

Дудик М. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина / М. Дудик // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 75. — № 3. — С. 87-98. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

М. Дудик, канд. фіз.-мат. наук

Уманський державний педагогічний університет

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БІЛЯ КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ, З ЯКОЇ ВИХОДИТЬ МІЖФАЗНА ТРІЩИНА

**Резюме.** В умовах плоскої деформації за допомогою перетворення Мелліна виконано розрахунок полів напружень і переміщень біля вершини півнескінченної міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Досліджено вплив кута зламу і пружних параметрів з'єднаних матеріалів на показник сингулярності в околі вершини. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень біля вершини тріщини при навантаженні її берегів заданим напруженням.

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, кутова точка межі поділу матеріалів, коефіцієнт інтенсивності напружень.

M. Dudyk

## INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE NEAR THE CORNER POINT OF INTERFACE, FROM WHICH THE INTERFACIAL CRACK IS INITIATED

**Summary.** Under the plane strain we consider the problem of the stress-strain state of piece-homogeneous body at the semi-infinite interfacial crack tip threshold, initiated from the angular point of the broken interface of two different isotropic elastic media. Part of the crack lips is loaded by given tangential and tensile normal stresses. The ideal joint is expected to be on the interface. Having applied the Mellin integral transformation to equations of equilibrium, condition of compatibility of strains, the Hooke's law and boundary conditions, we reduce the formulated static boundary problem of the elastic theory to the system of algebraic equations, which determines the transforms of stresses and displacement at the crack tip threshold. By inverse Mellin transformation of the found transforms we deduce the formulas for the asymptotic field of stresses and displacements at the crack tip threshold as an expansion in terms of value of distance to the tip. These powers are the roots of some transcendent algebraic equation, obtained during the solution of the problem. The numerical analysis of roots of this characteristic equation of the problem for some elastic parameters of the joined materials and the interfacial angles shows the presence of values with negative real part among them, which causes the stress concentration at approaching to the crack tip. It is discovered that the singular behaviour of stresses at the crack tip threshold differs from the root. Physically incorrect spatial oscillations caused by the presence of imaginary part in the index of singularity superimpose on the power singularity of stresses in some interval of interfacial angles depended on the elastic parameters of the joined materials. It is supposed that the formation of area of contact of crack lips corresponds to this situation. The expression for the crack opening at the tip threshold was found and the possible contact zone sizes were estimated. On the basis of this expression the condition of correctness of the found problem solution was formulated.

By comparing the obtained expansion of stresses with the solution of analogical canonical problem the similar formulas for the coefficients of intensity were deduced. The necessity of introduction of the two coefficients of intensity due to the absence of symmetry in the structure of piece-homogeneous body with the broken interface was substantiated. The obtained formulas were applied in the particular cases of the constant stresses action on the part of the crack lips or the concentrated forces. The obtained results can be used for the estimation of the fracture toughness of piece-homogeneous body with an interfacial crack for the calculations of the pre-fracture zone at the crack tip threshold in particular.

**Key words:** interface crack, corner point of the interface, stress intensity factor.

**Вступ.** Розвиток тріщиноподібних дефектів по межі поділу різних матеріалів є однією з найпоширеніших причин руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань, гірських порід тощо. Увага переважної більшості дослідників приділялася тріщинам,

розташованим на плоскій межі поділу, тоді як бракує розв'язків задач про міжфазну тріщину, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу середовищ. Зокрема, в [1] в умовах плоскої деформації з використанням методу Мусхелішвілі отримано характеристичні рівняння для визначення показників сингулярності напружень в околі вершини кута для різних граничних умов на берегах тріщини. В роботах [2,3] розвинені числові методи розрахунку показників сингулярності у точці з'єднання кількох клинів, які можуть бути пристосовані до біматеріальної площини з ламаною межею поділу, що містить міжфазну тріщину. Розрахунку напружено-деформованого стану в мультиматеріальних клинових системах і кусково-однорідних тілах з негладкою межею поділу присвячені дисертаційні дослідження [4,5].

**Метою роботи** є знаходження полів напружень і переміщень в околі вершини кута ламаної межі поділу двох пружних середовищ, з якої виходить півнескінченна міжфазна тріщина, визначення коефіцієнта інтенсивності напружень при дії на її берегах заданих нормального відривного та дотичного напружень і дослідження залежності параметрів напружено-деформованого стану від характеристик з'єднаних тіл.

**Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядається задача про напружено-деформований стан кусково-однорідного тіла, що складається з двох лінійно-пружних клинів з модулями Юнга  $E_1, E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ , які доповнюють один одного до повної площини. На ламаній межі поділу з кутом зламу  $\alpha$  уздовж лінії  $\theta = 0$  має місце ідеальне з'єднання, а уздовж іншої її частини  $\theta = -\alpha \cup \pi - \alpha$  розташована півнескінченна тріщина (рис.1), навантажена заданими дотичним і розтягувальним нормальним напруженнями. Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині тріщини, що передбачає розв'язання статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0; \\ \theta = -\alpha \cup 2\pi - \alpha: \sigma_\theta = -\sigma(r), \tau_{r\theta} = \tau(r); \\ \forall \theta, r \rightarrow \infty: \sigma_\theta(r, \theta) = o(1/r), \tau_{r\theta}(r, \theta) = o(1/r); \end{aligned} \quad (1)$$

$\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ .

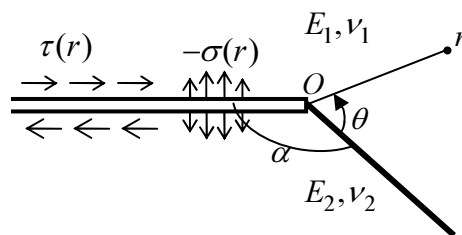


Рисунок 1. Розрахункова схема задачі

Figure 1. The calculation scheme of problem

**Побудова розв'язку задачі.** Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій і закону Гуку інтегральне перетворення Мелліна [6]

$$f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr,$$

отримаємо наступні вирази для трансформант напружень і похідних від переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{k*}(p, \theta) &= a_1^k(p) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p) \sin(p-1)\theta + a_3^k(p) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p) \cos(p-1)\theta, \\ \tau_{r\theta}^{k*}(p, \theta) &= \frac{1}{p-1} \left[ a_1^k(p)(p+1) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \right. \\ &\quad \left. - a_3^k(p)(p+1) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta \right], \\ \left( \frac{\partial u_{\theta}^k}{\partial r} \right)^* &= \frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} \left[ a_1^k(p)(p-\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \right. \\ &\quad \left. - a_3^k(p)(p-\kappa_k) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta \right], \\ \left( \frac{\partial u_r^k}{\partial r} \right)^* &= -\frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} \left[ a_1^k(p)(p+\kappa_k) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \right. \\ &\quad \left. + a_3^k(p)(p+\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta \right], \end{aligned} \quad (2)$$

де  $a_j^k(p)$  ( $j=1,2,3,4$ ) – невідомі функції, які визначаються в ході розв’язання задачі ( $k=1$  для першого і  $k=2$  для другого матеріалу),  $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$ .

Підставивши (2) в перетворені за Мелліном граничні умови (1), прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для  $a_j^k(p)$ , розв’язок якої виражається через трансформанти  $\sigma^*(p)$  і  $\tau^*(p)$  заданих на берегах тріщини напружень:

$$\begin{aligned} a_j^k(p) &= \frac{1}{D(p)} \left[ a_{j\sigma}^k(p) \sigma^*(p) + a_{j\tau}^k(p) \tau^*(p) \right], \quad (3) \\ D(p) &= (1+\kappa_1)^2 \Delta_1 + e^2 (1+\kappa_2)^2 \Delta_2 - 4(1-e)^2 \Delta_1 \Delta_2 - 2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \Delta_3 + \\ &\quad - 4(1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 \sin^2 p(2\pi - \alpha) + 4(1-e)e(1+\kappa_2) \Delta_2 \sin^2 p\alpha, \\ \Delta_1 &= p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\ \Delta_3 &= p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) \cos 2p\pi, \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}; \\ a_{1\sigma}^1 &= (p-1) \left[ e^2 (1+\kappa_2)^2 \sin p\pi \cdot d_1 + 2(1-e)^2 \Delta_1 d_2 - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \sin p\pi \cdot d_3 + \right. \\ &\quad \left. + (1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,5(1-e)e(1+\kappa_2) f_1 \right], \\ a_{1\tau}^1 &= (p-1) \left[ e^2 (1+\kappa_2)^2 \sin p\pi \cdot d_5 - 2(1-e)^2 (p-1) \Delta_1 \delta_5 - \right. \\ &\quad \left. - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \sin p\pi \cdot d_6 + (1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,5(1-e)e(1+\kappa_2) f_2 \right], \\ a_{2\sigma}^1 &= (1+\kappa_1)^2 \Delta_1 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,25e^2 (1+\kappa_2)^2 f_3 - 2(1-e^2)(p+1) \Delta_1 d_2 - \\ &\quad - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)(A_1 p^2 + B_1 p + C_1) - (1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 d_7 - 0,5(1-e)e(1+\kappa_2) g_1 \left. \right], \\ a_{2\tau}^1 &= (1+\kappa_1)^2 \Delta_1 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,25e^2 (1+\kappa_2)^2 g_2 + 2(1-e)^2 (p^2 - 1) \Delta_1 \delta_5 - \\ &\quad - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)(A_2 p^2 + B_2 p + C_2) - (1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 d_8 - 0,5(1-e)e(1+\kappa_2) g_3 \left. \right], \\ a_{3\sigma}^1 &= (p-1) \left[ 0,25e^2 (1+\kappa_2)^2 f_4 - 2(1-e)^2 (p+1) \Delta_1 \delta_5 - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \sin p\pi \cdot d_9 - \right. \\ &\quad \left. - (1-e)(1+\kappa_1) \Delta_1 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 0,5(1-e)e(1+\kappa_2) f_5 \right], \\ a_{3\tau}^1 &= (p-1) \left[ -e^2 (1+\kappa_2)^2 \sin p\pi \cdot d_{10} - 2(1-e)^2 \Delta_1 d_4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin p\pi \cdot d_{11} + (1 - e)(1 + \kappa_1)\Delta_1 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,5(1 - e)e(1 + \kappa_2)f_6 \Big], \\
 a_{4\sigma}^1 & = (1 + \kappa_1)^2 \Delta_1 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,25e^2(1 + \kappa_2)^2 g_4 + 2(1 - e)^2(p^2 - 1)\Delta_1 \delta_5 - \\
 & - (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_2 p^2 - B_2 p + C_2) + (1 - e)(1 + \kappa_1)\Delta_1 d_{12} - 0,5(1 - e)e(1 + \kappa_2)g_5 \Big], \\
 a_{4\tau}^1 & = -(1 + \kappa_1)^2 \Delta_1 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 0,25e^2(1 + \kappa_2)^2 f_7 + 2(1 - e)^2(p - 1)\Delta_1 d_4 + \\
 & + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_1 p^2 - B_1 p + C_1) - (1 - e)(1 + \kappa_1)\Delta_1 d_{13} - 0,5(1 - e)e(1 + \kappa_2)g_6 \Big], \\
 a_{1\sigma}^2 & = (p - 1) \Big[ -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_1 + 2(1 - e)^2 \Delta_2 \delta_3 + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin p\pi \cdot d_1 + \\
 & + 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)f_8 + (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 \sin(p - 1)\alpha \Big], \\
 a_{1\tau}^2 & = (p - 1) \Big[ -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_2 + 2(1 - e)^2(p - 1)\Delta_2 \delta_8 + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin p\pi \cdot d_5 + \\
 & + 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)f_9 - (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 \cos(p - 1)\alpha \Big], \\
 a_{2\sigma}^2 & = -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_3 - 2(1 - e)^2(p + 1)\Delta_2 \delta_3 - e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 \sin(p - 1)\alpha - \\
 & - (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_3 p^2 + B_3 p + C_3) - 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)g_7 - (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 d_{14}, \\
 a_{2\tau}^2 & = 0,25(1 + \kappa_1)^2 h_4 - 2(1 - e)^2(p^2 - 1)\Delta_2 \delta_8 + e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 \cos(p - 1)\alpha - \\
 & - (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_4 p^2 + B_4 p + C_4) - 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)g_8 + (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 d_{15}, \\
 a_{3\sigma}^2 & = (p - 1) \Big[ -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_5 + 2(1 - e)^2(p + 1)\Delta_2 \delta_8 + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin p\pi \cdot d_{16} - \\
 & - 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)f_{10} + (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 \cos(p - 1)\alpha \Big], \\
 a_{3\tau}^2 & = (p - 1) \Big[ -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_6 - 2(1 - e)^2 \Delta_2 \delta_4 - (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin p\pi \cdot d_{10} - \\
 & - 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)f_{11} + (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 \sin(p - 1)\alpha \Big], \\
 a_{4\sigma}^2 & = 0,25(1 + \kappa_1)^2 h_7 - 2(1 - e)^2(p^2 - 1)\Delta_2 \delta_8 + e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 \cos(p - 1)\alpha - \\
 & - (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_4 p^2 - B_4 p + C_4) - 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)g_9 - (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 d_{17}, \\
 a_{4\tau}^2 & = -0,25(1 + \kappa_1)^2 h_8 + 2(1 - e)^2(p - 1)\Delta_2 \delta_4 + e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 \sin(p - 1)\alpha + \\
 & + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(A_3 p^2 - B_3 p + C_3) + 0,5(1 - e)(1 + \kappa_1)g_{10} - (1 - e)e(1 + \kappa_2)\Delta_2 d_{18}; \\
 d_1 & = p \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) + \sin p(2\pi - \alpha) \sin(p\pi - \alpha), \\
 d_2 & = p \sin \alpha \cos p(2\pi - \alpha) - \cos \alpha \sin p(2\pi - \alpha), \\
 d_3 & = p \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) + \sin p\alpha \sin(p\pi + \alpha), \\
 d_4 & = p \sin \alpha \cos p(2\pi - \alpha) + \cos \alpha \sin p(2\pi - \alpha), \\
 d_5 & = p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) - \sin p(2\pi - \alpha) \cos(p\pi - \alpha), \\
 d_6 & = p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) + \sin p\alpha \cos(p\pi + \alpha), \\
 d_7 & = p \sin(2p\pi - p\alpha - \alpha) + \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) + \cos \alpha \sin p(2\pi - \alpha), \\
 d_8 & = p \cos(2p\pi - p\alpha - \alpha) + \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2\delta_5, \\
 d_9 & = p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) - \sin p\alpha \cos(p\pi + \alpha), \\
 d_{10} & = p \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) - \sin p(2\pi - \alpha) \sin(p\pi - \alpha), \\
 d_{11} & = p \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) - \sin p\alpha \sin(p\pi + \alpha), \\
 d_{12} & = p \cos(2p\pi - p\alpha - \alpha) - \cos \alpha \cos p(2\pi - \alpha) + 3\delta_5, \\
 d_{13} & = p \sin(2p\pi - p\alpha - \alpha) - \sin \alpha \cos p(2\pi - \alpha) - 3 \cos \alpha \sin p(2\pi - \alpha),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{14} &= p \sin(p+1)\alpha + 3 \cos \alpha \sin p\alpha - \sin \alpha \cos p\alpha, \\
 d_{15} &= p \cos(p+1)\alpha + 3\delta_8 + \cos \alpha \cos p\alpha, \\
 d_{16} &= p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) + \sin p(2\pi - \alpha) \cos(p\pi - \alpha), \\
 d_{17} &= p \cos(p+1)\alpha - 3\delta_8 - \cos \alpha \cos p\alpha, \\
 d_{18} &= p \sin(p+1)\alpha - 3 \cos \alpha \sin p\alpha + \sin \alpha \cos p\alpha; \\
 f_1 &= 4d_2 \sin^2 p\alpha - (p+1)\delta_1\delta_8 + 2\delta_2\delta_3, \\
 f_2 &= \delta_1\delta_4 - 4(p-1)\delta_5 \sin^2 p\alpha + 2(p-1)\delta_2\delta_8, \\
 f_3 &= (p+1)\delta_1 \cos(p-1)\alpha + 2(p-1)\delta_6 \sin(p-1)\alpha - 2(p+1)d_2, \\
 f_4 &= 2(p+1)\delta_5 + 2\delta_6 \cos(p-1)\alpha + \delta_7 \sin(p-1)\alpha, \\
 f_5 &= 4(p+1)\delta_5 \sin^2 p\alpha + 2(p+1)\delta_6\delta_8 + \delta_3\delta_7, \\
 f_6 &= -4d_4 \sin^2 p\alpha - (p-1)\delta_7\delta_8 + 2\delta_4\delta_6, \\
 f_7 &= 2(p-1)d_4 - 2(p+1)\delta_2 \sin(p-1)\alpha - (p-1)\delta_7 \cos(p-1)\alpha \\
 f_8 &= 4\delta_3 \sin^2 p(2\pi - \alpha) + (p+1)\delta_5\delta_9 + 2d_2\delta_{10}, \\
 f_9 &= 4(p-1)\delta_8 \sin^2 p(2\pi - \alpha) + d_4\delta_9 - 2(p-1)\delta_5\delta_{10}, \\
 f_{10} &= -4(p+1)\delta_8 \sin^2 p(2\pi - \alpha) - 2(p+1)\delta_5\delta_{11} + d_2\delta_{12}, \\
 f_{11} &= 4\delta_4 \sin^2 p(2\pi - \alpha) - (p-1)\delta_5\delta_{12} - 2d_4\delta_{11}; \\
 g_1 &= (p+1)^2 \delta_1\delta_8 - 4(p+1)d_2 \sin^2 p\alpha + 2(p-1)\delta_3\delta_6, \\
 g_2 &= 2(p^2 - 1)\delta_5 + (p+1)\delta_1 \sin(p-1)\alpha - 2(p-1)\delta_6 \cos(p-1)\alpha, \\
 g_3 &= 4(p^2 - 1)\delta_5 \sin^2 p\alpha - (p+1)\delta_1\delta_4 + 2(p-1)^2 \delta_6\delta_8, \\
 g_4 &= 2(p^2 - 1)\delta_5 - 2(p+1)\delta_2 \cos(p-1)\alpha + (p-1)\delta_7 \sin(p-1)\alpha, \\
 g_5 &= 4(p^2 - 1)\delta_5 \sin^2 p\alpha - 2(p+1)^2 \delta_2\delta_8 + (p-1)\delta_3\delta_7, \\
 g_6 &= 4(p-1)d_4 \sin^2 p\alpha + 2(p+1)\delta_2\delta_4 + (p-1)^2 \delta_7\delta_8, \\
 g_7 &= (p+1)^2 \delta_5\delta_9 - 2(p-1)\delta_{11}d_2 + 4(p+1)\delta_3 \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 g_8 &= 4(p^2 - 1) \sin^2 p(2\pi - \alpha)\delta_8 + (p+1)d_4\delta_9 + 2(p-1)^2 \delta_5\delta_{11}, \\
 g_9 &= 4(p^2 - 1) \sin^2 p(2\pi - \alpha)\delta_8 - (p-1)d_2\delta_{12} - 2(p+1)^2 \delta_5\delta_{10}, \\
 g_{10} &= 4(p-1)\delta_4 \sin^2 p(2\pi - \alpha) - (p-1)^2 \delta_5\delta_{12} + 2(p+1)d_4\delta_{10}; \\
 h_1 &= 2\delta_3 - \delta_9 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2\delta_{10} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha), \\
 h_2 &= 2(p-1)\delta_8 + \delta_9 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2\delta_{10} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha), \\
 h_3 &= (p+1)\delta_9 \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2(p-1)\delta_{11} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2(p+1)\delta_3, \\
 h_4 &= (p+1)\delta_9 \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 2(p-1)\delta_{11} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 2(p^2 - 1)\delta_8, \\
 h_5 &= 2(p+1)\delta_8 + \delta_{12} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) - 2\delta_{11} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha), \\
 h_6 &= -2\delta_4 + \delta_{12} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 2\delta_{11} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha), \\
 h_7 &= 2(p^2 - 1)\delta_8 + (p-1)\delta_{12} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 2(p+1)\delta_{10} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha), \\
 h_8 &= 2(p-1)\delta_4 - (p-1)\delta_{12} \cos(2p\pi - p\alpha + \alpha) + 2(p+1)\delta_{10} \sin(2p\pi - p\alpha + \alpha); \\
 \delta_1 &= p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), & \delta_2 &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 \delta_3 &= p \sin \alpha \cos p\alpha + \cos \alpha \sin p\alpha, & \delta_4 &= p \sin \alpha \cos p\alpha - \cos \alpha \sin p\alpha, \\
 \delta_5 &= \sin \alpha \sin p(2\pi - \alpha), & \delta_6 &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_7 &= p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha), & \delta_8 &= \sin \alpha \sin p\alpha, \\
 \delta_9 &= p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, & \delta_{10} &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \\
 \delta_{11} &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, & \delta_{12} &= p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha; \\
 A_1 &= \sin \alpha [\cos p(2\pi - \alpha) - \cos p\pi \cos(p\pi - p\alpha + 2\alpha)], \\
 B_1 &= \cos p\pi [2 \sin^2 p\pi \sin(p\pi - p\alpha + \alpha) + \sin p(2\pi - \alpha) \cos(p\pi - \alpha) - \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha)] - \\
 &\quad - \sin(2p\pi - p\alpha - \alpha), \\
 C_1 &= \sin p\alpha [\cos 2p\pi \cos \alpha - \cos p\pi \cos(3p\pi - 2p\alpha + \alpha)], \\
 A_2 &= \sin \alpha \cos p\pi \sin(p\pi - p\alpha + 2\alpha) - \delta_5, \\
 B_2 &= \cos p\pi [-2 \sin^2 p\pi \cos(p\pi - p\alpha + \alpha) + \sin p(2\pi - \alpha) \sin(p\pi - \alpha) + \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha)], \\
 C_2 &= \sin p\alpha [\cos p\pi \sin(3p\pi - 2p\alpha + \alpha) - \sin \alpha \cos 2p\pi], \\
 A_3 &= \sin \alpha [\cos p\alpha - \cos p\pi \cos(p\pi - p\alpha + 2\alpha)], \\
 B_3 &= \cos p\pi [2 \sin^2 p\pi \sin(p\pi - p\alpha + \alpha) - \sin p\alpha \cos(p\pi + \alpha) - \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha)] + \\
 &\quad + \sin(p+1)\alpha, \\
 C_3 &= \sin p(2\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos(p\pi - 2p\alpha + \alpha) - \cos \alpha \cos 2p\pi], \\
 A_4 &= \sin \alpha [\sin p\alpha + \cos p\pi \sin(p\pi - p\alpha + 2\alpha)], \\
 B_4 &= \cos p\pi [-2 \sin^2 p\pi \cos(p\pi - p\alpha + \alpha) + \sin p\alpha \sin(p\pi + \alpha) + \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha)], \\
 C_4 &= \sin p(2\pi - \alpha) [\sin \alpha \cos 2p\pi - \cos p\pi \sin(p\pi - 2p\alpha + \alpha)].
 \end{aligned}$$

Підстановка (3) в (2) призводить до виразів для трансформант, які мають структуру

$$f^*(p, \theta) = \frac{1}{D(p)} [f_\sigma(p, \theta) \sigma^*(p) + f_\tau(p, \theta) \tau^*(p)],$$

де  $f_\sigma(p, \theta)$ ,  $f_\tau(p, \theta)$  – регулярні при будь-яких  $p$  функції. Оригінали напружень і похідних переміщень по  $r$  отримаємо зворотним перетворенням Мелліна

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f^*(p, \theta) r^{-p-1} dp,$$

припускаючи відсутність полюсів у трансформант  $\sigma^*(p)$  і  $\tau^*(p)$ , за допомогою теореми про лишки знайдемо

$$f(r, \theta) = \sum_i C_i r^{\lambda_i}, \quad (4)$$

де  $\lambda_i$  – корені рівняння

$$D(-1-x) = 0 \quad (5)$$

у півплощині  $\operatorname{Re} x > -1$ ;  $C_i$  – відомі функції кутів  $\theta$ ,  $\alpha$  і пружних параметрів з'єднаних матеріалів, які відповідають правим частинам формул (2) після підстановки в них (3) із заміною  $D(p) \rightarrow D'(p) = dD(p)/dp$  та  $p \rightarrow -1 - \lambda_i$ . Зокрема, напруження на межі поділу дорівнюють

$$\sigma_\theta(r, 0) = S(-1) + \sum_i S(-1 - \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad \tau_\theta(r, 0) = T(-1) + \sum_i T(-1 - \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad (6)$$

$$S(p) = \frac{1}{D'(p)} \left\{ \left[ a_{3\sigma}^1(p) + a_{4\sigma}^1(p) \right] \sigma^*(p) + \left[ a_{3\tau}^1(p) + a_{4\tau}^1(p) \right] \tau^*(p) \right\},$$

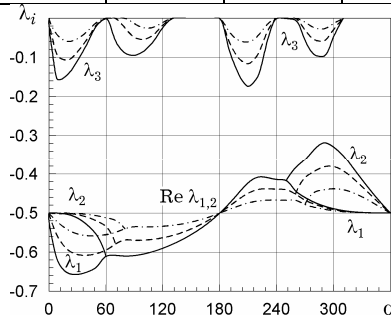
$$T(p) = \frac{\left[ (p+1)a_{1\sigma}^1(p) + (p-1)a_{4\sigma}^1(p) \right] \sigma^*(p) + \left[ (p+1)a_{1\tau}^1(p) + (p-1)a_{2\tau}^1(p) \right] \tau^*(p)}{(p-1)D'(p)}.$$

**Аналіз напружено-деформованого стану біля вершини тріщини.** З (4), (6) випливає, що поведінка напружень біля вершини тріщини носитиме сингулярний характер, якщо рівняння (5) матиме корені у смугі  $-1 < \text{Re } x < 0$ . Числовий аналіз рівняння (5), виконаний в [7], показав, що таких коренів може бути 2 або 3 (рис.2), причому існує інтервал кутів зламу  $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ , для яких рівняння (5) має у смугі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  два комплексно спряжені корені. Значення  $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$  для окремих параметрів пружних середовищ наведені у таблиці 1.

**Таблиця 1**

Інтервал кутів зламу межі поділу середовищ, яким відповідають комплексні корені рівняння (6) у смугі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ )

$E_1 / E_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268



**Рисунок 2.** Залежність показника сингулярності напружень  $\lambda_i$  від кута зламу межі поділу середовищ  $\alpha$  для  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  і  $E_1 / E_2 = 0,1$  (суцільні лінії),  $E_1 / E_2 = 0,25$  (пунктирні лінії),  $E_1 / E_2 = 0,5$  (штрих-пунктирні лінії)

**Figure 2.** Dependence of the stresses singularity value  $\lambda_i$  on the interfacial angles  $\alpha$  for  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  and  $E_1 / E_2 = 0,1$  (solid lines),  $E_1 / E_2 = 0,25$  (dashed lines),  $E_1 / E_2 = 0,5$  (dash-dot lines)

У поведінці напружень при наближенні до вершини тріщини головну роль відіграватимуть доданки, що відповідають найменшим, близьким за величиною кореням  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  (рис.2), тому поле напружень біля вершини повинно визначатися двома коефіцієнтами інтенсивності напружень. Необхідність введення двох КІН є типовою для міжфазної тріщини і зумовлена відсутністю симетрії у будові кусково-однорідного тіла, через що  $K_1$  і  $K_2$  не прив'язуються до I і II мод навантаження [8].

Коефіцієнти інтенсивності знайдемо з порівняння отриманих вище асимптотик (6)  $\sigma_\theta(r, 0)$  з відомим асимптотичним розв'язком канонічної задачі теорії пружності про півнескінченну міжфазну тріщину, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів [7], що дає такі вирази для КІН:

$$K_1 = (2\pi)^{-\lambda_1} S(-1-\lambda_1) / F(\lambda_1), \quad K_2 = (2\pi)^{-\lambda_2} S(-1-\lambda_2) / F(\lambda_2), \quad (7)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{4\Delta} \sqrt{\frac{e + \kappa_1}{2\pi(1 + e\kappa_2)}} \left[ 2t_1\psi_1 + e(1 + \kappa_2)((\lambda + 2)\psi_2 - \psi_3) \right],$$

$$\psi_1 = (1 - e)(\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha) - [(1 - e)\lambda + (1 + \kappa_1)] \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_2 = 2\lambda \sin^2 \alpha \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + \cos(\lambda + 2)\alpha \sin 2\lambda\pi - \sin \lambda(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_3 = \sin \lambda\alpha [\lambda \cos 2\lambda\pi + 2 \cos(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)],$$

$$\Delta = (1 + \kappa_1)t_2 - 0,5e(1 + \kappa_2)t_3 - (1 - e)(\lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \cdot t_4 + \sin \lambda\alpha \cdot t_5),$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \lambda \sin \alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin \lambda\alpha \cos 2\lambda\pi,$$

$$t_3 = (\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = (\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_5 = (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\alpha.$$

У випадку комплексно спряжених коренів  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_r + i\lambda_m$ , щоб забезпечити дійсний характер напружень, введемо комплексний КІН [9]:

$$K = K_1 + iK_2 = 2(2\pi)^{-\lambda_r} S(-1 - \lambda_r - i\lambda_m) L^{i\lambda_m} / F(\lambda_r + i\lambda_m), \quad (8)$$

де  $L$  – деякий характерний розмір у досліджуваному тілі. Таким чином, сингулярна частина нормального напруження на межі поділу набуває вигляду

$$\sigma_\theta(r, 0) = |K| (2\pi r)^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln(r/L) + \psi), \quad (9)$$

де  $\psi = \arctg(K_2 / K_1)$  – фазовий кут навантаження.

Згідно з (9) на степеневу сингулярність напружень з показником  $\lambda_r$  накладається осцилююча особливість з «частотою» просторових осциляцій  $\lambda_m \ln(r/L)$ , що зростає за логарифмічним законом при наближенні до вершини. Наявність таких осциляцій зумовлює можливість фізично некоректного перекриття берегів тріщини, що робить незадовільним знайдений розв'язок при кутах зламу межі поділу, яким відповідають комплексні корені рівняння (5). Для їх усунення в теорії міжфазних тріщин на плоскій межі поділу припускається існування контакту берегів біля вершини [10,11]. Проте при переважанні у зовнішньому навантаженні відривних нормальних напружень розміри області контакту є досить малими порівняно з  $L$  і співрозмірними з найбільшою відстанню  $r_m < L$  від вершини, на якій відбувається перетин берегів. Знайдемо цю відстань у досліджуваному випадку тріщини на ламаній межі поділу, а за нею оцінимо характерні розміри контактної зони, що дозволить встановити обмеження на навантаження, за яких її розміри є малими і допустимо використання отриманого розв'язку.

Застосувавши зворотне перетворення Мелліна до трансформант  $\left( \frac{\partial u_\theta^k}{\partial r} \right)^*$  при  $\theta = -\alpha$  і  $\theta = 2\pi - \alpha$  та виконавши інтегрування по  $r$ , визначимо розкриття берегів тріщини:

$$u_\theta(r, 2\pi - \alpha) - u_\theta(r, -\alpha) = \frac{1 + \nu_1}{4E_1} \sum_i \frac{U_\sigma(p)\sigma^*(p) + U_\tau(p)\tau^*(p)}{-pD'(p)} r^{-p} \Big|_{p=-1-\lambda_i}, \quad (10)$$



$$U_{\sigma}(p) = (1 + \kappa_1) \left[ a_{1\sigma}^1(p) \cos(2p\pi - p\alpha - \alpha) - a_{3\sigma}^1(p) \sin(2p\pi - p\alpha - \alpha) \right] - e(1 + \kappa_2) \left[ a_{1\sigma}^2(p) \cos(p+1)\alpha + a_{3\sigma}^2(p) \sin(p+1)\alpha \right],$$

$$U_{\tau}(p) = 4(1 - e)D(p) + (1 + \kappa_1) \left[ a_{1\tau}^1(p) \cos(2p\pi - p\alpha - \alpha) - a_{3\tau}^1(p) \sin(2p\pi - p\alpha - \alpha) \right] - e(1 + \kappa_2) \left[ a_{1\tau}^2(p) \cos(p+1)\alpha + a_{3\tau}^2(p) \sin(p+1)\alpha \right].$$

Оскільки ми приймаємо, що розміри контактної зони набагато менше характерного розміру тіла  $L$ , обмежимося у (10) лише першими двома доданками з  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  та, прирівнявши їх суму до нуля, знаходимо для розшукуваної відстані максимальне значення

$$r_m = L \exp\left(\frac{\pi - 2\varphi}{2\lambda_m}\right), \quad \varphi = \arg\left[\frac{U_{\sigma}(p)\sigma^*(p) + U_{\tau}(p)\tau^*(p)}{pD'(p)} L^{-p}\right]_{p=-1-\lambda_r-i\lambda_m}.$$

Звідси випливає, що нехтування контактною зоною ( $r_m \ll L$ ), яке дає підстави вважати отриманий вище розв'язок прийнятним для комплексних коренів рівняння (5) при  $r_m \ll r \ll L$ , можливе при забезпеченні прикладеним навантаженням умови  $(\pi - 2\varphi)/2\lambda_m \leq -1$ .

**Частинні випадки навантаження.** Застосуємо отримані результати до деяких окремих випадків розподілу навантаження на берегах тріщини.

А. Нехай на берегах тріщини на відрізьку  $b \leq r \leq a$  діє стале розтягувальне нормальне напруження  $\sigma_{\theta}(r) = -\sigma_0 < 0$ , а на відрізьку  $d \leq r \leq c$  – стале дотичне напруження  $\tau_{r\theta}(r) = \tau_0$ . Відповідні трансформанти Мелліна дорівнюють

$$\sigma^*(p) = \frac{-\sigma_0}{p+1} [b^{p+1} - a^{p+1}], \quad \tau^*(p) = \frac{\tau_0}{p+1} [d^{p+1} - c^{p+1}].$$

Їх підстановка в (7) і (8) дає такі вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вершини тріщини:

$$K_i = \frac{(2\pi)^{-\lambda_i}}{\lambda_i D'(-1-\lambda_i) F(\lambda_i)} \left\{ \sigma_0 \left[ a_{3\sigma}^1(-1-\lambda_i) + a_{4\sigma}^1(-1-\lambda_i) \right] \left[ b^{-\lambda_i} - a^{-\lambda_i} \right] - \tau_0 \left[ a_{3\tau}^1(-1-\lambda_i) + a_{4\tau}^1(-1-\lambda_i) \right] \left[ d^{-\lambda_i} - c^{-\lambda_i} \right] \right\} \quad (i=1, 2)$$

у випадку дійсних коренів  $\lambda_1, \lambda_2$  рівняння (5) і

$$K_1 + iK_2 = \frac{2(2\pi)^{-\lambda_r} L^{i\lambda_m}}{\lambda D'(-1-\lambda) F(\lambda)} \left\{ \sigma_0 \left[ a_{3\sigma}^1(-1-\lambda) + a_{4\sigma}^1(-1-\lambda) \right] \left[ b^{-\lambda} - a^{-\lambda} \right] - \tau_0 \left[ a_{3\tau}^1(-1-\lambda) + a_{4\tau}^1(-1-\lambda) \right] \left[ d^{-\lambda} - c^{-\lambda} \right] \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_r+i\lambda_m}$$

у випадку комплексно спряжених коренів  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_r + i\lambda_m$ .

Б. Визначимо коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині тріщини при дії на її береги на відстанях  $a$  і  $c$  зосереджених сил інтенсивності  $P$  і  $Q$  відповідно. Для

цього у попередніх виразах здійснимо граничні переходи  $b \rightarrow a$  і  $d \rightarrow c$ , вимагаючи сталих значень зусиль  $P = \sigma_0(b - a)$  і  $Q = \tau_0(d - c)$ . В результаті отримаємо

$$K_i = \frac{-(2\pi)^{-\lambda_i}}{D'(-1 - \lambda_i)F(\lambda_i)} \left\{ Pa^{-\lambda_i-1} \left[ a_{3\sigma}^1(-1 - \lambda_i) + a_{4\sigma}^1(-1 - \lambda_i) \right] - \right. \\ \left. - Tc^{-\lambda_i-1} \left[ a_{3\tau}^1(-1 - \lambda_i) + a_{4\tau}^1(-1 - \lambda_i) \right] \right\} \quad (i = 1, 2)$$

у випадку дійсних коренів рівняння (5) і

$$K_1 + iK_2 = \frac{-2(2\pi)^{-\lambda_r}}{D'(-1 - \lambda)F(\lambda)} \left\{ Pa^{-1-\lambda} \left( \frac{a}{L} \right)^{-i\lambda_m} \left[ a_{3\sigma}^1(-1 - \lambda) + a_{4\sigma}^1(-1 - \lambda) \right] - \right. \\ \left. - Qc^{-1-\lambda_r} \left( \frac{c}{L} \right)^{-i\lambda_m} \left[ a_{3\tau}^1(-1 - \lambda) + a_{4\tau}^1(-1 - \lambda) \right] \right\} \Big|_{\lambda = \lambda_r + i\lambda_m}$$

у випадку комплексно спряжених коренів. При  $\alpha = \pi$ ,  $c = a$ , покладаючи характерний розмір  $L = a$ , приходимо до відомого результату [8]

$$K_1 + iK_2 = \left( \frac{2}{\pi a} \right)^{1/2} (P + iQ) a^{-i\omega}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e + \kappa_1}{1 + e\kappa_2}.$$

**Висновки.** В умовах плоскої деформації за допомогою інтегрального перетворення Мелліна знайдено розв'язок задачі про напружено-деформований стан кусково-однорідного тіла біля вершини півнескінченної міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних пружних ізотропних середовищ, при навантаженні берегів тріщини довільним розподіленим напруженням. Вершина тріщини виявляється концентратором напружень зі степеневою особливістю, відмінною від кореневої, на яку в деякому інтервалі кутів зламу, залежному від пружних параметрів з'єднаних матеріалів, накладаються просторові осциляції. На основі виразу для розкриття тріщини здійснено оцінювання розмірів області контакту берегів та сформульовано умову коректності знайденого розв'язку задачі.

Виведено формули розвинень напружень біля вершини тріщини та вирази для коефіцієнтів інтенсивності, які застосовано у випадках дії на берегах тріщини розподілених сталих напружень або зосереджених сил. Отримані результати можуть бути використані при оцінюванні тріщиностійкості кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною, зокрема при розрахунках зон передруйнування в околі її вершини [7,12].

**Conclusions.** Under the plane strain by Mellin's integral transformation, we found the solution of the problem about the stress-strain state of piece-homogeneous body at the crack tip threshold of the semi-infinity interfacial crack initiated from the angular point of the broken interface of two different elastic isotropic media at loading of the crack lips by the arbitrary stress. The crack tip was found to be the concentrator of stress with the power peculiarity, which is different from a root peculiarity. The spatial oscillations on this peculiarity are imposed in some interval of interfacial angles that depend on the elastic parameters of the joined materials. On the basis of the expression for the crack opening the estimation of the lips contact zone sizes is carried out and the condition of correctness of the found solution of the problem is formulated.

The formulas of the stress expansions at the crack tip threshold and expressions for the

coefficients of intensity are deduced. These formulas were applied in the cases of action of the constant stress on the part of the crack lips or the concentrated forces. The obtained results can be used for the estimation of the fracture toughness of piece-homogeneous body with an interfacial crack, for the calculations of the pre-fracture zone at the crack tip threshold in particular [7,12].

#### **Список використаної літератури**

1. Theocaris, P.S. Stress singularities in cracked composite full-planes [Text] / P.S. Theocaris, E.E. Gdoutos // *Int. J. Fract.* – 1977. – V.13, №6. – P.763–773.
2. Linkov, A.M. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution [Text] / A.M. Linkov, V.F. Koshelev // *Int. J. Solids and Structures.* – 2006. – Vol. 43. – P.5909–5930.
3. Carpinteri, A. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems [Text] / A. Carpinteri, M. Paggi // *Eng. Fract. Mech.* – 2007. – Vol. 74. – P.59–74.
4. Денисюк, І.Т. Моделі та методи розрахунку напруженого стану структурно-неоднорідних конструкційних елементів з негладкими межами поділу матеріалів : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.02.04 [Текст] / І.Т. Денисюк. – Луцьк, 2005. – 42 с.
5. Махоркін, М.І. Двовимірні задачі теорії пружності для клинових систем із тонкими, радіально розташованими дефектами: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 [Текст] / М.І. Махоркін. – Л., 2007. – 20 с.
6. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст] / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
7. Дудик, М.В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ [Текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – Т.54, №2. – С.103–114.
8. Райс. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред [Текст] / Райс (J.R. Rice), Си (G.C. Sih) // *Тр. Америк. общества инженеров-механиков. Прикл. механика.* – 1965. – Т.32, №2. – С.186–192.
9. Rice, J.R. Elastic Fracture Mechanics Concept for Interfacial Cracks [Text] / J.R. Rice // *Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics.* – 1988. – V.55, №3. – P.98–103.
10. Comninou, M. The Interface Crack [Text] / M. Comninou // *Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics.* – 1977. – V.44, №12. – P.631–636.
11. Дундурс, Дж. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины [Текст] / Дж. Дундурс, М. Комниноу // *Механика композитных материалов.* – 1979. – №3. – С.387–396.
12. Дудик, М.В. Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ [Текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – Т.47, №5. – С.53–59.

*Отримано 31.03.2014*