

УДК 519.6;

**М. Петрик¹, докт. фіз.-мат. наук; Д. Михалик¹, канд. техн. наук;
О. Петрик¹; Н. Бабій², канд. техн. наук**

¹Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

²Кременецький обласний гуманітарно-педагогічний інститут
ім. Тараса Шевченка

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЙНОГО ПЕРЕНЕСЕННЯ ХРОМУ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ОКСИДНИХ НАНОПЛІВКАХ

Резюме. Побудовано математичну модель дифузійного переносу в багатокомпонентних оксидних наноплівках. За результатами експериментальних досліджень вмісту хрому в зразках, створених за технологією виробництва супертонкого волокна, отримано розподіли коефіцієнтів дифузії хрому. Змодельовано кінетику процесу дифузії у вигляді розподілів вмісту хрому в зразку для різних технологічних зрізів та часових тривалостей формування мультишару наноплівки.

Ключові слова: математичне моделювання, дифузійні процеси, коефіцієнт дифузії.

M. Petryk, D. Mykhalyk, O. Petryk, N. Babij

MODELING OF CHROME DIFFUSION TRANSFER PROCESSES IN MULTICOMPOSITE OXIDE NANOFILMS

Summary. This paper deals with a problem of mathematical modeling of diffusive transport in multilayer mediums. The aim is to analyze and to model the diffusion transfer of chromium (Cr) in the mineral fibers on the basis of the proposed mathematical model of multicomposite medium. Multicomposite medium with established uniform layers n and $n + 1$ -th layer, whose thickness is much greater than the previous ones is analysed. The proposed mathematical model is based on the account of component interdiffusion between adjacent layers of n -layer medium. To find a solution of the problem Fourier integral transformations were consistently applied. For numerical simulation results of experimental studies on chromium distribution in feeders operated for 20 and 30 days in the production of super-thin basalt fibers (STBF) were used. Having applied the approaches of optimal control theory of distributed systems for analysis of experimental distributions, the diffusion coefficients of chromium (Cr) in a medium layers were obtained. Examples of numerical modeling of the distribution of chromium in production of STBF are provided. These concentration distributions are constructed for different time points of forming process of multicomposite nanofilms. For ease of analysis of diffusion transfer kinetics, distributions are given for the five time points, that correspond to conditionally stages of protective layer formation from the beginning ($0.25T$) to the end ($1T$). While analyzing the results it is worth stressing the almost complete coincidence of model chromium distribution curve with corresponding experimental distributions. The maximum deviation between these two concentrations for the period of multicomposite completion are less than 3%, which testifies the reliability of the proposed model. These spatially distributed chromium concentration distributions for various technological sections of oxide nanofilms and time durations of multicomposite nanofilms formation process allow to analyse of the kinetics of multilayer formation, that can be applied for the process operations improvement and new nanomaterials properties study.

Key words: mathematical modeling, diffusion processes, diffusion coefficients.

Постановка проблеми. Перспективним напрямом розвитку в галузі ресурсозбереження є підвищення технологічних характеристик матеріалів за рахунок застосування наноплівок та нанопокриттів. При цьому постає проблема аналізу та прогнозування дифузійних процесів перенесення в таких багат шарових покриттях.

На сьогодні широко застосовуються багат шарові оксиди, до складу яких входять такі компоненти, як Cr, Al, Si та інші. Проте особливу цікавість викликають системи залізо-хром, які використовують як конструкційний матеріал в атомній енергетиці, при виробництві мінеральних волокон.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі вивчення дифузії в багатошарових плівках вимагають розроблення нових методів моделювання і математичних моделей для опису явищ, що враховують наявність переходів (інтерфейсів) між суміжними шарами [1, 2]. Ефективними методами, які найповніше враховують проаналізовані вище особливості, є методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля, Конторовича – Лебедева, з використанням яких отримані розв'язки різних типів крайових задач математичної фізики однорідних структур, у тому числі задачі дифузії для різних середовищ та можливість їх математичного моделювання [3, 4, 5, 6].

Мета роботи. На основі запропонованої математичної моделі багатокомпонентного середовища провести аналіз та моделювання кінетики процесів дифузійного перенесення хрому (Cr) в мінеральних волокнах.

Постановка задачі. Для опису фізичної задачі й математичної моделі процесу дифузійного переносу в багатошарових плівках розглянуто багатошарове середовище, що складається з n шарів, схематичний вигляд якого наведено на рис.1. Аналізуючи наведену конструктивну схему, варто відзначити, що розглядається область багатокомпонентного середовища зі встановленими n рівномірними шарами та $n+1$ -им шаром, товщина якого набагато перевищує попередні. Згідно з такою схематизацією, для кожного j -го інтерфейсу $z = l_j, j = \overline{1, n}$ у сформованому багатокомпоненті відбувається взаємодифузія компонент між двома сусідніми шарами середовища.

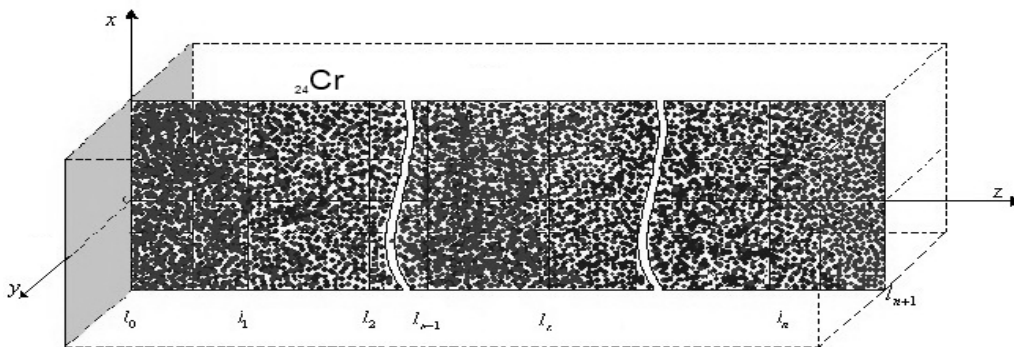


Рисунок 1. Конструктивна схема багатошарових наноплівкок

Figure 1. Constructive scheme of multicomposite nanofilms

У результаті математична модель для такої системи переносу описана у вигляді такої змішаної крайової задачі: побудувати обмежений в області $D_n^+ \{(t, z): t \in (0, T) \cap I_n^+\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь переносу параболічного типу для напівобмеженого n -складового неоднорідного середовища при нестационарності масообміну на межах масообміну $z = l_j, j = 0, n$.

$$\frac{\partial u_m(t, x, z)}{\partial t} = D_R \frac{\partial^2 u_m(t, x, z)}{\partial x^2} + D_h \frac{\partial^2 u_m(t, x, z)}{\partial z^2} + f_m(t, z), z \in (l_{m-1}, l_m), m = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

за початкових умов

$$u_m(t, x, z)|_{t=0} = g_m(x, z), z \in (l_{m-1}, l_m), l_{n+1} = \infty, m = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайових умов по змінній z

$$\left[\alpha_{j1}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^0 \right] u_1(t, x, z) \Big|_{z=l_0} = u_{l_0}(t, x),$$

$$\frac{\partial u_{n+1}(t, x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0,$$
(3)

інтерфейсних умов по змінній z

$$\left\{ \left[\alpha_{j1}^m \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^m \right] u_{m+1}(t, x, z) - \left[\alpha_{j2}^m \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^m \right] u_{m+1}(t, x, z) \right\} \Big|_{z=l_m} = 0, \quad j=\overline{1,2}; \quad m=\overline{1,n},$$
(4)

крайових умов по змінній x

$$\frac{\partial u_m(t, x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial u_m(t, x, z)}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0, \quad x \in (0, h), \quad m = \overline{1, n+1}.$$
(5)

До описаної задачі застосуємо послідовно інтегральні перетворення:

а) інтегральне перетворення \cos -Фур'є на сегменті $(0, h)$ по змінній x [7]:

- інтегральним оператором прямої дії

$$F_i [u_m(t, x, z)] = \int_0^h u_m(t, x, z) \cos\left(\frac{i\pi}{h} x\right) dx \equiv u_{mi}(t, z),$$
(6)

- інтегральним оператором зворотної дії

$$F_i^{-1} [u_{mi}(t, z)] = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i u_{mi}(t, z) \cos\left(\frac{i\pi}{h} x\right) \equiv u_m(t, x, z); \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 2, & i=1, 2, \dots \end{cases};$$
(7)

- основною тотожністю інтегрального перетворення Фур'є для диференціального оператора Лапласа

$$F_i \left[\frac{\partial^2 u_m(t, x, z)}{\partial x^2} \right] = - \left(\frac{i\pi}{h} \right)^2 u_{mi}(t, z);$$
(8)

б) по змінній z інтегральне перетворення Фур'є для n -складового напівобмеженого середовища має вигляд [7]:

- інтегральний оператор прямої дії

$$F_{+,n} [[u_m(t, z)]] = \int_{l_0}^{\infty} u(z) V(z, \beta) \sigma(z) dz = \sum_{m=1}^{n+1} \int_{l_{m-1}}^{l_m} u_m(z) V_m(z, \beta) \sigma_m dz \equiv \tilde{u}(t),$$
(9)

- інтегральний оператор зворотної дії

$$F_{+,n}^{-1} [\tilde{u}(t)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{u}(t) V(z, \beta) \Omega_n(\beta) dt \equiv u(t, z),$$
(10)

$$\text{компонентами якого є } F_{+,n}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_1(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_2(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \\ \dots \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_{n+1}(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \end{bmatrix},$$

- основна тотожність інтегрального перетворення

$$F_{+,n} \left[L_n \left[\left[u_m(t, z) \right] \right] \right] = -\beta^2 \tilde{u}(t) - \frac{D_1}{\alpha_{11}^0} \sigma_1 V_1(l_0, \beta) g_{l_0}. \tag{11}$$

Тут компоненти $V_j(z, \beta)$ спектральної вектор-функції $V(z, \beta)$ визначені як

$$\begin{aligned} V_m(z, \beta) &= \left(\prod_{i=m}^n c_{21,i} q_{i+1} \right) (\omega_{m-1,2}(\beta) \cos q_m z - \omega_{m-1,1}(\beta) \sin q_m z), m = \overline{1, n}; \\ V_{n+1}(z, \beta) &= \omega_{n2}(\beta) \cos q_{n+1} z - \omega_{n1}(\beta) \sin q_{n+1} z; \\ c_{21,i} &= \alpha_{22}^i \beta_{12}^i - \alpha_{12}^i \beta_{22}^i, q_m = \frac{\beta}{\sqrt{D_m}}, \\ \omega_{01}(\beta) &= v_{11}^{01}(q_1 l_0); \omega_{02}(\beta) = v_{11}^{02}(q_1 l_0); \\ \omega_{mi}(\beta) &= \omega_{m-1,2}(\beta) \psi_{1i}^m(q_m l_m, q_{m+1} l_m) - \omega_{m-1,1}(\beta) \psi_{2i}^m(q_m l_m, q_{m+1} l_m); \\ \psi_{ji}^m(q_m l_m, q_{m+1} l_m) &= v_{11}^{mj}(q_m l_m) v_{22}^{mi}(q_{m+1} l_m) - v_{21}^{mj}(q_m l_m) v_{12}^{mi}(q_{m+1} l_m); \\ v_{ij}^{m1}(q_s l_m) &\equiv \left(\alpha_{ij}^m \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^m \right) \cos q_s z \Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^m q_s \sin q_s l_m + \beta_{ij}^m \cos q_s l_m, \\ v_{ij}^{m2}(q_s l_m) &\equiv \left(\alpha_{ij}^m \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^m \right) \sin q_s z \Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^m q_s \cos q_s l_m + \beta_{ij}^m \sin q_s l_m; i, j = \overline{1, 2}, s \in \{m, m+1\} \\ q_m &= \frac{\beta}{\sqrt{D_m}}, m = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Спектральна густина [6]

$$\Omega_n(\beta) = \frac{\sqrt{D_{n+1}}}{\omega_{n,1}(\beta)^2 + \omega_{n,2}(\beta)^2}. \quad (12)$$

Компоненти вагової функції визначаємо за такими формулами:

$$\sigma_m = \frac{1}{D_m} \prod_{i=m}^n \frac{c_{1i}}{c_{2i}}, k = \overline{1, n-1}; \sigma_n = \frac{1}{D_n} \frac{c_{1,n}}{c_{2,n}}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{D_{n+1}}. \quad (13)$$

$$c_{im} = \alpha_{2i}^m \beta_{1i}^m - \alpha_{1i}^m \beta_{2i}^m.$$

Застосувавши до задачі (1–5) інтегральні оператори (6) і (9), одержуємо задачу Коші вигляду

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}_i(t, \beta) + \left(D_R \left(\frac{\pi i}{R} \right)^2 + \beta^2 \right) \tilde{u}_i(t) = \tilde{F}_i(t); \quad (14)$$

$$\tilde{u}_i(t)|_{t=0} = \tilde{g}_i,$$

розв'язком якої є функція [6, 7]

$$\tilde{u}_i(t, \beta) = e^{-\left(D_R \left(\frac{\pi i}{R} \right)^2 + \beta^2 \right) t} \tilde{g}_i + \int_0^t e^{-\left(D_R \left(\frac{\pi i}{R} \right)^2 + \beta^2 \right) (t-\tau)} \tilde{F}_i(\tau) d\tau, \quad (15)$$

де:

$$\tilde{F}_i(t) = \tilde{g}_i + \tilde{\Phi}_i(t) + \tilde{f}_i(t); \quad (16)$$

$$\tilde{g}_i = \sum_{m=1}^{n+1} \int_{l_{m-1}}^{l_m} g_{m_i}(z) V_m(z, \beta) \sigma_m dz; \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}_i(t) = -D_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^1} V_1(l_0, \beta) g_{l_{0i}}(t). \quad (18)$$

Повертаючись до оригіналів, з послідовним застосуванням інтегральних операторів зворотної дії, визначених формулами (7) та (10), отримаємо розв'язок задачі (1)-(5) у такому вигляді:

$$u_m(t, x, z) = \int_0^t \int_0^h W_{l_0, m}(t-\tau; x, \zeta; z, l_0) u_{l_0}(\tau, \zeta) d\zeta d\tau +$$

$$+ \int_0^h \sum_{m_1=0}^{n+1} \int_{l_{m_1-1}}^{l_{m_1}} \mathbb{H}_{h, m_1}(t; x, \zeta; z, \xi) g_{m_1}(\zeta, \xi) \sigma_{m_1} d\xi d\zeta +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h \sum_{m_1=0}^{n+1} \int_{l_{m_1-1}}^{l_{m_1}} \mathbb{H}_{h, m_1}(t-\tau; x, \zeta; z, \xi) f_{m_1}(\tau, \zeta, \xi) \sigma_{m_1} d\xi d\zeta d\tau, \quad m = \overline{1, n+1} \quad (19)$$

У наведеній формулі задіяні функції впливу, що описуються такими виразами:
 - функціями впливу, породженими крайовою умовою в точці $z = l_0$;

$$W_{l_0,m}(t, x, \zeta; z, l_0) = -D_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^1} \frac{2}{\pi h} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon_i e^{-\left(D_R \left(\frac{i\pi}{R}\right)^2 + \beta^2\right)t} V_1(l_0, \beta) V_m(z, \beta) \Omega_n(\beta) \cos\left(\frac{i\pi}{h} x\right) d\beta;$$

- функцією впливу початкових умов та неоднорідностей системи

$$H_{h,m_1}(t, x, \zeta; z, \xi) = \frac{2}{\pi h} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon_i e^{-\left(D_R \left(\frac{i\pi}{R}\right)^2 + \beta^2\right)t} V_m(z, \beta) V_{m_1}(\xi, \beta) \cos\left(\frac{\pi i}{R} \zeta\right) \cos\left(\frac{\pi i}{R} x\right) d\beta;$$

$$m, m_1 = 1, \overline{n+1}.$$

Математичне моделювання. На рис.2 наведені результати експериментальних досліджень розподілів хрому в живильнику при експлуатації протягом 20 діб при виробництві базальтового супертонкого волокна (БСТВ) (рис.2,а) та при експлуатації протягом 30 діб при виробництві базальтового волокна із застосування ВРВ (рис.2,б) у п'яти різних точках (1–5) матеріалу.

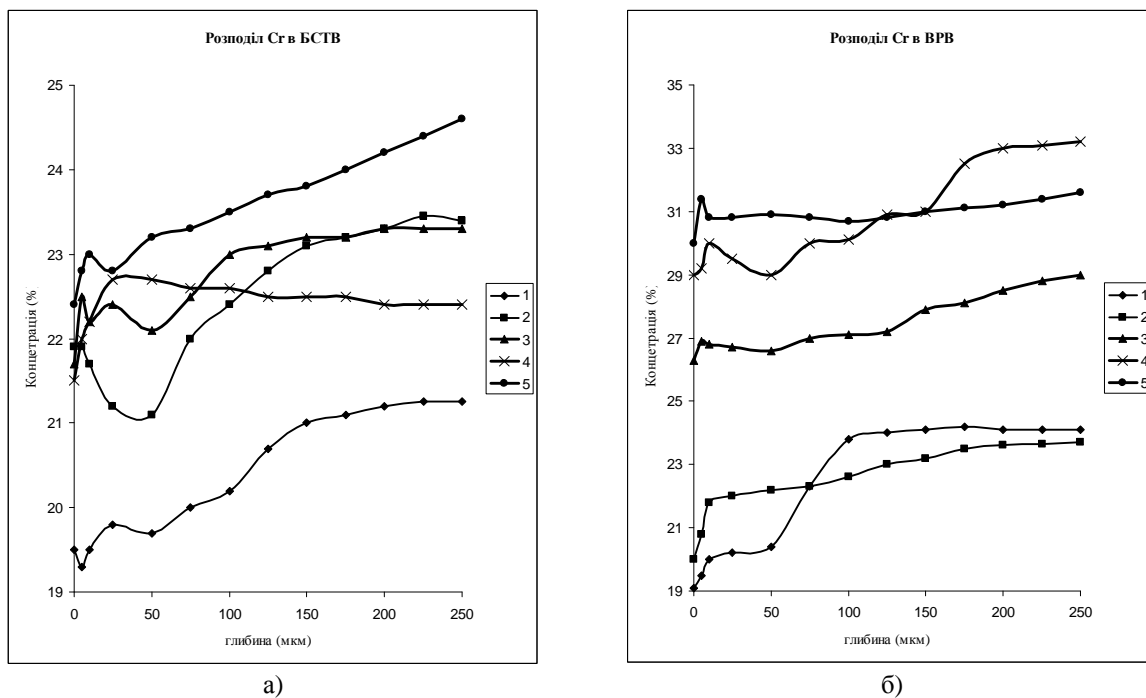


Рисунок 2. Розподіли хрому(Cr) в базальтовому супертонкому волокні а) БСТВ, б) ВРВ

Figure 2. Distributions of chromium (Cr) in superthin basalt fiber

Застосувавши до аналізу експериментальних розподілів підходи, викладені та апробовані в працях авторів [8, 9, 10], які базуються на теорії оптимального керування станом розподілених систем [11–12]. та запропоновану математичну модель процесу дифузійного масопереносу в багат шарових плівках, отримано розподіли коефіцієнтів дифузії хрому (Cr) у шарі середовища.

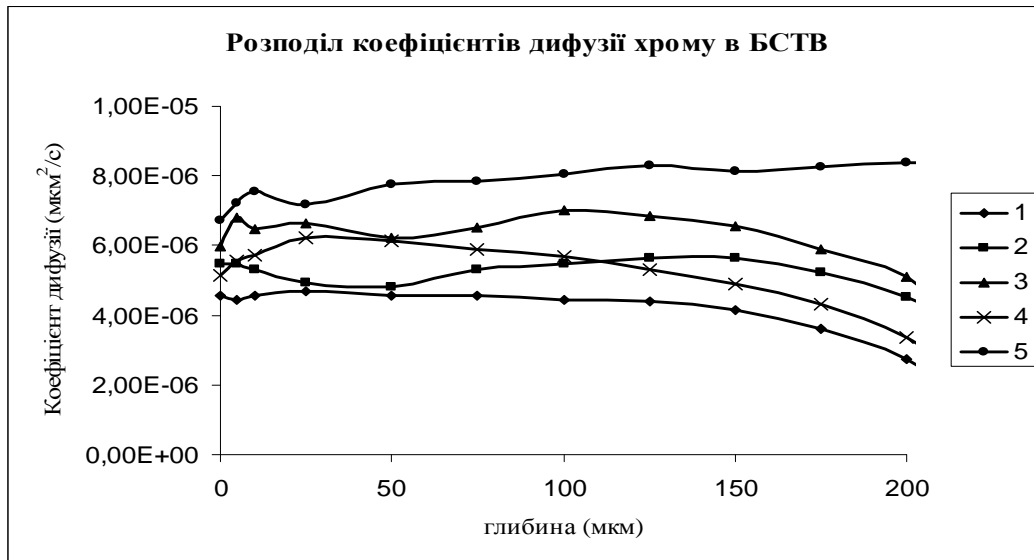


Рисунок 3. Розподіл коефіцієнтів дифузії хрому для БСТВ

Figure 3. Diffusion coefficients distribution

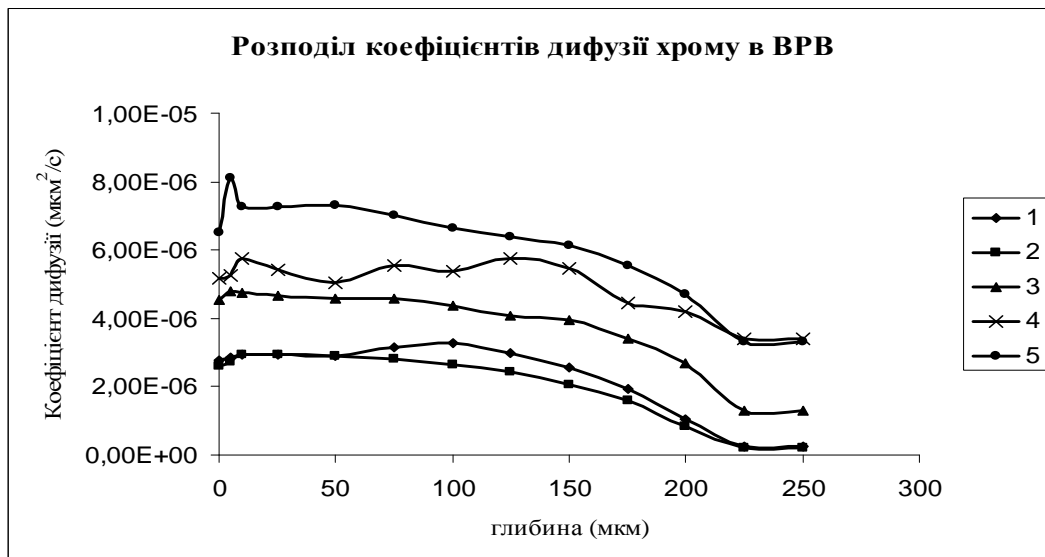


Рисунок 4. Розподіл коефіцієнтів дифузії хрому для ВРВ

Figure 4. Diffusion coefficients distribution

Розглянемо результати комп'ютерного моделювання концентраційних розподілів хрому в кожній з п'яти точок при виробництві ВРВ та БСТВ.

На рис.5 наведено результати числового моделювання розподілу хрому при виробництві БСТВ та використанні слідів експериментальних спостережень (exp), що відображають уміст хрому. Ці концентраційні розподіли побудовані для різних часових моментів формування технологічного мультишару наноплівки: приведений час, що дорівнює $(1T)$, відповідає експериментальному часу (20 діб). Для зручності аналізу кінетики процесу дифузійного переносу розподіли наведено для п'яти моментів часу, що умовно відповідають етапам формування захисного шару від початкового $(0,25T)$ до кінцевого $(1T)$.

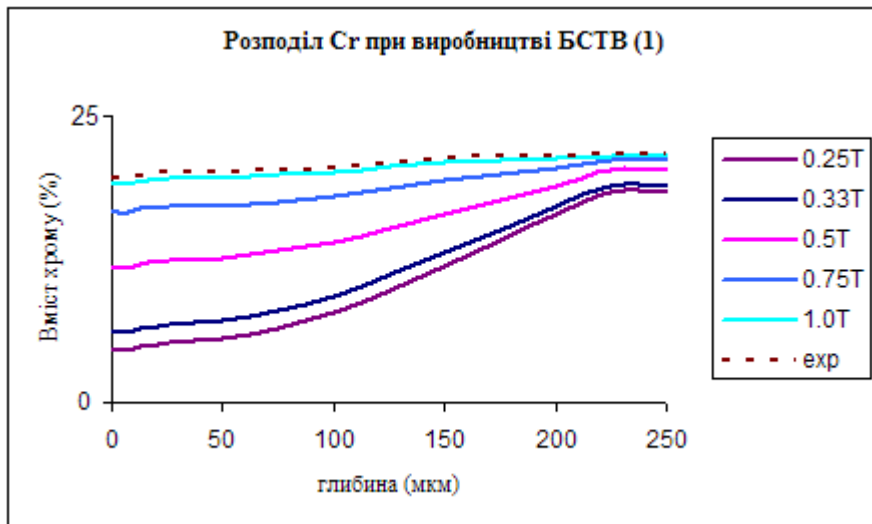


Рисунок 5. Модельний розподіл хрому (Cr) для БСТВ (точка 1)

Figure 5. Modelling distribution of chromium (Cr) (point 1)

Як бачимо, для першого часового відтинку (0.25T) уміст хрому лінійно зростає до глибини 100 мкм, після чого розподіл набуває більшої стрімкості й стабілізується в районі 220 мкм. Чітко видно, що з кожним наступним етапом формування захисного шару розподіл набуває рівномірнішого характеру. Величина градієнта для першого шару складає понад 14%, для другого – 12,5%, для третього – 7,5%, для четвертого – 2,5% та для п'ятого – 1,5%. Найбільший приріст вмісту хрому спостерігається при приведеному часі від 0,33T до 0,75T. Максимальне відхилення концентрації хрому для періоду завершення формування мультишару наноплівки (1T) від експериментального профілю (exp) не перевищує 2%.

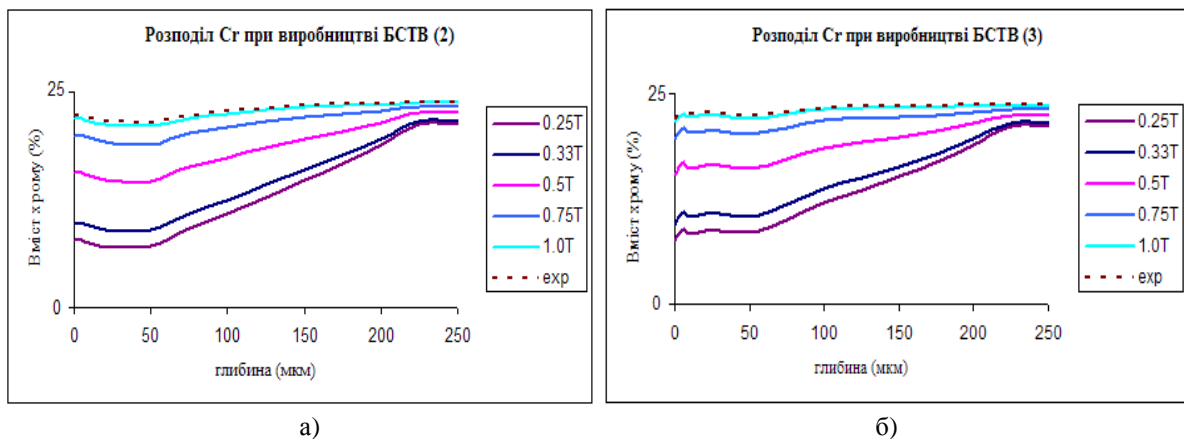


Рисунок 6. Модельний розподіл хрому (Cr) для БСТВ а) точка 2; б) точка 3

Figure 6. Modeling distribution of chromium (Cr) a) point 2; б) point 3

Кінетика процесу суттєво не відрізняється і для розподілів хрому, отриманих для інших чотирьох точок (2–4), представлених на рис.6 та рис.7. Ми можемо спостерігати деякі флуктуації на ділянках від 0 до 50 мкм, що може бути пов'язано з певною неорідністю досліджуваного зразка, та в цілому кінетика процесу залишається сталою.

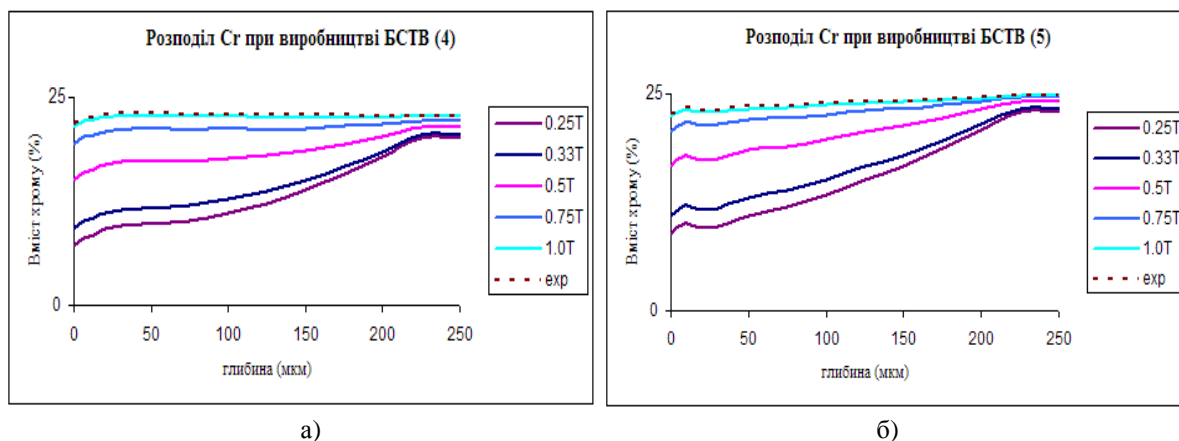


Рисунок 7. Модельний розподіл хрому (Cr) для БСТВ а) точка 4; б) точка 5

Figure 7. Modeling distribution of chromium (Cr) а) point 4; б) point 5

На рис.8–10 наведено результати числового моделювання розподілу хрому для ВРВ процесу. Аналогічно наведені модельні та експериментальний розподіли (exp) умісту хрому. Концентраційні розподіли побудовані для п'яти часових моментів формування мультишару наноплівки і приведений час (1T) відповідає експериментальному часу в 30 діб.

Як бачимо на рис.8, криву розподілу хрому можна поділити на три характерні сегменти: перший – від 0 до 50 мкм, характеризується рівномірністю розподілу, другий – від 50 до 200 мкм, характеризується лінійністю зростання вмісту хрому, та третій сегмент теж, як і перший, має рівномірний характер.

Величина градієнта для першого і другого шарів складає майже 16%, для третього – 12%, для четвертого – 8,2% та для п'ятого – 5,7%. Найбільший приріст вмісту хрому спостерігається при приведеному часі від 0,33T до 0,75T. Максимальне відхилення концентрації хрому для періоду завершення формування мультишару наноплівки (1T) від експериментального профілю (exp) не перевищує 3%.

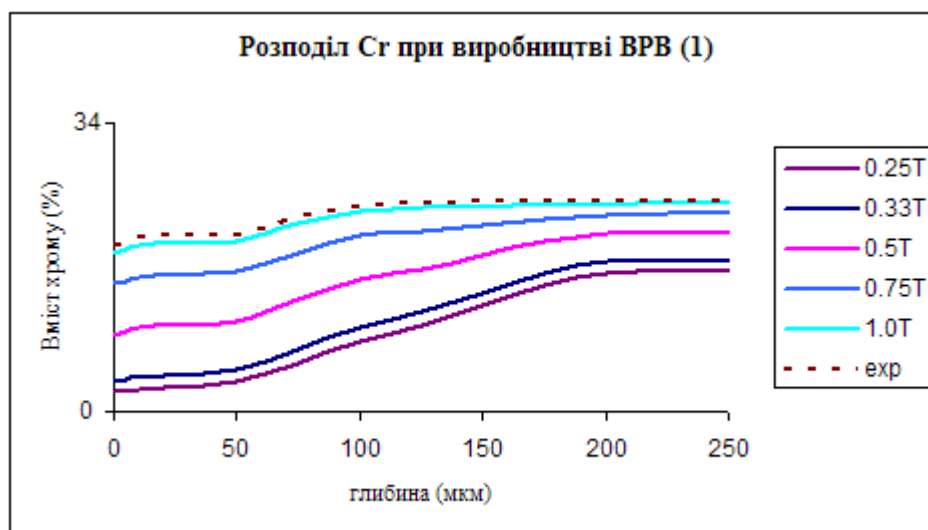


Рисунок 8. Модельний розподіл хрому (Cr) для ВРВ (точка 1)

Figure 8. Modelling distribution of chromium (Cr) (point 1)

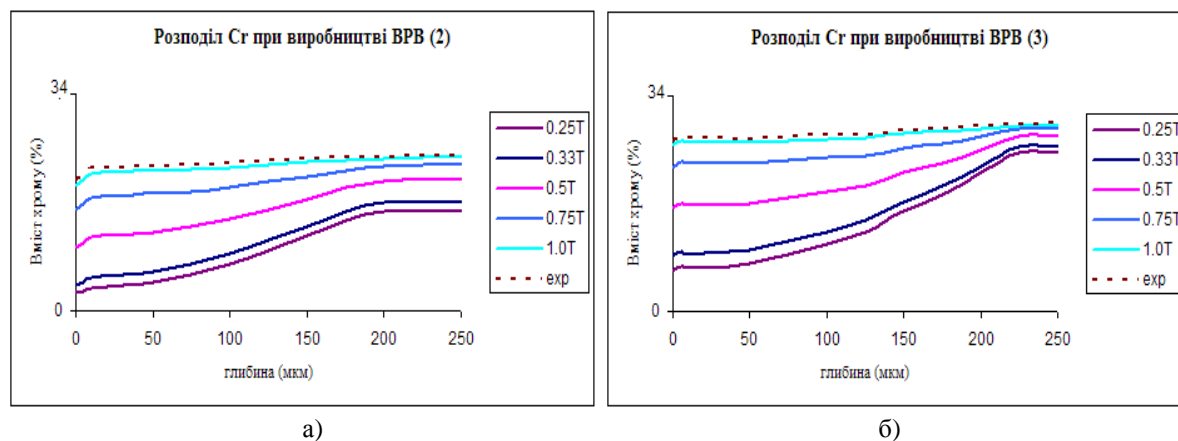


Рисунок 9. Модельний розподіл хрому (Cr) для ВРВ а) точка 2; б) точка 3

Figure 9. Modeling distribution of chromium (Cr) a) point 2; б) point 3

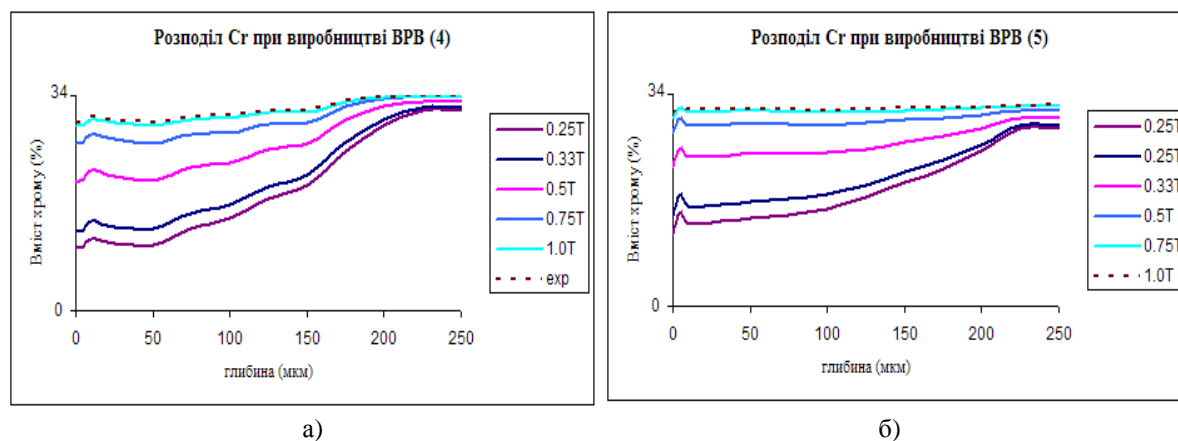


Рисунок 10. Модельний розподіл хрому (Cr) для ВРВ (точка 4) а) точка 4; б) точка 5

Figure 10. Modeling distribution of chromium (Cr) a) point 4; б) point 5

Проводячи аналіз отриманих результатів (рис.5–10), варто відзначити майже повне співпадання модельного розподілу 1.0Т хрому з кривою (exp), що відповідає експериментально отриманим розподілам. Максимальні розбіжності між концентраціями для періоду завершення формування мультишару наноплівки від експериментального профілю не перевищує 3%, що вказує на достовірність запропонованої моделі.

Висновки. На основі запропонованої моделі дифузійного переносу, що описує процес формування мультишарів тонких оксидних наноплівок, та за результатами експериментальних досліджень розподілів хрому при виробництві ВРВ та БСТВ проведено математичне моделювання кінетики процесу дифузії при формуванні наноплівок. Отримані просторово-розподілені концентраційні розподіли елемента хрому для різних технологічних зрізів оксидної наноплівки та часових тривалостей формування технологічного мультишару наноплівки дозволяють провести аналіз кінетики формування мультишару, що може бути застосовано для підвищення ефективності технологічних операцій та дослідження властивостей нових наноматеріалів.

Conclusions. Mathematical modeling of diffusion kinetics during the formation of nanofilms with use of model of diffusive transport, which describes the process of forming a thin multycomposite oxide nanofilms and experimental results for distributions of chromium

in the production of superthin fibers are conducted. Distributions of chromium concentration for various technological sections in oxide nanofilms and various time durations of multicomposite formation process are obtained. These distribution allow as to analyse the multicomposite formation kinetics. Results can be applied for the process operations improvement and new nanomaterials properties study.

Список використаної літератури

1. Mehrer, H. Diffusion in Solids [Текст] / Mehrer H. // Springer, 2007. – P. 650.
2. Kärger, J. Diffusion fundamentals [Текст] / Kärger J., Grinberg F., Heitjans P. – Leipziger Unviersite. – 2005. – 615p.
3. Дифузійні процеси в оксидних шарах залізохромових сплавів [Текст] / О. Шаблій, М. Петрик, П. Василюк, І. Катеринюк // Вісник ТДТУ. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 5 – 11.
4. Petryk, M. Mathematical modeling and research for diffusion processes in multilayer and nanoporous media, Fluid Transport in Nanoporous Materials [Текст] / М. Petryk, О. Shabliy, М. Leniuk, Р. Vasyluk // Springer Publishers. – 2006. – Volume 219. – P. 639 – 655.
5. Математичне моделювання дифузійного перенесення в багат шарових наноплівках оксидної структури (дослідження зразка за технологією виробництва базальтового супертонкого волокна) [Текст] / В.Дейнека, М.Петрик, П.Василюк, Н.Бабій // Вісник ТНТУ. – 2013. – Т.70. – № 2. – С.219–231.
6. Ленюк, М.П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах [Текст] / М.П. Ленюк, М.Р. Петрик. – К.: Наукова думка, 2000. – 372 с.
7. Комаров, Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку [Текст] / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
8. Дейнека, В.С. Идентификация параметров неоднородных задач диффузии в наномультиматериалах с использованием градиентных методов [Текст] / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик // Компьютерная математика. – 2012. – № 1. – С. 41 – 51.
9. Дейнека, В.С. Идентификация кинетических параметров массопереноса в многокомпонентных системах конкурентной диффузии в неоднородных нанопористых средах [Текст] / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – №5. – С. 46 – 64.
10. Дейнека, В.С. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах [Текст] / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С. 12 –25.
11. Дейнека, В.С. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами [Текст] / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наук. думка, 2003. – 506 с.
12. Сергиенко, И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – Киев: Наукова думка, 2009. – 638 с.

Отримано 03.04.2014