

Ясній П. Дослідження КІН двох взаємодіючих поверхневих півеліптичних тріщин методом скінчених елементів / П. Ясній, І. Підгурський // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 74. — № 2. — С. 15-25. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 670.191.33

**П. Ясній, докт. техн. наук; І. Підгурський**

*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ КІН ДВОХ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ПОВЕРХНЕВИХ ПІВЕЛІПТИЧНИХ ТРІЩИН МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Резюме.** Проаналізовано існуючі методи визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для поверхневих непівеліптичних тріщин уздовж їх контуру та літературні дані щодо взаємного впливу кількох тріщин на зміну величини КІН. Для уточнення КІН уздовж фронту однієї та двох взаємодіючих поверхневих напівеліптичних тріщин здійснено їх моделювання за допомогою методу скінчених елементів. Наведено результати досліджень коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту поверхневої тріщини за одновісного розтягу пластини скінчених розмірів на основі методу скінчених елементів, які добре узгоджуються з відомими рішеннями. Здійснено моделювання взаємного впливу двох колінеарних тріщин на розподіл КІН уздовж фронту поверхневих тріщин.

**Ключові слова:** поверхнева півеліптична тріщина, колінеарні тріщини, метод скінчених елементів, коефіцієнт інтенсивності напружень.

**P. Yasniy, I. Pidgurskyi**

## **RESEARCH OF SIF OF TWO INTERACTING SEMI-ELLIPTICAL SURFACE CRACKS USING FINITE ELEMENT METHOD**

**Summary.** The authors present the results of the study of stress intensity factors along the front of surface crack and two collinear cracks under uniaxial tension of finite size plate basing on the finite element method. Surface cracks are a common phenomenon in structural elements of construction frequently as a result of high values of the stress in the body and availability of defects. Such defects can sufficiently reduce the service life of structural components causing their premature failure, especially under repeated loading. Definition of the stress intensity factors is one of the most important tasks for the residual life of structures estimation. In any linear elastic fracture mechanics (LEFM) problem, precise computation of stress intensity factors accurately is of great importance. The analysis of available methods for determining stress intensity factors for surface semi-elliptical cracks along their contour has been carried out and data on the mutual influence of several cracks on the change of SIF. In order to specify SIF along the front of one or two interacting semi-elliptical surface cracks, the problem of their evaluation using the finite element method was studied. First of all, the modeling of semi-elliptical surface crack in the prismatic sample under tensile pressure was carried out. A three-dimensional model of the sample with the global model elements and the model of crack area with a local mesh with tetrahedral elements were developed. Investigations were carried out for the surface semielliptical cracks with ratio  $a/t$  for the deepest crack point to the specimen thickness ( $a/t$ ) in the range  $a/t=0,1...0,7$  and different crack aspect ratios  $a/c = 0,2; 0,6; 1,0$ . For the chosen parameters the values of SIF  $K_I$  along the path of the semi-elliptical surface crack, well correlated with the known solutions, were obtained. The energy instability was found to be in the surface crack threshold of the contour areas when its semi-axes ratio amounts  $a/c=0,4...0,8$ . The authors modeled the mutual influence of two collinear cracks on the distribution of SIF along the surface cracks front basing on the similar research methods. The modeling of both commensurate cracks and those that are significantly different in size is also carried out. The mutual influence of cracks was found to start when the distances between the cracks are commensurate with the size of surface cracks. When the distance between the cracks is close to merger, the SIF  $K_I$  values for inside surface points of the crack contour significantly increase. The results obtained are of importance for the geometric schematization of defects and further estimation of the residual operating life of the construction parts.

**Key words:** surface semi-elliptical crack, collinear cracks, finite element method, stress intensity factor.

**Постановка проблеми.** Створення нових машин і конструкцій з високими експлуатаційними характеристиками і питомими потужностями, а також необхідність зниження їх матеріаломісткості при одночасному підвищенні міцності й довговічності є актуальним і складним завданням. Під час експлуатації в елементах конструкцій можуть ініціюватися поверхневі тріщини, які при подальшому циклічному навантаженні розвиваються до критичних розмірів.

Критеріальне оцінювання живучості (залишкового ресурсу) конструкцій з тріщинами пов'язана, як правило, з визначенням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН), який характеризує напружено-деформівний стан (НДС) у вершині тріщини. Розрахунок КІН у реальних конструкціях є складною задачею, зважаючи на геометрію і граничні умови, особливо для тривимірних тіл.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для визначення КІН у вершинах наскрізних тріщин в лінійно-пружних тілах простої геометричної форми зазвичай застосовують основні аналітичні методи: комплексних потенціалів Колосова-Мухомелішвілі, інтегральних перетворень, розкладання за власними функціями та ін. [1, 2]. Для реальних деталей оцінку КІН для тріщин, як правило, нескрізних, можна дати лише з деякою похибкою, використовуючи техніку комбінування і суперпозиції типових рішень, застосовуючи математичні моделі на базі скінчених або граничних елементів [3, 5], а також експериментальні методи [6].

Аналіз публікацій [1–6] показує, що до сьогодні не отримано аналітичних значень КІН уздовж контуру еліптичної чи півеліптичної тріщини.

Для оцінювання КІН таких тріщин застосовують чисельні методи, насамперед метод скінчених елементів (МСЕ) [7, 8], що є найуніверсальнішим завдяки простій інтерпретації й розробленому математичному забезпеченню. При цьому застосовуються прямі методи [9, 10], у яких для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень використовують напруження, отримані з допомогою МСЕ (прямий метод напружень) або переміщення (прямий метод переміщень) [11]. Для обчислення КІН вказаними методами необхідна дуже дрібна сітка скінчених елементів, що вимагає великої оперативної пам'яті та часу розрахунку [12]. У зв'язку з цим найбільш вживаним є метод із застосуванням спеціальних (сингулярних) елементів, інтерполюючі функції яких побудовані з урахуванням асимптотичних рішень у вершині тріщини [7, 8].

Іншим великим класом методів оцінювання КІН є енергетичні методи: повної енергії (метод піддатливості) [7, 8] та J-інтеграла [13].

Для отримання високої точності оцінювання КІН для поверхневих тріщин, контур яких описується математично, застосовують метод альтернування [14], що відноситься до методів суперпозиції аналітичного й скінчено-елементного рішень.

За останній час для розрахунку КІН у дво- і тривимірних тілах з наскрізними еліптичними і напівеліптичними тріщинами застосовують метод вагових функцій [15], заснований на роботах Х. Ф. Бюкнера і Дж. Райса.

Крім методу скінчених елементів, для розв'язку задач механіки руйнувань застосовують метод граничних елементів. За даним методом поверхня тривимірного тіла, включаючи поверхню тріщини, моделюються двовимірними елементами, всередині яких інтерполюються переміщення й зусилля [16].

Інший чисельний метод, за допомогою якого здійснюють оцінювання КІН для поверхневих тріщин, базується на методі Гауса-Чебишева [17].

Чисельні методи дозволяють визначати КІН для поверхневих тріщин, що виникають у практичних інженерних задачах, з точністю  $\pm 5\%$ . Отримання точніших результатів ускладнюється трудністю врахування зміни виду напружено-деформованого стану по контуру тріщини (при переході від більш глибоких точок тріщини до поверхневих), який залежить від стисненості деформації вздовж фронту тріщини [4, 8].

Для швидкого, проте недостатньо точного аналізу поверхневих тріщин у пружних і пружнопластичних тілах, застосовують наближені методи, засновані на моделях у вигляді лінійних пружин [8], граничної інтерполяції [17] та ін.

Аналіз літературних джерел вказує на значну кількість даних із КІН для характерних точок фронту поверхневої тріщини (на поверхні та у найглибшій точці контуру), проте недостатньо висвітленими є питання розподілу КІН по криволінійному

контур тріщини [18]. Уточнення КІН по контуру поверхневої тріщини дозволить прогнозувати форму тріщини при циклічному навантаженні, оскільки швидкість росту окремих точок контуру тріщини залежить від КІН.

Задача з визначення КІН значно ускладнюється при розгляді кількох поверхневих тріщин, що знаходяться близько одна від одної і зазнають взаємного впливу. Дослідження з цієї проблематики опубліковано у [2, 8, 17–20]. Результати стосуються, в основному, кругових поверхневих тріщин, рідше – півеліптичних. Аналіз результатів досліджень вказує на збільшення значень КІН для внутрішніх півконтурів поверхневих колінеарних тріщин, що знаходяться на близькій відстані й взаємодіють одна з одною.

Вказані дослідження мають значну практичну цінність при схематизації геометричних дефектів, що необхідна при розрахунку міцності й довговічності конструкцій, оскільки в [8, 21, 22] відображено достатньо консервативну апроксимацію двох тріщин, що замінюються однією довшою.

У зв'язку з цим метою роботи є моделювання методом скінчених елементів взаємовпливу двох колінеарних поверхневих півеліптичних тріщин за одновісного розтягу пластин скінчених розмірів.

**Результати досліджень та їх обговорення.** Коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$  у будь-якій точці фронту поверхневої півеліптичної тріщини (рис.1) представляють у вигляді [2]

$$K_I = \frac{\sigma_n \sqrt{\pi a}}{E(k)} \cdot F_s \left( \frac{a}{c}; \frac{a}{t}; \frac{c}{b}; \varphi \right), \quad (1)$$

де  $\sigma_n$  – номінальні напруження, МПа;  $F_s \left( \frac{a}{c}; \frac{a}{t}; \frac{c}{b}; \varphi \right)$  – поправкова функція, що враховує вплив вільних поверхонь;  $E(k)$  – повний еліптичний інтеграл другого роду.

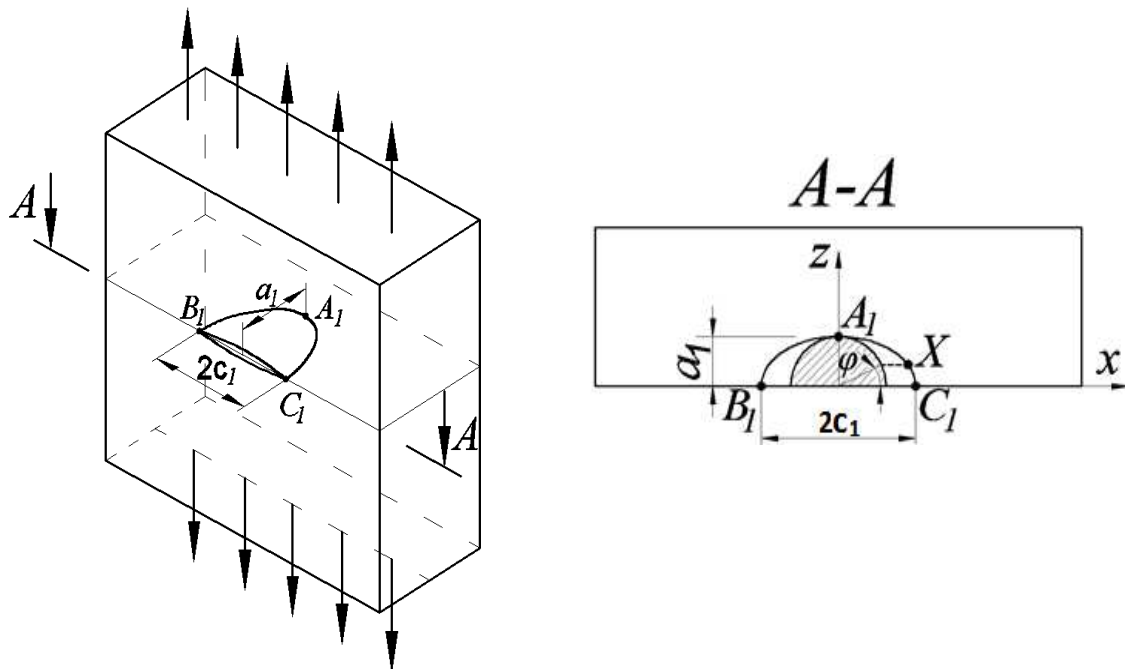


Рисунок 1. Поверхнева півеліптична тріщина у пластині скінчених розмірів

Figure 1. Semi-elliptical surface crack in a finite size plate

Розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту тріщини отримано методом скінчених елементів. Застосовували спеціалізований програмний пакет «ANSYS» [23]. Моделювали поверхневу півеліптичну тріщину у пластині скінченних розмірів під дією розтягуючих напружень. Створено тривимірну модель зразка з глобальною сіткою елементів та модель області тріщини з локальною сіткою (рис.2). Елементи сітки тетраедричні. Загальна кількість елементів – 375000. Розмір елементів глобальної сітки – 2,75 мм, локальної – 0,1 мм. Моделювали зразок товщиною  $t=20$  мм з низьколегованої сталі 09Г2С з  $\sigma_T=350$  МПа. Коефіцієнт Пуассона при пружному деформуванні становив  $\nu=0,3$ .

У результаті обчислень отримано значення КІН уздовж контуру поверхневої тріщини  $\varphi=0\dots2\pi$ , які визначили у 33 точках. На рис.3 представлено результати розрахунку КІН для трьох випадків:  $a/c=0,2$ ;  $a/c=0,6$  та  $a/c=1,0$  при фіксованому розмірі поверхневої напівеліптичної тріщини  $2c=15$  мм.

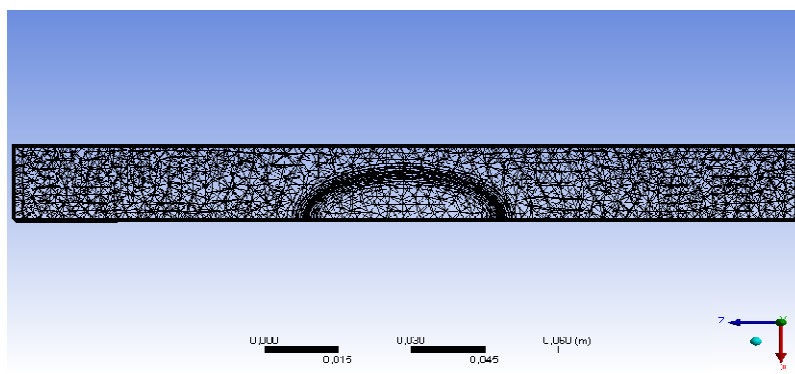


Рисунок 2. Скінчено-елементна модель поверхневої півеліптичної тріщини

Figure 2. Finite element model of semi-elliptical surface crack

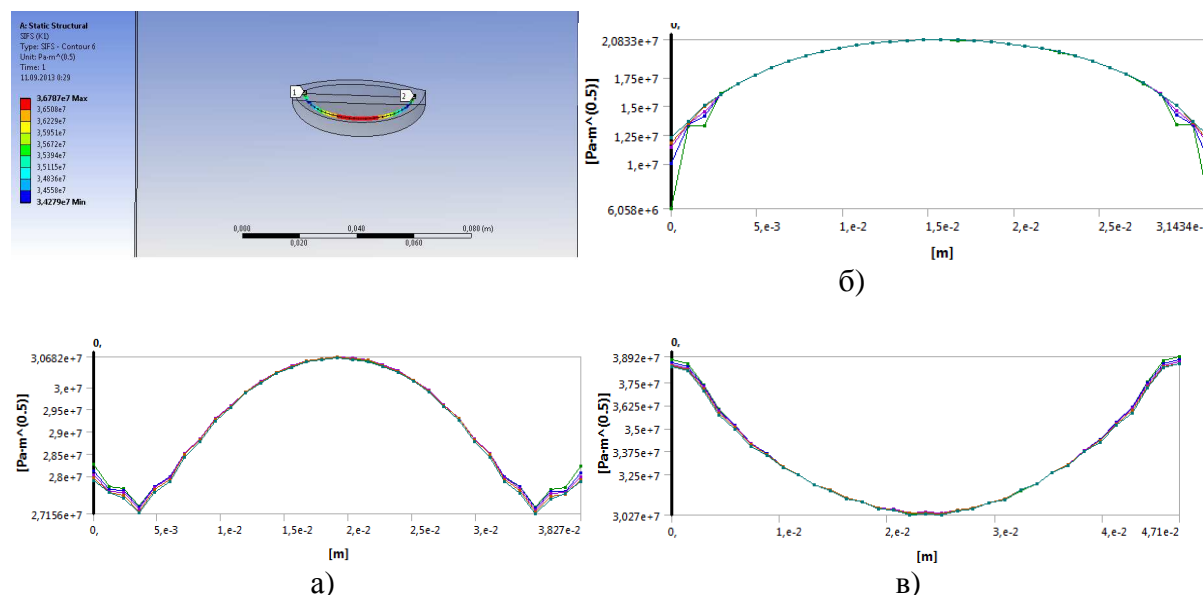


Рисунок 3. Розрахунок КІН вздовж фронту поверхневої півеліптичної тріщини: а)  $a/c=0,6$ ; б)  $a/c=0,2$ ; в)  $a/c=1,0$

Figure 3. Calculation of SIF along the front of semi-elliptical surface crack: а)  $a/c=0,6$ ; б)  $a/c=0,2$ ; в)  $a/c=1,0$

Порівняння отриманих результатів розрахунку КІН  $K_I$  уздовж фронту тріщини з даними, отриманими МСЕ у роботі [24], вказують на наступне. Якісний характер зміни

КІН, вздовж контуру тріщини в обох дослідженнях співпадає. Порівняння значення КІН  $K_I$  вказує на добру збіжність результатів – від -1,55% при  $2\varphi/\pi=0$  (точки  $B_1, C_1$  на поверхні зразка) до +1,73% (найглибша точка  $A$  фронту тріщини) (рис.3,а). Автори [20] відзначили, що похибка МСЕ для оцінювання КІН уздовж фронту тріщини складає 3%.

Аналіз значень КІН уздовж контуру поверхневих тріщин з різними характерними розмірами тріщин  $a/c=0,2$  та  $a/c=1,0$  свідчить про значну енергетичну нестабільність контуру тріщини. Про це свідчить співвідношення максимальних і мінімальних значень КІН по контуру тріщини:  $\frac{K_{1B}}{K_{1A,C}} = 1,67$  при  $a/c=0,2$  та  $\frac{K_{1A,C}}{K_{1B}} = 1,29$

при  $a/c=1$ . При таких співвідношеннях контур тріщини набуватиме енергетично стабільної форми: у першому випадку при  $a/c=0,2$  тріщина просуватиметься вглиб, а у другому випадку при  $a/c=1,0$  – тріщина спочатку розширюватиметься по поверхні до певної стабілізації контуру при  $a/c=0,6\dots 0,7$  [2]. При  $a/c=0,6$  –  $\frac{K_{1B}}{K_{1A,C}}=1,08$  (рис.3,а).

Аналізуючи результати досліджень (рис.3,а) відзначимо, що ( $a/c=0,6$ ), що для вказаних відносних параметрів тріщини максимальне значення КІН спостерігається у найглибшій точці контуру тріщини. Найменші ж значення КІН  $K_I$  відзначаються на певній відстані від поверхні тріщини при відносних значеннях кута  $2\varphi/\pi \approx 0,125\dots 0,25$ , що свідчить про певну енергетичну нестабільність вказаної ділянки контуру тріщини. Ці результати вказують на можливий пришвидшений напрям поширення фронту тріщини при циклічному навантаженні. Таке прогнозування розповсюдження фронту тріщини підтверджується експериментальними даними, наведеними в роботі [18].

При розповсюдженні кількох колінеарних тріщин в елементах конструкцій важливо оцінити вплив взаємодіючих тріщин. У зв'язку з цим здійснено моделювання взаємодії двох тріщин.

У першому випадку досліджувалися дві однакові поверхневі півеліптичні тріщини розмірами  $2c=15$  мм,  $a/c=0,7$  та відстанями між ними 15 мм, 5 мм та 2 мм (рис.4). Прикладене максимальне напруження складало 300 МПа.

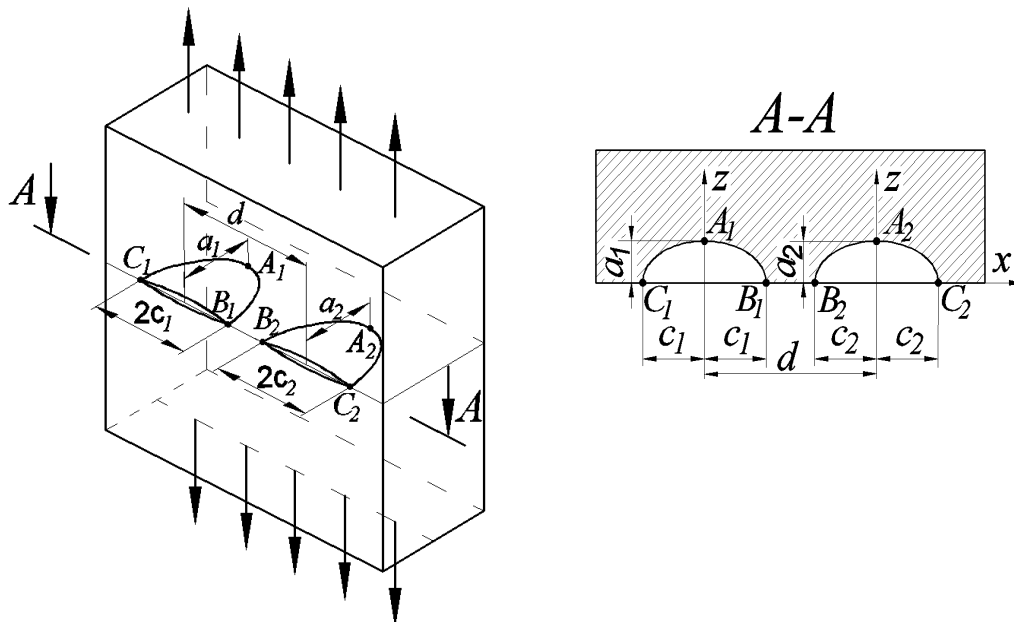


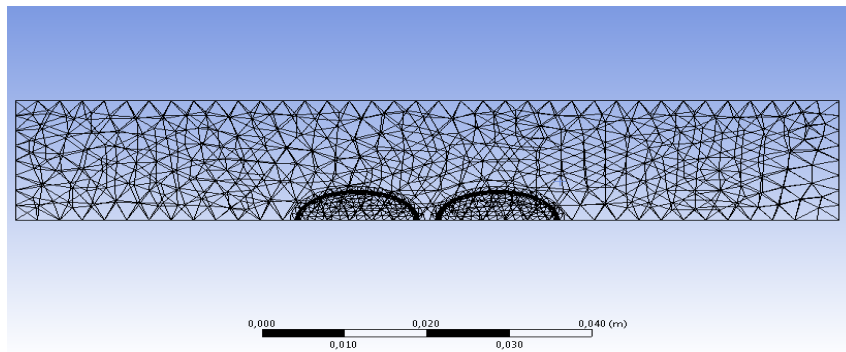
Рисунок 4. Поверхневі півеліптичні колінеарні тріщини у пластині скінченних розмірів

Figure 4. Surface semi-elliptical collinear cracks in a finite size plate

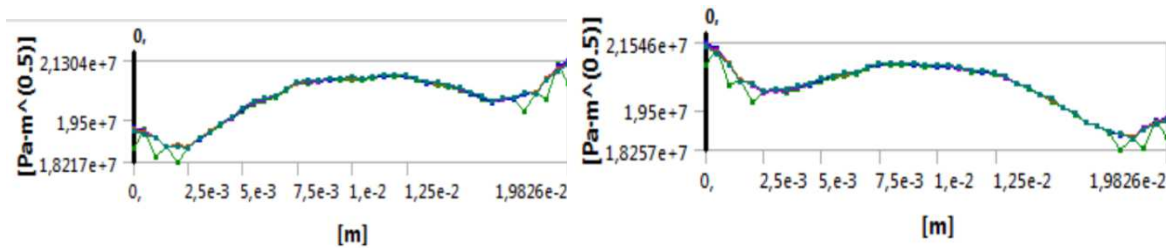
На рис.5 зображена скінчено-елементна модель пластини з двома півеліптичними тріщинами однакового розміру та розподіл значень КІН  $K_1$  уздовж фронту кожної з тріщин.

Встановлено, що при відстанях між тріщинами, співрозмірними з розмірами взаємодіючих тріщин, спостерігається збільшення КІН, яке стає суттєвішим при зближенні тріщин. Отриманий результат співпадає з даними роботи [7, 19]. Для такого випадку збільшення КІН для внутрішніх поверхневих точок тріщин, які лежить на поверхні зразка, не перевищує 1% (розглядалися тріщини розміром  $2c=15$  мм на поверхні і з таким же проміжком між ними). При розташуванні тріщин на ближчій відстані (5 мм одна від одної) відношення КІН складає  $A_1 1,044$ , а на відстані 2 мм –

$$\frac{K_{1B_1}}{K_{1C_1}} = \frac{K_{1B_2}}{K_{1C_2}} = 1,117 \text{ (рис.6,а).}$$



a)

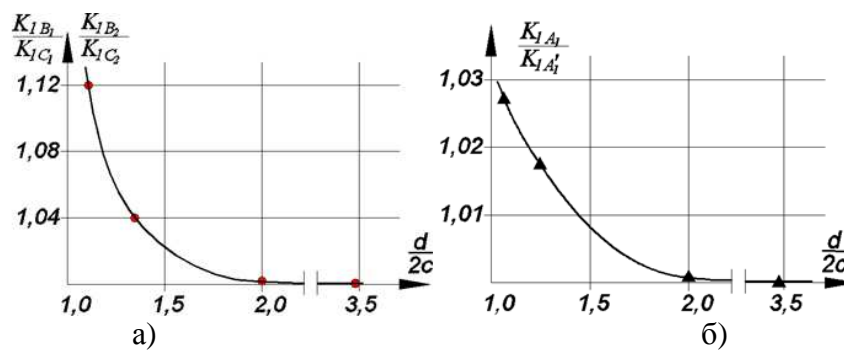


б)

**Рисунок 5.** Скінчено-елементна модель – а) та розподіл КІН – б) уздовж фронту однакових колінеарних поверхневих тріщин при їх взаємодії

**Figure 5.** Finite element model – a) and the distribution of SIF – b) along the front of twin collinear surface cracks during their interaction

Як бачимо, при зближенні тріщин значення КІН  $K_1$  для внутрішніх поверхневих точок контуру тріщини стрімко зростає. Збільшення значень КІН  $K_1$  для найглибших точок тріщин має менш виражений характер (рис.6,б). У цьому випадку порівнювали результати КІН у точці А взаємодіючих тріщин та КІН у цій же ж точці  $A_1$  одинарної тріщини.



**Рисунок 6.** Відношення КІН  $K_1$  при взаємному впливі двох однакових півеліптичних тріщин: а) внутрішні поверхневі точки  $B_1$ ;  $B_2$ ; б) найглибші точки контуру  $A_1$ ;  $A_2$ .

**Figure 6.** The ratio of SIF  $K_1$  under the mutual influence of twin semi-elliptical cracks: a) the inner surface points  $B_1$ ,  $B_2$ ; b) the deepest point of the contour  $A_1$ ;  $A_2$ .

У другому випадку моделювався вплив різних за розмірами поверхневих тріщин (рис.7). При цьому одна із тріщин мала незмінні розміри  $2c_1=20$  мм, відстань між тріщинами теж залишалася незмінною (2 мм), а змінювалися розміри другої тріщини ( $2c_2=2,5; 5,0; 7,5; 10; 15; 20$  мм). КІН уздовж фронту поверхневих тріщин обчислено за одновісного розтягу взірців при  $\sigma=200$  МПа.

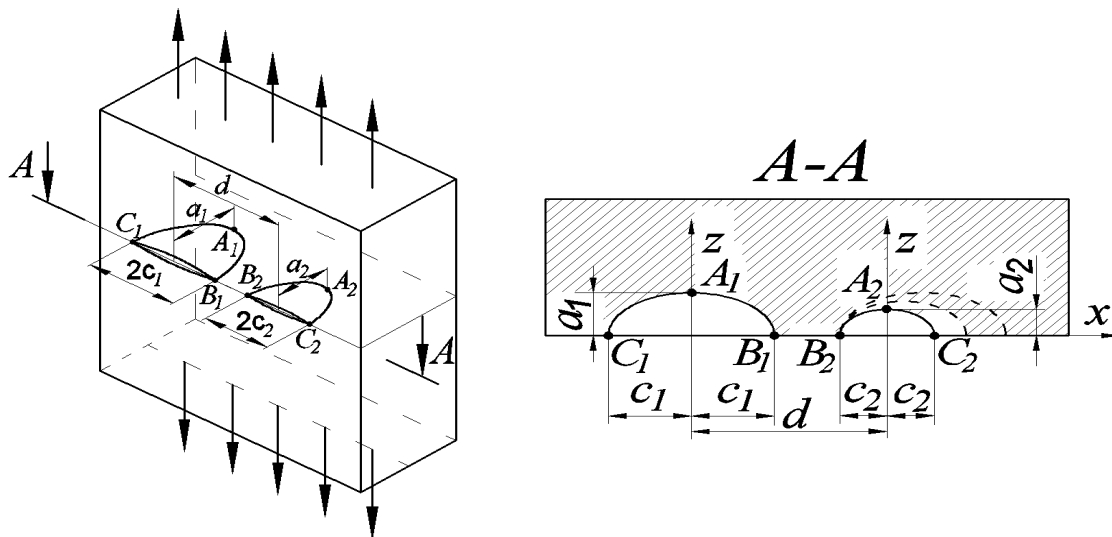


Рисунок 7. Поверхневі півеліптичні колінеарні тріщини різних розмірів у пластині скінченних розмірів

Figure 7. Surface semi-elliptical collinear cracks of different sizes in a finite size plate

Скінчено-елементна модель для одного з випадків показана на рис.8,а; розподіл значень КІН уздовж кожної з тріщин (крім випадку однакових тріщин) зображено на рис.8,б. Бачимо, що при близькій відстані між двома тріщинами, їх взаємний вплив виявляється у збільшенні (як і в попередньому випадку) значень КІН у внутрішній області їх взаємодії. Причому характер зміни КІН такий, що максимальне значення КІН  $K_1$  для меншої тріщини зміщується до внутрішньої точки контуру поверхневої тріщини.

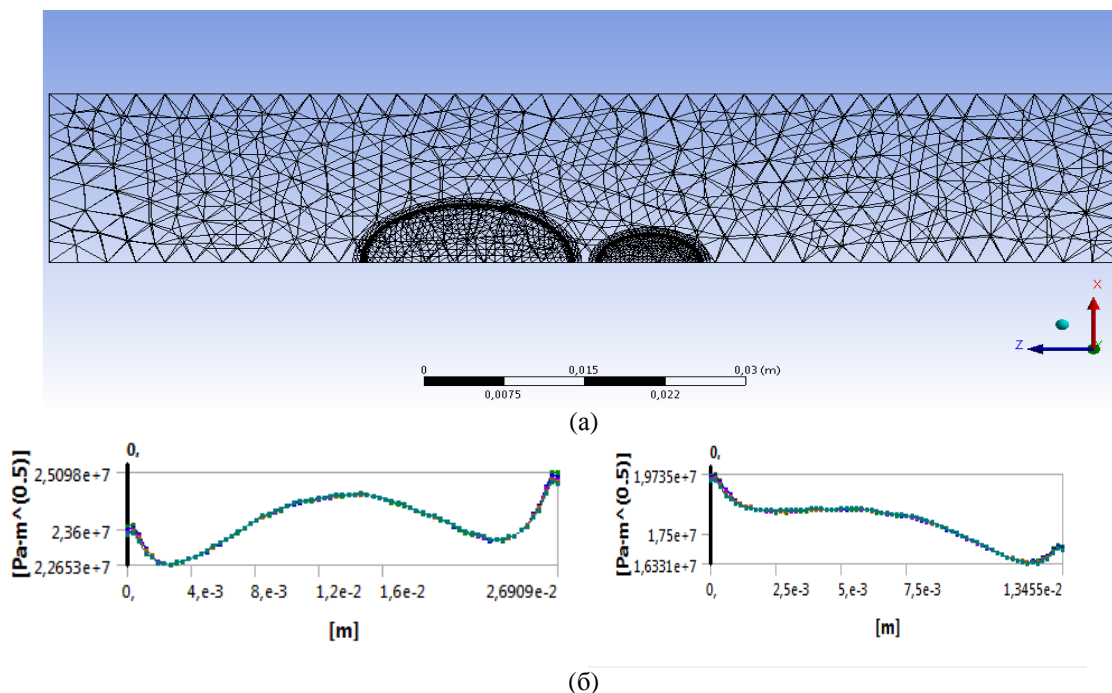
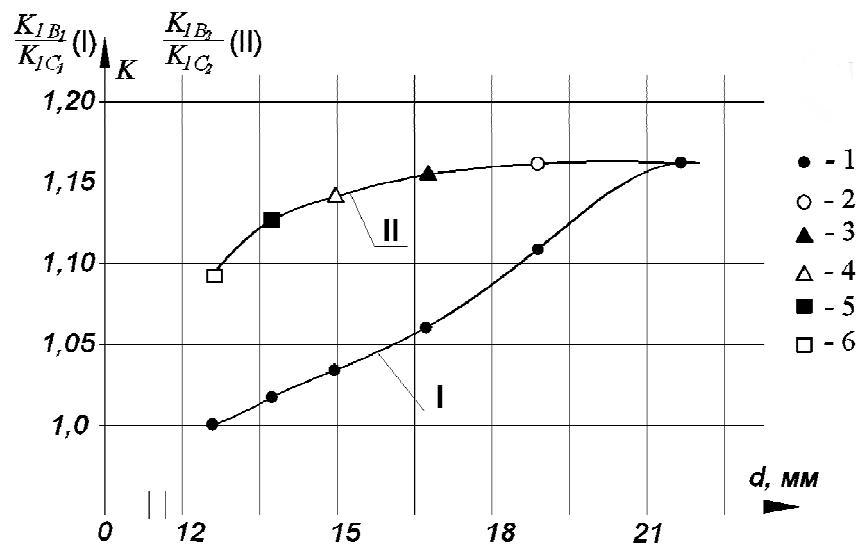


Рисунок 8. Скінчено-елементна модель – а) та характерний розподіл КІН – б) уздовж фронту двох поверхневих тріщин різного розміру при їх взаємодії

Figure 8. Finite element model – a) and the typical distribution of SIF – b) along the front of two surface cracks of different sizes during their interaction



Взаємний вплив двох тріщин за результатами порівнянь КІН  $K_I$  кожної внутрішньої точки однієї з тріщин з відповідною зовнішньою поверхневою точкою іншої тріщини представлено на рис.9.



**Рисунок 9.** Відношення КІН  $K_I$  для внутрішніх поверхневих точок  $B_1$  та  $B_2$  до відповідних зовнішніх поверхневих точок  $C_1$  та  $C_2$  при взаємодії різних півеліптичних тріщин: I – для більшої тріщини; II – для меншої тріщини:  $2c_1=20$  мм;  $2c_2=20$  мм(1);  $2c_2=15$  мм(2);  $2c_2=10$  мм(3);  $2c_2=7,5$  мм(4);  $2c_2=5,0$  мм(5);  $2c_2=2,5$  мм(6)

**Figure 9.** The ratio of SIF  $K_I$  for inner surface points  $B_1$  and  $B_2$  to relevant outer surface points  $C_1$  and  $C_2$  during the interaction of different size semi-elliptical cracks: I - for bigger crack; II - for smaller cracks:  $2c_1 = 20$  mm;  $2c_2 = 20$  mm (1);  $2c_2 = 15$  mm (2);  $2c_2 = 10$  mm (3);  $2c_2 = 7.5$  mm (4);  $2c_2 = 5.0$  mm (5);  $2c_2 = 2.5$  mm (6)

Крива I побудована за результатами досліджень більшої із взаємодіючих тріщин  $2c_1=20$  мм, крива II – відповідно для тріщин  $2c_2=2,5; 5,0; 7,5; 10; 15$  та  $20$  мм. Зазначимо домінуючий вплив на зміну КІН більшої з тріщин (див. криву II), а порівняно невеликі тріщини мало впливають на зміну КІН більшої тріщини.

Для вказаних відношень розмірів поверхневих тріщин зміна значень КІН не перевищує 4% (див. три крайні точки на кривій I), тоді як вплив більшої з тріщин на менші складає 9...14% для тих же співвідношень тріщин.

**Висновки.** Методом скінчених елементів змодельовано НДС пластини скінчених розмірів з поверхневою півеліптичною тріщиною за одновісного розтягу. Отримано розподіл значень коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту поверхневої тріщини, похибка яких при порівнянні з літературними даними не перевищує 2%.

Відзначено певну нестабільність значень КІН у приповерхневих областях фронту поверхневої тріщини при відносних значеннях кута  $2\varphi/\pi \approx 0,125 \dots 0,25$  та відносних розмірах тріщини  $a/c = 0,4 \dots 0,8$ .

Методом скінчених елементів змодельовано взаємний вплив двох поверхневих колінеарних тріщин однакового та різних розмірів. Отримано значення КІН залежно від відстані між центрами колінеарних поверхневих тріщин.

**Conclusions.** Modeling of stress-strain state of semi-elliptical surface cracks in a finite size plate under tensile stress using finite element method was developed. The authors obtained the distribution of values of stress intensity factors along the front of surface crack with the error which does not exceed published data by 2%.

Some instability of SIF of the surface crack front in the near surface areas of its contour with relative angle values of  $2\varphi/\pi \approx 0,125 \dots 0,25$  and the relative crack size of  $a/c = 0,4 \dots 0,8$  was found to occur.

Using finite element method the authors modeled the mutual influence of two collinear cracks of equal size and different size of surface cracks. They obtained the quantitative results of the mutual influence of collinear surface cracks.

#### Список використаної літератури

1. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под общ. ред. Панасюка В.В. – Т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений [Текст] / под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т.1, Т.2. – 1016 с.
3. Панасюк, В.В. Разрушение элементов конструкций с несквозными трещинами [Текст] / В.В. Панасюк, А.И. Сушинский, К.Б. Кацов. –К.: – Наук.думка, 1991. – 172 с.
4. Махутов, Н.А. Исследование КИН разрушения при наличии поверхностных полуэллиптических разноориентированных трещин в сварных элементах оборудования АЭС [Текст] / Н.А. Махутов, И.В. Макаренко, Л.В. Макаренко // Пробл. прочн., 2010. – №1. – С.37–45.
5. Пестриков, В.М. Механика разрушения твердых тел [Текст] / В.М. Пестриков, Е.М. Морозов. – СПб: Профессия, 2002. – 300с.
6. Тихомиров, В.М. Определения КИН методом фотоупругости в трехмерных элементах конструкций [Текст] / В.М. Тихомиров // Матер. метемат. семинари “Развитие методов экспериментальной механики”. – М.: МИСИ, 2003. – С.103–110.
7. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения [Текст] / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334с.
8. Вычислительные методы в механике разрушения [Текст] / под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
9. Карзов, Г.П. Физико-Механическое моделирование процессов разрушения [Текст] / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Швецова. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с.
10. Морозов, Е.М. Расчет критических размеров поверхностных трещин [Текст] / Е.М. Морозов // Физ.-хим. механ. материалов, 2006. – №1 – С.128–130.
11. Оцінка розподілу КІН по фронту поверхневої напівеліптичної тріщини у товстостінному циліндрі [Текст] / Ю. Пиндус, П. Марущак, Р. Біщак, О. Ясній // Вісник ЖДТУ, 2008. – Том 46. – № 3. – С.33–39.
12. Моделювання розкриття втомної тріщини в сплаві Д16Т за регулярного навантаження методом скінчених елементів [Текст] / П. Ясній, Ю. Пиндус, О. Галушак, В. Фостик // Вісник ТНТУ, 2013. – Т. 70, № 2. – С.7–14.
13. X. Wang Fully plastic J-integral solutions for surface cracked plates under biaxial loading / Eng. Fract. Mech., 2006. – №73. – P.1581–1595.
14. Nishioka T., Atluri S.N. Analysis of surface flaws in pressure vessel by a new 3-dimensional alternating method/ ASME PVP, 1982. – V. 58. – P.17–35.
15. Saeidi Gogarchin H.S., Ghjar R. Stress intensing factor calculation for surface crack in cylinders under longtudional gradient pressure using general point load wright function / Fat. and Fract.of Eng. Mater. and Struct., 2014. – V. 37. – № 2. – P.184–194.
16. Chia-Hau Chen, Chao-Shi Chen, Ernian Pan, Han-Chou Tseng, Pao-Shan Yu, (2009) "Boundary element analysis of mixed-mode stress intensity factors in an anisotropic cuboid with an inclined surface crack", Engineering Computations, Vol. 26 Iss: 8, PP.1056–1073.
17. Chang Dr., Kotousov A. A strip yield model for two collinear cracks / Eng. Fract. Mech., 2012. – №90. – p.121-128.
18. Leach A.M., Daniewicz S.R., Newman J.C., Jr. A new constraint based fracture criterion for surface cracks/ Eng. Fract. Mech., 2007, №74. – P.1233–1242.
19. Murakami Y., Nisitani H. Stress intensity factors for interaction two equal semi-elliptical surface cracks in tension. – Trans. Jsme, Ser.A, 1981, 47, №415. – PP.295–303.
20. W. Hu, X.R. Wu, H. Wang. Weight functions and strip yield solution for two equal-length collinear cracks in an infinite sheet / Eng. Fract. Mech., 2011. – №78. – P.2356–2368.
21. МР-125-01-90. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений и коэффициентов ослаблений сечений для дефектов в сварных соединениях. – К.: ИЭС им. Е.О. Патона, 1990. – 55с.

22. Махненко, В.И. Ресурс безопасной эксплуатации сварных соединений и узлов современных конструкций [Текст] / В.И. Махненко. – К.: Наук.думка, 2006. – 619 с.
23. Морозов, Е. ANSYS в руках инженера. Механика разрушения [Текст] / Е. Морозов, А. Муйземнек, А. Шадский. – М.: Ленард. – 456с.
24. Raju I.S., Newman J.C. Jr. Stress-intensity factors for a wide range semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates // Eng. Fract. Mech., 11. – №4. – PP.817–829.

*Отримано 18.02.2014*