріалів. Довідн. пос. [Текст] / М.П. Саврук, А. Казберук; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів.: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
2. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термopружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. Сулим Г.Т. – Львів.: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Berto, F. Induced out-of-plane mode at the tip of blunt lateral notches and holes under in-plane shear loading. Fatigue and Fracture of Engineering [Text] / F. Berto, P. Lazzarin, A. Kotousov, L. Pook. – Materials and Structures, 2012, Vol.35. – P.538–555.
4. Lazzarin, P. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches [Text] / P. Lazzarin, R. Zambardi. – International Journal of Fracture. 2001, Vol.15 – P.275–298.

5. Berto, F. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures [Text] / F. Berto, P. Lazzarin. – Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2009, Vol. 52. – P.183–194.
6. Zappalorto, M. Analytical study of the elastic–plastic stress fields ahead of parabolic notches under antiplane shear loading [Text] / M. Zappalorto, P. Lazzarin. – Int J Fract, 2007, Vol. 48. – P.139–154.
7. Kryven, V.A. Development of plastic zones in a body with a rectangular slot under antiplane deformation [Text] / V.A. Kryven, V.B. Valiashek, M.I.Yavorska/ – Material science, 2008, № 4. – P.792–798.
8. Plastic Exfoliation of a Rigid Rectangular Inclusion Under the Action of Concentrated Forces [Text] / V.A. Kryven', M.I. Yavors'ka, A.V. Kaplun, V.B. Valiashek.– Journal of Mathematical Sciences, 2014, №.2. – P.119–131.
9. Kryven', V.A. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium [Text] / V.A. Kryven', V.B. Valiashek. – Journal of Mathematical Sciences, 2010, Vol.171, No. 4. – P107–116.
10. Kryven', V.A. Antiplane problem for an elastic perfectly plastic body with biperiodic system of rhombic notches [Text] / V.A. Kryven'. – Materials Science, 2001, Vol.37, №6. – P.866–872.
11. Lazzarin, P. Plastic notch stress intensity factors for pointed V-notches under antiplane shear loading [Text] / P. Lazzarin, M. Zappalorto. – Int J Fract, 2008, №1. – P.1–25.
12. Иванов, В.И. Конформные отображения и их приложения [Текст] / В.И. Иванов, В.Ю. Попов – М.: Едиториал УРСС, 2002 – 324с.
13. Кривень, В.А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву [Текст] / В.А. Кривень. – Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2004, №4. – С.41–46.
14. Кривень, В.А. Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной [Текст] / В.А. Кривень – Физ.-хим. механика материалов, 1985. – №6. – С.10–16.

Отримано 03.11.2014