

УДК 621.791.927.7

О. Король

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

Резюме. Розроблено математичну модель для визначення температурного поля в області деталі перед заливанням розплавленого рідкого металу в створений технологічний тигель залежно від питомої потужності теплових джерел нагрівання, коли температура на поверхні деталі перевищує температуру Кюрі. Температурне поле створюється в області деталі з метою зменшення градієнта температури після заливання розплавленого металу в створений технологічний тигель, та з метою покращення дифузії розплавленого металу в матеріал деталі. За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності температури від частоти і сили струму в індукторі та тривалості нагрівання.

Ключові слова: індуктор, відновлення, граничні умови, технологічний тигель, температура, питома потужність, теплові джерела, рідкий метал.

O. Korol

MATHEMATIC MODEL OF DETERMINATION THE TEMPERATURE FIELD WHILE RECUPERATING THE CYLINDER-SHAPE PARTS

Summary. The increase of durability and reliability of parts and operating members of machines and mechanisms is one of the most important issues for various sectors of the economy of Ukraine. In order to improve the parts wear resistance during operation, their working surfaces are strengthened by various surfacing methods. Available surfacing processes of worn working cylindrical bodies, induction ones in particular, possess some disadvantages: relatively low productivity, large energy consuming and uneven thickness of the surfacing metal. To improve these characteristics, theoretical foundations of improving welding technology and increasing of its energy efficiency should be developed

Mathematical model of creation the temperature field for the case, when the temperature within the entire region of worn parts exceeds the Curie temperature, was built. Temperature is created in a part to reduce the temperature gradient after pouring of the molten metal in the created crucible in order to increase the wheel and to improve the diffusion of the molten metal in the material of a part. The temperature in the part is described by the differential equation as

Investigation of the temperature field in the part during the process the obtaining of temperature 1450°C on the rim of the part at different heating times and different frequencies, has been carried out.

It was found that for the development of the recuperation technology of worn working surfaces of cylindrical shape bodies it is necessary to heat its prepared end area up to 1300–1450°C to prepare the crucible for pouring in it, the molten metal and cooling of base metal with cast metal in the crucible being followed. At temperature 1450–1600°C both the filled liquid metal and prepared on the border between them the base metal being in the liquid state and in the amount of liquid metal and austenite, that is, conditions for their mutual mixing and diffusion will be created to promote their real joining.

Key words: restoration, boundary conditions, dynamic viscosity, ponderomotive force tangential efforts, hydraulic pressure, shearing stress.

Постановка проблеми. Одним із ефективних способів відновлення експлуатаційних властивостей спрацьованих деталей циліндричної форми є нарощування спрацьованої робочої поверхні деталі розплавленим металом. Для забезпечення надійного з'єднання розплавленого й основного металу необхідно попередньо підготовлену до відновлення поверхню нагріти до високої температури (близької до температури плавлення основного металу). Виходячи з умов досягнення необхідної точності, а також з економічних міркувань, найбільш прийнятливим є індукційний нагрів одночасно всієї робочої поверхні деталі циліндричної форми. Для

побудови раціональних режимів такого нагрівання потрібно побудувати відповідну математичну модель і на її основі провести необхідні дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У літературних джерелах [1–3] представлено технологію індукційного наплавлення деталей циліндричної форми методом заливання рідкого присаджувального металу на підігрітий основний метал. Там відсутня методика визначення конструктивних параметрів нагрівальних систем для забезпечення необхідного нагріву поверхонь деталей залежно від їх механічних, геометричних, тепло- та електрофізичних властивостей, зони нагріву при мінімальних енергетичних і матеріальних витратах. Тому виникає необхідність поглибленого вивчення даного способу відновлення спрацьованих робочих поверхонь деталей циліндричної форми з використанням струмів високої частоти.

Метою даної роботи є розроблення математичної моделі для визначення в області деталі температурного поля, яке необхідно забезпечити перед заливанням рідкого металу в технологічний тигель. Модель повинна передбачати властивість матеріалів втрачати магнітні властивості при досягненні деякої температури. Розподіл внутрішніх джерел тепла залежить від розподілу температур в області деталі. За допомогою розробленої математичної моделі провести дослідження впливу низки факторів на характер температурного поля.

Методи і результати досліджень. Для відновлення спрацьованої циліндричної деталі слід її нагріти по поверхні до деякої необхідної (з технологічних міркувань) температури. Враховуючи той факт, що циліндрична деталь досить масивна, її можна одночасно нагріти по всьому периметру тільки за допомогою індукційного струму, який будемо генерувати за допомогою багатовиткового кільцевого індуктора, що охоплює спрацьовану деталь на деякій відстані від її поверхні. Температура поверхні та її розподіл у глибину залежать від часу нагрівання τ і енергії E , яка передається деталі за цей час. Розподіл енергії внутрішніх джерел тепла залежить від розподілу температури в області деталі.

При нагріванні сталі змінюється її питомий опір ρ і магнітна проникливість μ . Питомий опір збільшується зі зростанням температури до точки магнітних перетворень (температура Кюрі, $T_k \approx 755^\circ C$). З подальшим зростанням температури опір зменшується і при температурі понад $800^\circ C$ він майже постійний і однаковий для всіх сталей. У проміжку до $800^\circ C$ питомий опір збільшується майже в п'ять разів, а при $T \geq T_k$ можна вважати, що $\rho = \rho_k = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Магнітна проникливість слабо залежить від температури приблизно до точки Кюрі, після чого швидко зменшується до магнітної проникливості вакууму. Вважають, як правило, що магнітна проникливість зменшується стрибком. До температури Кюрі відносна магнітна проникливість для сталей приблизно дорівнює $\mu = 16$. Після переходу точки Кюрі $\mu = 1$.

Оскільки радіус циліндричної деталі великий, а індуктор, який охоплює деталь, є паралельним до поверхні деталі, то електромагнітну хвилю, яку генерує індуктор, можна вважати паралельною до поверхні й приблизно вважати плоскою хвилею [4].

В роботі [5] знайдено відповідну математичну модель для визначення питомої потужності теплових джерел в області деталі, коли температура у всій деталі перевищує температуру Кюрі. Питому потужність теплових джерел у всій деталі можна записати у вигляді [5]

$$W = W_0(x)U_-(t_k - t) + [W_1 \cdot U_-(x_k - x) + W_2 \cdot U_+(x - x_k)] \cdot [U_+(\tau - t) - U_-(t_k - t)] \quad (1)$$

де U_+ і U_- – асиметричні одиничні функції, що визначаються за формулами

$$U_{\pm}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0.5 \mp 0.5, & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

де t_k – час появи області, прогрітої вище температури Кюрі; τ – повний час нагріву; $0 \leq x \leq x_k(t)$ – область, в якій температура перевищує температуру Кюрі.

Питомі потужності теплових джерел визначаються за формулами [5]

$$W_0 = 2\pi\mu_0\mu_i f \frac{N^2 I^2}{a} e^{-2k_i(x-x_0)},$$

$$W_1 = \frac{k_1^2}{\gamma_1} H_{me}^2 \frac{M_1^2 + M_2^2}{N_1^2 + N_2^2}, \quad (2)$$

$$W_2 = \frac{k_2^2}{\gamma_2} H_{me}^2 \frac{M_{12}^2 + M_{22}^2}{N_1^2 + N_2^2}, \quad (3)$$

де ω – кругова частота; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнітна постійна; $k_i = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu_i\gamma_i}{2}}$, μ_i – відносна магнітна проникність матеріалу; $\gamma_i = \frac{1}{\rho_i}$ – питома провідність, *сим/м*; ρ_i – питомий опір, Ом·м, ($i=1$ в області $0 \leq x \leq x_k(t)$ і $i=2$ в області $x > x_k(t)$); $H_{me} = \frac{N \cdot I \cdot \sqrt{2}}{a}$, N – кількість витків індуктора; I – струм в індукторі; a – висота індуктора.

$$M_1 = (1 + \sqrt{\mu_2}) e^{-c(x)} \cos c(x) - (1 - \sqrt{\mu_2}) e^{-d(x)} \cos d(x),$$

$$M_2 = (1 + \sqrt{\mu_2}) e^{-c(x)} \sin c(x) - (1 - \sqrt{\mu_2}) e^{-d(x)} \sin d(x),$$

$$N_1 = M_1(x_0), \quad N_2 = M_2(x_0),$$

$$M_{12} = 2\sqrt{\mu_1} e^{-k_2 x} \cos k_2 x; \quad M_{22} = 2\sqrt{\mu_1} e^{-k_2 x} \sin k_2 x,$$

$$c(x) = (k_2 - k_1)x_k + k_1 x; \quad d(x) = (k_2 + k_1)x_k - k_1 x.$$

Надалі вважається [6], що температуропровідність матеріалу деталі a і його теплопровідність λ є постійними по всій його області та дещо вищими від тих, що є на границі $x = x_k$ між феромагнітною та неферомагнітною зонами. Таке представлення є приблизним, але воно дає технічно допустимі результати.

Будемо моделювати деталь нескінченним шаром товщиною H , поверхня $x = 0$ якого нагрівається нескінченним плоским індуктором, розміщеним на деякій близькій до цієї поверхні відстані. В результаті протікання індукційних струмів у деталі виникають джерела джоулевого тепла, питома потужність яких визначається формулами (1)–(3).

Розглянемо спочатку процес індукційного нагріву деталі для проміжку часу $0 \leq t \leq t_k$. Тоді питома потужність джерел Джоулевого тепла описується функцією $W_0(x)$ і температурне поле в деталі описується диференціальним рівнянням [7,8]

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{a}{\lambda} W_0(x) \quad (4)$$

На поверхні деталі $x=0$ має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, а границю шару $x=H$ вважаємо теплоізолюваною, тобто

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} - hT^* = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad T^* = T - T_c, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = H. \quad (6)$$

Тут $h = \frac{\alpha}{\lambda}$; α – коефіцієнт тепловіддачі; $T_c = const$ – температура зовнішнього середовища.

В початковий момент часу температура в деталі дорівнює температурі зовнішнього середовища

$$T^* = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (7)$$

Розв'язок задачі шукаємо з використанням методу Фур'є. Подамо розв'язок однорідного рівняння у вигляді

$$T_1 = \theta(t) \cdot X(x).$$

Для знаходження власних функцій задачі по x отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \nu^2 X = 0, \quad (8)$$

загальний розв'язок якого такий:

$$X = C_1 \cos(\nu x) + C_2 \sin(\nu x).$$

У результаті задоволення граничних умов задачі (5), (6) отримаємо власні функції задачі у вигляді

$$X_j = \cos \nu_j x + \frac{h}{\nu_j} \sin \nu_j x,$$

де власні числа ν_j є коренями характеристичного рівняння

$$\operatorname{tg}(\nu H) = \frac{h}{\nu}. \quad (9)$$

Розкладемо $W_0(x)$ у ряд за власними функціями задачі X_j .

$$W_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j(x). \quad (10)$$

Коефіцієнти розкладу мають вигляд

$$w_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^H W_0(x) X_k(x) dx,$$

де $\|X_j\|^2 = \int_0^H X_j^2 dx = \frac{1}{2\nu_j^2} \left[H(\nu_j^2 + h^2) - \frac{\nu_j^2 - h^2}{2\nu_j} \sin 2\nu_j H + 2h \sin^2 \nu_j H \right].$

Тепер розв'язок неоднорідного рівняння (4) шукаємо у вигляді

$$T^* = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) X_j(x). \quad (11)$$

Підставивши в (4) вираз (11) і формулу (10), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\theta_j}{dt} X_j - a \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) \frac{d^2 X_j}{dx^2} = \frac{a}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j.$$

Враховуючи рівняння (9) для знаходження $\theta_j(t)$, отримуємо рівняння

$$\frac{d\theta_j}{dt} + a\nu_j^2 \theta_j = \frac{a}{\lambda} w_j, \quad (12)$$

розв'язок якого, що задовольняє початкову умову (7), має вигляд

$$\theta_j(t) = \frac{w_j}{\lambda \nu_j^2} (1 - e^{-a\nu_j^2 t}).$$

Таким чином, розв'язок задачі (4)–(7) такий:

$$T^*(x, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{\nu_j^2} (1 - e^{-a\nu_j^2 t}) (\cos \nu_j x + tg \nu_j H \sin \nu_j x). \quad (13)$$

Розглянемо процес нагріву на проміжку часу $t_k < t \leq \tau$. Тоді питома потужність джерел джоулевого тепла описується функцією $W(x) = W_1(x) \cdot U_-(x_k - x) + W_2(x) \cdot U_+(x - x_k)$ і температурне поле в деталі описується диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial x^2} = W(x). \quad (14)$$

Граничні умови на T_1^* залишаються такими ж, як і в попередній задачі, тобто

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x} - hT_1^* = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (T_1^* = T - T_c) \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = H, \quad (16)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$T_1^* = T^*(x, t_k) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{v_j^2} \left(1 - e^{-av_j^2 t_k}\right) (\cos v_j x + tg v_j H \sin v_j x), \quad \text{при } t = 0. \quad (17)$$

Тобто початкова температура в деталі на другому етапі нагріву дорівнює температурі, яка була досягнута на кінець попереднього етапу нагріву.

Розв'язок задачі (14)–(17) шукаємо аналогічно, як і для попереднього етапу нагріву. Легко бачити, що власні функції задачі по x залишаться незмінними і розклад питомої потужності $W(x)$ за ними набуде вигляду

$$W(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{w}_j X_j(x), \quad (18)$$

Його коефіцієнти визначаються за формулою

$$\bar{w}_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^H W(x) X_k(x) dx.$$

Для знаходження функцій $\theta_j(t)$ отримаємо рівняння

$$\frac{d\theta_j}{dt} + av_j^2 \theta_j = \frac{a}{\lambda} \bar{w}_j,$$

загальний розв'язок якого

$$\theta_j(t) = \frac{\bar{w}_j}{\lambda v_j^2} + D_j e^{-av_j^2 t}.$$

Загальний розв'язок задачі (14)–(16) запишемо

$$T_1^*(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{w}_j}{\lambda v_j^2} + D_j e^{-av_j^2 t} \right) (\cos v_j x + tg v_j H \sin v_j x).$$

Задовольнимо початкову умову (17). У результаті для постійних інтегрування знайдемо $D_j = \frac{1}{\lambda v_j^2} \left[w_j \left(1 - e^{-av_j^2 t_k}\right) - \bar{w}_j \right]$ й остаточно шуканий розв'язок набуде вигляду

$$T_1^*(x, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{w}_j}{\nu_j^2} (1 - e^{-\alpha \nu_j^2 t}) + \frac{w_j}{\nu_j^2} (1 - e^{-\alpha \nu_j^2 t_k}) e^{-\alpha \nu_j^2 t} \right] (\cos \nu_j x + \operatorname{tg} \nu_j H \sin \nu_j x) \quad (19)$$

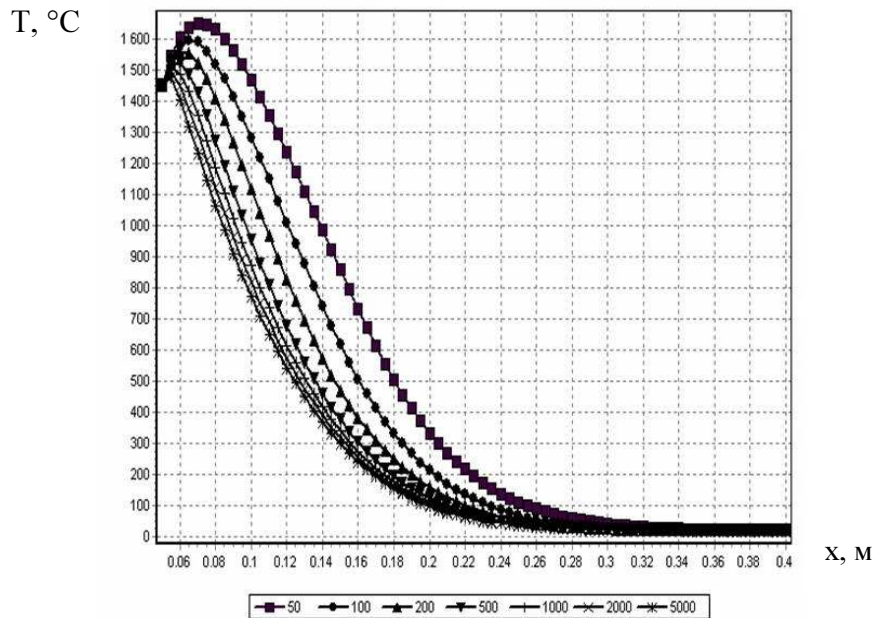


Рисунок 1. Залежність температури в деталі T від біжучої координати при тривалості нагрівання $\tau = 600$ с і при різних значеннях частоти струму f в процесі досягнення на ободі колеса температури $T = 1450$ °С, коли індуктор має $N = 7$ витків

Figure 1. Dependence of temperature in part T on traveling coordinates during heating time $\tau = 600$ s under different values of frequencies f while reusing temperature $T = 1450$ °С, on the rim of the part when the coil has $N = 7$ turns

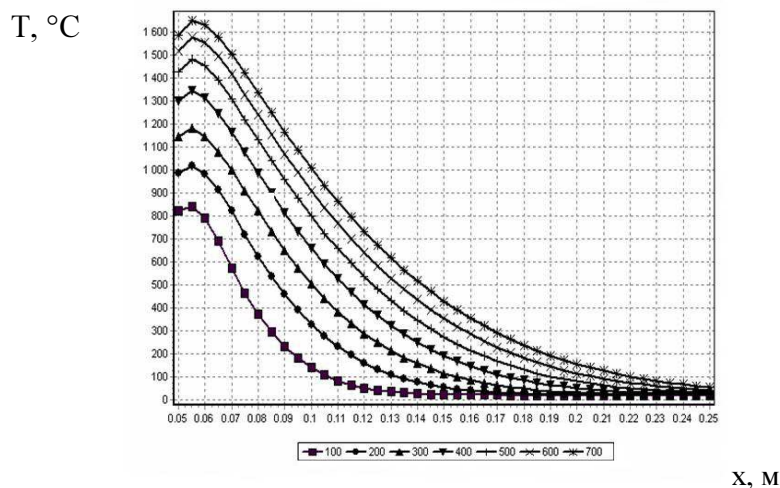


Рисунок 2. Залежність температури в деталі T від біжучої координати при різних значеннях тривалості нагрівання τ на частоті $f = 1000$ Гц при струмі $I = 2000$ А, коли індуктор має $N = 7$ витків

Figure 2. Dependence of temperature in the part T on traveling coordinates at different values of heating T under the frequency $f = 1000$ Hz at current $I = 2000$ A, and the inductor has $N = 7$ turns

З допомогою формули (19) знаходимо температуру в деталі в будь-який момент часу й у всіх точках деталі у випадку, коли температура в частині деталі перевищує температуру Кюрі, а також розв'язуємо цілу низку задач, пов'язаних з нагрівом деталі з метою створення температури, сприятливої для його нарощування.

За допомогою формули (19) досліджено температуру в деталі (рис.1) при тривалості нагрівання $\tau = 600$ с, кількості витків індуктора $N = 7$ для різних значень частоти струму в процесі досягнення на поверхні циліндричної деталі температури 1450°C . З графіків бачимо, що в наведених випадках температура в деталі починає зростати при $x = 0,30$ м, а координата точки на стику деталі й осі дорівнює $x = 0,3675$ м. Тобто в цій точці температура ще не збільшується, але вже потрібно вживати заходи для недопущення її зростання, бо після заливання розплавленого металу в утворений тигель температура в деталі може збільшуватися.

З рис.2 бачимо, що температура на поверхні деталі зростає при збільшенні тривалості нагрівання. Якщо в індукторі з частотою $f = 1000$ Гц та струмом $I_i = 1800$ А, $N = 7$ за час 100 с досягається температура 900°C на поверхні, тоді при $x = 0,115$ м вона дорівнює тільки 50°C . Якщо при $\tau = 700$ с найбільша температура $T = 1520^\circ\text{C}$, $T = 50^\circ\text{C}$ досягається при $x = 0,245$ м.

Висновки. Побудовано математичну модель створення температурного поля у випадку, коли в усій області зношених робочих поверхонь тіл обертання температура перевищує температуру Кюрі. Температура створюється в деталі з метою зменшення градієнта температури після заливання розплавленого металу в створений тигель з метою нарощування деталі та покращення дифузії розплавленого металу в матеріал тіла обертання. Знайдено алгоритм визначення температурного поля в тілі обертання, що створюється індуктором, проведено його дослідження в процесі досягнення на поверхні температури 1450°C при різних часах нагрівання та різних частотах. Отримано формули для визначення потужності теплових джерел, що витрачається власне в тілі обертання на його нагрівання та досліджено її залежно від частоти струму, сили струму й часу нагрівання. Показано, що зі зростанням частоти потужність і сила струму знижується, направляючись до якоїсь (знайденої) величини (тобто проходить насичення). Зі зменшенням часу нагрівання необхідна потужність і сила струму зростають. Установлено, що для розроблення технологій нарощування спрацьованих робочих поверхонь тіл обертання з метою ремонту необхідно нагріти його підготовлену торцеву частину до $1300\text{--}1450^\circ\text{C}$ з метою підготовки технологічного тигеля до заливання в нього розплавленого металу та подальшого остигання основного металу разом із залитим металом у тигель. Причому при $1450\text{--}1600^\circ\text{C}$ як залитий рідкий метал, так і підготовлений на границі між ними основний метал будуть у рідкому стані й у складі рідкого металу й аустеніту. Тобто будуть створені умови для їхнього взаємного перемішування та дифузії, що буде сприяти їхньому дійсному з'єднанню. Таке попереднє нагрівання необхідно використовувати для реалізації технології виготовлення бандажа з необхідним натягом.

Conclusions. Mathematic model of creation the temperature field for the case, when within all area of worn working surfaces of folding bodies the temperature exceeds the Curie temperature, has been built. The temperature is created in the part to reduce the temperature gradient after pouring the molten metal in the designed crucible in order to recuperate parts and improve diffusion of the molten metal in the material of the rotating body. The algorithm for determining the temperature field in the rotating body, created by the inductor, was found and its research during the temperature growth to 1450°C at different heating times and different frequencies was conducted. Formulas for of heat sources power, which is spent in

the rotating body itself for its heating, have been obtained and its dependence on the current frequency, current and heating time is researched. It is shown that with the increase of frequency the power and current strength decreases, approaching some (found) value (that is, saturation takes place). With the decrease of heating time the power and current strength increase. It was established that for the development of technology for recovering of worn working surfaces of rotating bodies in order to recuperate them it is necessary to heat the prepared end area up to 1300–1450°C in order to prepare technological crucible be filled with in it the molten, metal cooling of the base metal with cast metal in the crucible is followed. At the temperature 1450–1600°C both filled liquid metal and prepared on the border between them base metal being in the liquid state and in the amount of liquid metal and austenite. That is, the conditions for their mutual mixing and diffusion will be created to promote their joining. Such pre-heating should be used to realise the manufacturing technology band with the necessary pooling.

Список використаної літератури.

1. Рябцев, И.А. Наплавления деталей машин и механизмов [Текст] / И.А. Рябцев. – Киев: Экотехнология, 2004. – 160 с.
2. Ксендзык, Г.В. Кольцевая электрошлаковая наплавка цилиндрических деталей в вертикальном положении [Текст] / Г.В. Ксендзык // Автоматическая сварка. – 1966. – №5. – С.63–67.
3. Рябцев, И.А. Индукционная наплавка [Текст] / И.А. Рябцев // Сварщик. – 2000 – №5. – С.13–16.
4. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
5. Створення температурного поля на торці спрацьованого металевого колеса, коли температура перевищує температуру Кюрі [Текст] / О.М. Шаблій, Ч.В. Пулька, О.І. Король, М.С. Базар // Вісник ТНТУ ім. Івана Пулюя. – №1. – 2012. – С.208–219.
6. Слухоцкий, А.Е. Индукторы для индукционного нагрева машиностроительных деталей. Проектирование и изготовление. [Текст] / А.Е. Слухоцкий, С.Е. Рыскин. – М.: Машгиз, 1954. – 320 с.
7. Слухоцкий, А.Е. Индукторы для индукционного нагрева [Текст] / А.Е. Слухоцкий. – Л.: Машиностроение, 1978. – 325 с.
8. Слухоцкий, А.Е. Индукторы [Текст] / А.Е. Слухоцкий. – Л.: Машинобудування, 1979. – 70 с.
9. Цимбалюк, Л.І. Визначення температурного поля в колесі в залежності від питомої потужності джерел нагріву [Текст] / Л.І. Цимбалюк, О.І. Король, М.С. Базар // Тези доповіді на 11 міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків у Львові 15 – 17 травня. – 2013. – С.56–57.

Отримано 02.06.2014