

**В. Баженов. Моделювання континуального руйнування просторових тіл в умовах тривалого статичного і циклічного навантаження / В. Баженов, О. Гуляр, С. Пискунов // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.108-117. — (механіка та матеріалознавство).**

УДК 539.3, 539.4

**В. Баженов, докт. техн. наук; О. Гуляр докт. техн. наук;  
С. Пискунов, докт. техн. наук**

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

## **МОДЕЛЮВАННЯ КОНТИНУАЛЬНОГО РУЙНУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ В УМОВАХ ТРИВАЛОГО СТАТИЧНОГО І ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**Резюме.** Представлено методику моделювання процесів континуального руйнування кругових та призматичних тіл складної форми в умовах тривалого статичного і багатоциклового навантаження: скінчено-елементна база для визначення напружено-деформованого стану просторових тіл на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ), алгоритми визначення феноменологічного параметра пошкодженості та моделювання еволюційних процесів розповсюдження зон континуального руйнування. Наведено результати розв'язання практичних задач із визначення розрахункового і додаткового ресурсу відповідальних просторових об'єктів.

**Ключові слова:** багатоциклове деформування, термов'язкопружнопластичність, пошкодженість, континуальне руйнування, просторові тіла, напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), ресурс.

**V. Bazhenov, O. Gulyar, S. Pyskunov**

## **MODELLING OF CONTINUAL FRACTURE OF SPATIAL BODIES UNDER LONG-TERM STATIC AND CYCLIC LOADING**

**Summary.** Techniques of continual fracture process modelling of complex shape circular and prismatic bodies under elastic high-cycle deformation and in condition of creep under prolonged static load is presented in this paper. The semianalytic finite element method (SFEM) to determine the stress-strain state is used. SFEM involves the application of finite element mesh in the cross section of the body, and using one finite element in the direction of straight or curved creating, which provides significantly lower computational cost for three-dimensional problems solving. The Kachanov-Rabotnov's scalar damage parameter to describe the continual fracture of the material and the degree dependence of the damage parameter accumulation rate of on the stress state parameters are used. Stepping algorithms for the stress-strain state and damage parameter determining for considered deformation process have been developed. The algorithm of simulation of evolutionary processes of macroscopic defects (continual fracture zone) growth after local loss of material bearing capacity because of damage parameter's critical value has been obtained. A solution of practical problems of determining of the calculated lifetime (to local loss of material bearing capacity) and the additional lifetime (time of continual fracture zone growth) for high pressure connecting pipe and the gas turbine blade has been presented. It is shown, that for the connecting pipe which represents thick-wall rotation body, lifetime is not limited to local loss of material bearing capacity and can be significantly extended by additional lifetime. At the same time for the blade under creep condition lifetime is completely determined by the local loss of material bearing capacity, because the value of additional lifetime is related to the continual fracture zone growth of only about 5% of the calculated lifetime.

**Key words:** high-cycle deformation, thermoviscoelastoplasticity, damage, continual fracture, spatial body semianalytic finite element method (SFEM), lifetime.

**Вступ.** Конструкційні елементи відповідальних об'єктів часто функціонують в умовах тривалого сталого або циклічного силового навантаження, в тому числі при підвищених температурах. У цих умовах відбуваються відповідно процеси повзучості або втоми, характерним для яких є процес континуального руйнування, що полягає у поступовому накопиченні розсіяних пошкоджень та утворення й зростання макроскопічних дефектів (зон руйнування), що має бути враховано для достовірного аналізу тривалої міцності й величини ресурсу. В зв'язку з цим актуальною проблемою є створення й реалізація підходів до моделювання деформування просторових тіл з

урахуванням перелічених процесів, вирішення якої потребує залучення чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів та його ефективних модифікацій, однією з яких є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ).

Для опису зазначених процесів накопичення розсіяних пошкоджень доцільно використовувати широко розповсюджений підхід, що ґрунтується на концепції механіки континуального руйнування, який викладений у роботах В.В. Болотіна, Л.М. Качанова і Ю.Н. Работнова та розвинений і реалізований для різних умов навантаження в роботах М.І. Бобиря, В.П. Голуба, Г.І. Львова, Ю.М. Шевченка [1 – 4 та ін.], а також у роботах інших українських та багатьох іноземних учених. Разом з тим, як зазначено в роботі [5], актуальною проблемою залишається питання про визначення часу розвитку зон континуального руйнування, які утворюються після досягнення параметром пошкодженості критичних значень і локальної втрати несучої здатності матеріалу, оскільки цей проміжок часу є доволі суттєвим.

**Метою даної роботи** є висвітлення основних положень розробленої на основі НМСЕ методики розв'язання задач механіки континуального руйнування просторових тіл обертання і призматичних тіл та викладення результатів, що ілюструють її практичне застосування.

**1. Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ).** Скінчено-елементне розв'язання тривимірних задач про визначення напружено-деформованого стану просторових тіл пов'язано зі суттєвими обчислювальними витратами, які є особливо відчутними у випадку моделювання фізично-нелінійного деформування на основі крокових алгоритмів, застосування яких потребує, зокрема, багаторазового розв'язання систем рівнянь великої розмірності. Не зважаючи на стрімке зростання ресурсів і потужності обчислювальної техніки та розвиненість сучасного програмного забезпечення (наприклад, скінченоелементних програмних комплексів ANSYS, ABAQUS та ін.) це може становити суттєву перешкоду для розв'язання вищезгаданих задач. Крім того, розв'язання задач континуального руйнування потребує розроблення спеціальних алгоритмів для урахування накопичення пошкодженості й моделювання розвитку зон руйнування, реалізація яких у зазначених комплексах дещо обмежена.

НМСЕ являє собою ефективну модифікацію МСЕ, що орієнтована на визначення напружено-деформованого стану тіл просторових тіл канонічної форми – неоднорідних тіл обертання й призматичних тіл (рис. 1, 2), які можуть бути подані як результат руху плоскої геометричної фігури, що збігається з поперечним перерізом тіла, в напрямку кругової або прямолінійної утворюючої. Термін «неоднорідних» тут вжито в сенсі змінності фізико-механічних властивостей і геометричних розмірів тіла вздовж утворюючої (координати  $z^3$ ). Скінчено-елементна дискретизація таких об'єктів здійснюється в поперечному перерізі, а вздовж утворюючої використовується один скінчений елемент (СЕ, круговий або призматичний відповідно, рис. 3), який має вздовж утворюючої розмір, що збігається із розмірами тіла.

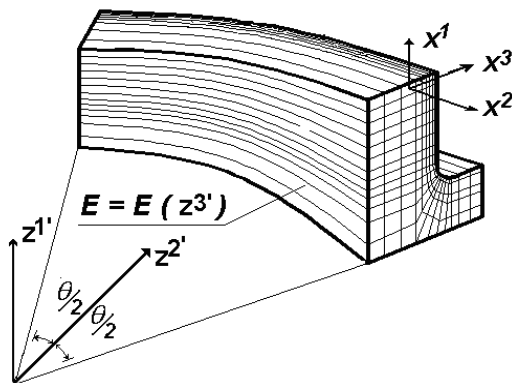


Рисунок 1. Кругове тіло

Figure 1. Circle body

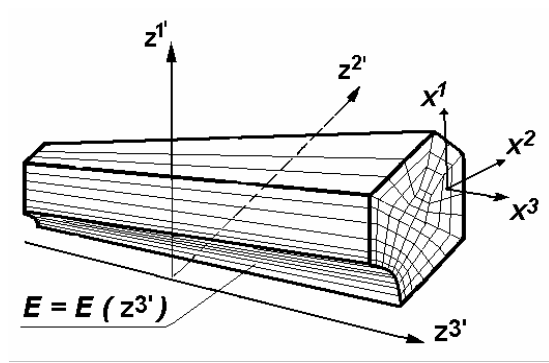


Рисунок 2. Призматичне тіло

Figure 2. Circle body

Для подання переміщень у поперечному перерізі СЕ використовується білінійна апроксимація, а в напрямку утворюючої – поліноміальна:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad u_{s'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{s'}^l \varphi^{(l)}. \quad (1)$$

де  $\varphi^{(l)}$  – поліноми Лагранжа ( $l = 0, 1$ ) і Міхліна ( $l = 2, \dots, L$ ).

Матриця жорсткості отриманої дискретної моделі має блочну структуру, що, в свою чергу, дозволяє використовувати для розв'язання отриманої системи рівнянь блочно-ітераційні алгоритми. Ефективність і достовірність методу показана для широкого кола задач лінійних і нелінійних задач механіки [6–8], де можна знайти також докладніший опис методу, особливостей його реалізації та додаткового посилання на публікації авторів.

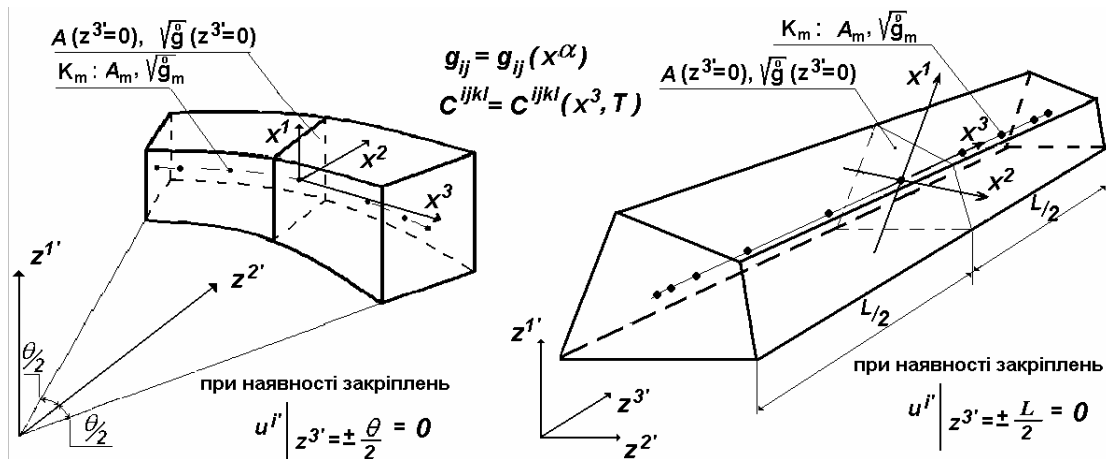


Рисунок 3. Круговий і призматичний напіваналітичні неоднорідні скінчені елементи (СЕ)

Figure 3. Circle and prismatic semi analytic nongomogeneous finite elements (FE)

**2. Співвідношення континуальної механіки руйнування й алгоритми визначення параметра пошкодженості.** Для опису зміни феноменологічного параметра пошкодженості  $\omega(t)$  ( $\omega(t=0) = \omega_0 = 0$ ,  $\omega(t^*) = 1$ ,  $t^*$  – час локальної втрати несучої здатності матеріалу) використовуються кінетичні рівняння, що пов'язують його прирощення з параметрами зовнішніх навантажень, силових, деформаційних і температурних впливів) і напруженого стану.

Для випадку багатоциклового навантаження найпростішим для обчислення пошкодженості є вираз

$$\frac{d\omega}{dN} = A \left( \frac{\sigma}{\sigma_B(1-\omega)} \right)^n, \quad (2)$$

де  $A$  та  $n$  – експериментально визначені константи;  $\sigma_B$  – межа міцності матеріалу.

При побудові алгоритму визначення величини параметра пошкодженості враховується, що процес багатоциклового навантаження може здійснюватись зі змінними параметрами циклу (середнім значенням напруження і амплітудою). В зв'язку з цим процес навантаження необхідно розділити на певну кількість етапів – кроків розв'язання задачі –  $S^*$ , при цьому передбачається, що в межах кожного етапу  $s$  навантаження відбувається зі сталим середнім напруженням  $\sigma_{0s}$  і сталою амплітудою  $\sigma_{as}$  протягом  $N_s$  циклів. При визначених таким чином параметрах навантаження на кожному кроці виконується визначення напружено-деформованого стану, а величина

пошкодженості  $D_S$  за попередню історію навантаження (до  $N_S$  циклів за  $S$  етапів,  $N_S = \sum_{s=1}^S N_s$ ) визначається за формулою, що отримана в [9] на основі розв'язку рівняння (2) в замкненому вигляді,

$$D_S = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n \sum_{s=1}^S (\sigma_{as})^n N_s}]{1} . \quad (3)$$

У випадку тривалого статичного навантаження при виникненні деформацій повзучості визначення параметра пошкодженості здійснюється із використанням виразу [2]

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[ \frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta , \quad (4)$$

де  $C, m, q, r, \beta$  – константи матеріалу, які є функціями температури;  $\sigma_e$  – еквівалентне напруження, обчислене відповідно до обраного критерію міцності.

Визначення напружено-деформованого стану в умовах повзучості здійснюється на основі блочно-ітераційного алгоритму, а кожній ітерації  $n$  кроку  $m$  напруження обчислюються із урахуванням величин деформацій повзучості:

$$\left( \overline{s^{ij}} \right)_n^m = \left( s^{ij} \right)_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m , \quad (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m , \quad (\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} [\xi_i^c]_n^m \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_n^m} \quad (5)$$

де  $\left( \overline{s^{ij}} \right)_n^m$  – девіатор дійсних напружень, що враховує прирощення деформації повзучості  $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ ,  $\Delta t_m$  – крок за часом,  $G_1 = E / (1 - 2\nu)$ .

За величинами напружень, отриманих за формулами (5), проводиться, зокрема, обчислення прирощень пошкодженості  $(\Delta \omega)_m$  і накопичених величин  $\omega_m$ :

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m . \quad (6)$$

Виконання умови локальної втрати несучої здатності матеріалу  $\omega(t^*) > \omega^*$ , де  $\omega^* \approx 1$  – критичне значення параметра пошкодженості, свідчить про перехід від процесу накопичення пор і несучильностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів – зон континуального руйнування. Момент часу  $t^*$  визначає величину розрахункового ресурсу досліджуваного об'єкта.

**3. Алгоритм моделювання зон континуального руйнування.** Для моделювання зростання початкового макроскопічного дефекту із використанням НМСЕ після виконання умови  $\omega > \omega^*$  на кроці розв'язання задачі, що відповідає моменту часу  $t = t^* + \Delta t$ , у точці з координатами  $z^{i*} = \{z^{1*}, z^{2*}, z^{3*}\}$  ( $z^{1*}, z^{2*}$  – координати центра ваги поперечного перерізу СЕ,  $z^{3*}$  – координата точки інтегрування  $K$ ) у розрахункову схему вводиться область об'ємом  $V_0$ . (рис. 4а), яка в площині  $z^1 - z^2$  має розмір поперечного перерізу СЕ, а її розмір  $\Delta z^3$  у напрямку утворюючої визначається як сума половин відстаней  $a_{k-1}$  і  $a_k$  від точки інтегрування  $K$  до точок  $K-1$  і  $K+1$  (рис. 4б). Об'єм  $V_0$ , величина якого обумовлюється параметрами дискретної моделі, визначає мінімальне прирощення характерних розмірів зони руйнування в процесі її

розвитку. В межах зазначеної області напруження і модуль пружності матеріалу приймаються такими, що дорівнюють нулю:

$$\sigma_{ij}(t = t^* + \Delta t, z_i = z_i^*) = 0, E(z_i = z_i^*) = 0. \quad (7)$$

На наступних кроках визначення напружено-деформованого стану і параметра пошкоженості здійснюється за алгоритмом (5), (6) з урахуванням умови (7) для нової розрахункової схеми, що містить зону руйнування до досягнення умов  $\omega = \omega^*$  у прилеглих точках. При цьому відбувається поступове збільшення зони руйнування шляхом приєднання до неї нових об'ємів  $V_n$  за проміжки часу  $t_n$ . Процедура моделювання розвитку зони континуального руйнування проводиться до досягнення певного об'єму  $V = \sum_n V_n$  за час  $t_V = \sum_n t_n$  (рис. 4б). Величина часу  $t_V$  визначає додатковий ресурс (живучість) об'єкта.

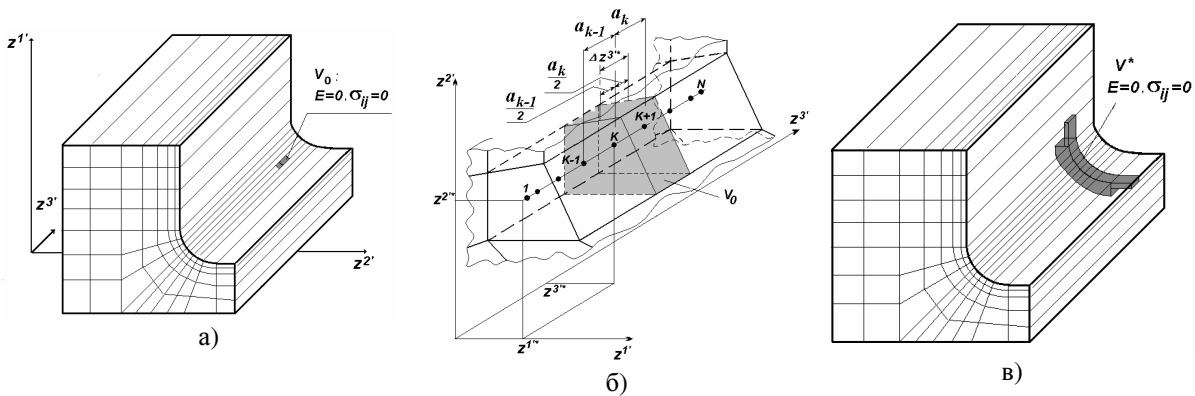


Рисунок 4. Алгоритм моделювання розвитку зони континуального руйнування

Figure 4. Algorithm of modeling of continual fracture zone growth

**4. Результати скінчено-елементного моделювання процесів континуального руйнування і визначення ресурсу.** Розроблені підходи дозволили провести розв'язання низки практичних задач про визначення ресурсу відповідальних об'єктів, зокрема приєднувального штуцера в умовах багатоциклового навантаження та пера лопатки газової турбіни в умовах повзучості.

Приєднувальний штуцер швидкодіючого клапана установки для синтезу поліетилену під високим тиском являє собою масивне тіло обертання зі ступінчастою змінною геометрією меридіального перерізу і знаходиться під дією циклічного внутрішнього тиску. Внаслідок особливості технології виготовлення в штуцері можлива наявність вихідних дефектів, що зумовлені змінами фізико-механічних властивостей матеріалу об'єкта, які локалізуються в певній області порівняно невеликого розміру. Кількісний опис впливу таких змін на процес континуального руйнування здійснений шляхом урахування відхилень величин констант рівнянь, що визначають процес накопичення пошкоженості в умовах багато циклового деформування, від їх номінальних значень. Загальний вигляд об'єкта і використані для розв'язання задачі дискретні моделі, що враховують необхідність опису наявності дефектів, наведені на рис. 5. Отримане розподілення напружень у цілому є однорідним по висоті штуцера, зміна напружень у межах поперечного перерізу відбувається за радіусом, незначні збурення наявні в місцях змін геометрії.

Для опису накопичення пошкоженості використано рівняння (2) при  $\sigma_B = 1300$  МПа,  $A = 1,5495 \cdot 10^{-2}$  та  $n = 4,267$ , у межах дефекту змінення  $n$  відбувається за лінійним законом у межах 4,267 – 4,4. Розрахунковий ресурс штуцера без дефекта становив  $4,9 \cdot 10^9$  циклів, за наявності дефекту на висоті  $H_x = 215$  мм -  $N^* = 3,16 \cdot 10^9$ ,

при  $H_x = 300$  -  $N^* = 3.89 \cdot 10^9$ . Значення величин пошкоженості стрімко зменшуються при віддаленні від внутрішньої поверхні і вже на відстані понад 3мм величина пошкоженості є незначною ( $\omega < 0.1$ ). Таким чином, після вичерпання несучої здатності на внутрішній поверхні переважна частина товщини стінки залишається неушкодженою, отже деталь зберігає герметичність і може знаходитися в експлуатації.

Проведене моделювання розповсюдження зони руйнування в радіальному напрямі по товщині стінки в осесиметричній постановці показало, що величина додаткового ресурсу до досягнення зоною руйнування глибини зони 1 – 5 мм відрізняється для випадків з дефектом і без дефекту майже в 2 рази, поступово ця різниця зменшується і при глибині зони 12 мм (що відповідає половині товщини стінки) ця відмінність становить лише 4.6%, а величина додаткового ресурсу становить близько  $N = 41 \cdot 10^9$  циклів (рис. 6, крок зростання зони руйнування становить 1/20 товщини стінки). Проте величини додаткового ресурсу, отримані в просторовій постановці, є майже вдвічі меншими, ніж в осесиметричній постановці. Зокрема, при глибині зони 12 мм відповідні величини ресурсу становлять  $N = 21 \cdot 10^9$  циклів.

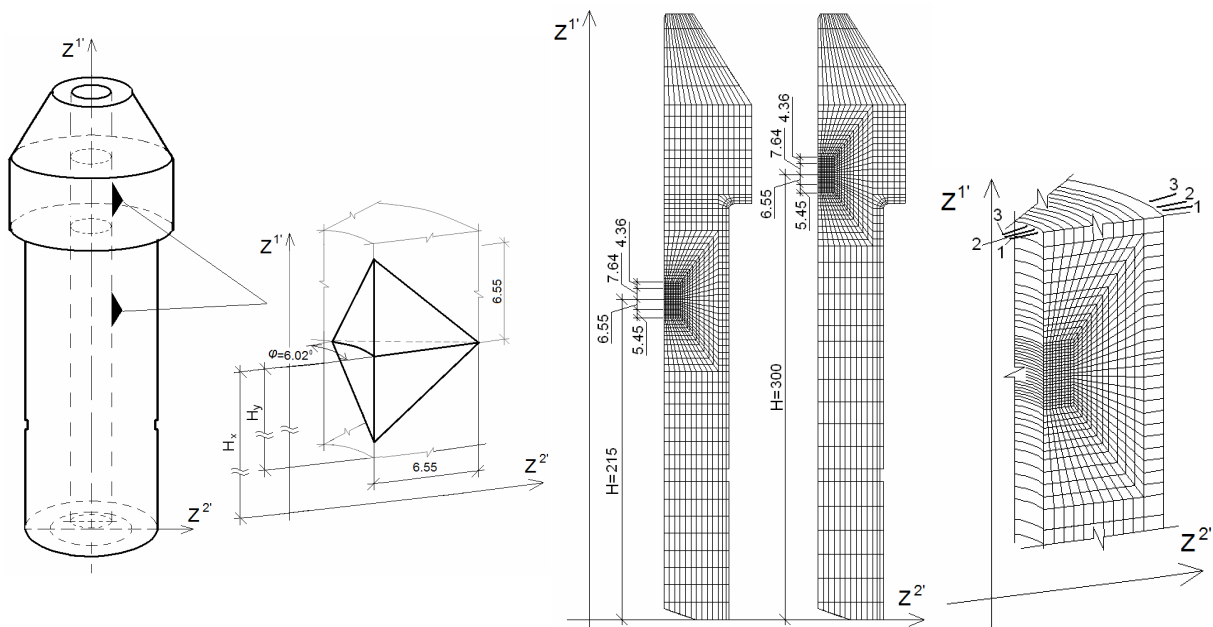


Рисунок 5. Штуцер з дефектом: загальний вигляд і дискретні моделі НМСЕ

Figure 5. The connecting pipe with defects: general view and SFEM discrete model

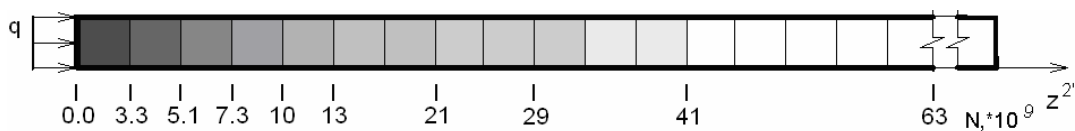


Рисунок 6. Величини додаткового ресурсу при розповсюдженні зони руйнування по товщині стінки штуцера

Figure 6. Additional lifetime values for continual fracture zone growth across the connecting pipe wall

Лопатка стаціонарної газової турбіни є просторовим тілом складної форми, характерні розміри якого по висоті значно перевищують розміри поперечного перерізу. Перо лопатки, закручене відносно вертикальної осі, має змінну по висоті площу поперечного перерізу і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному як по висоті, так і в поперечних перерізах поля температур. Розв'язання

задачі повзучості для лопатки в цілому пов'язано зі значними обчислювальними витратами. Результати моделювання просторового напружено-деформованого стану лопатки, виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного МСЕ, засвідчили його суттєву неоднорідність як по висоті, так і в межах поперечних перерізів. На основі цих результатів було обрано небезпечний поперечний переріз лопатки  $R_0$ , комбінація усереднених напруження  $\sigma_0$  і температури  $T_0$  в якому призводить до найінтенсивнішого накопичення деформацій повзучості. Перелічені величини в подальшому використовуються для опису розрахункових схем і результатів розв'язання задачі. Для проведення чисельного моделювання деформування в умовах повзучості було розглянуто фрагмент пера лопатки в околі небезпечного перерізу  $R^*$ ,  $0,94 R_0 < R < 1,06 R_0$ , в межах якого спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень і, відповідно, очікується найбільш суттєве їх перерозподілення в умовах повзучості. Фрагмент завантажений розподіленням за об'ємом відцентровим навантаженням, а для моделювання впливу верхньої частини лопатки в перерізі  $R = 1,06 R_0$  прикладене нерівномірне розподілене в площині перерізу навантаження  $q = q(z^1, z^2)$ , що відповідає діючим у цьому перерізі напруженням (рис. 7). Неоднорідне зовнішнє температурне поле призводить до нерівномірного розподілення температур всередині пера лопатки (рис. 8a)

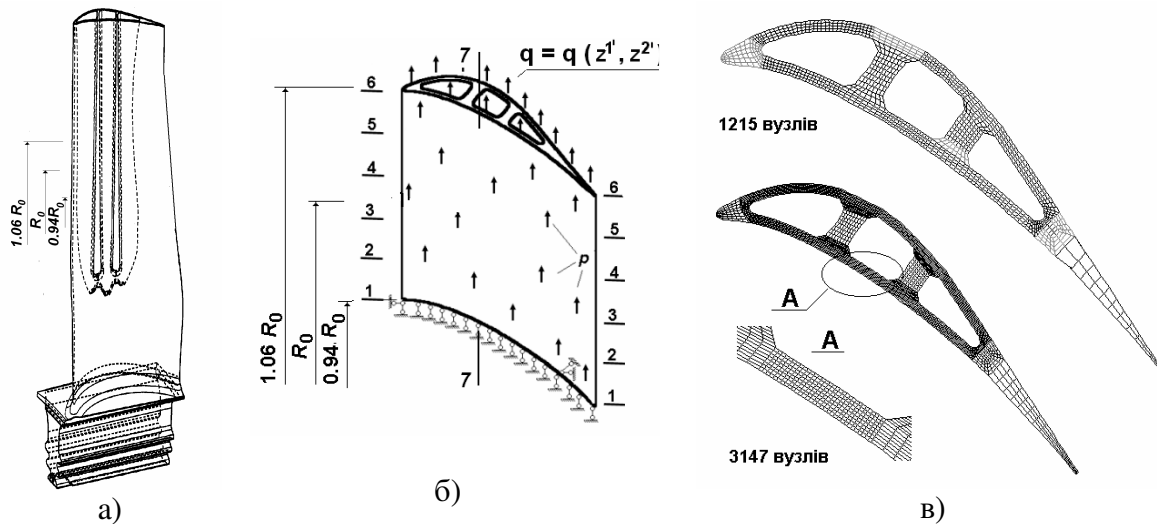
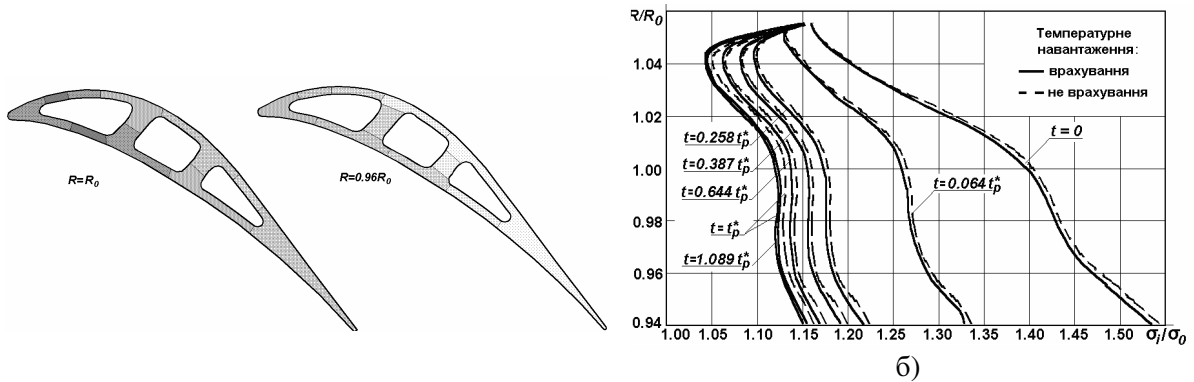
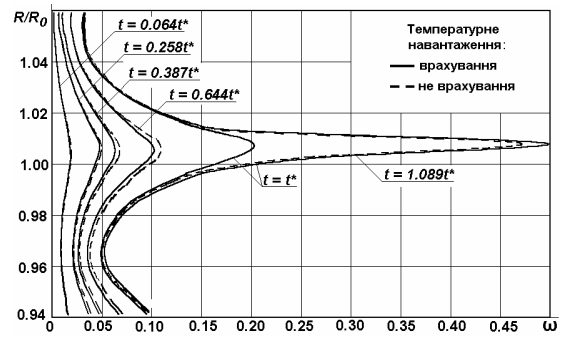


Рисунок 7. Лопатка газової турбіни (а), розрахункова схема (б) і поперечний переріз дискретних моделей НМСЕ фрагмента лопатки (в)

Figure 7. Gas turbine blade (a), design scheme (b) and cross-section of SFEM discrete model (c) of blade fragment





в)

**Рисунок 8.** Розподілення температур у поперечних перерізах фрагмента пера лопатки (а) і розподілення напружень (б) і пошкодженості (в) по висоті фрагмента лопатки в різні моменти часу

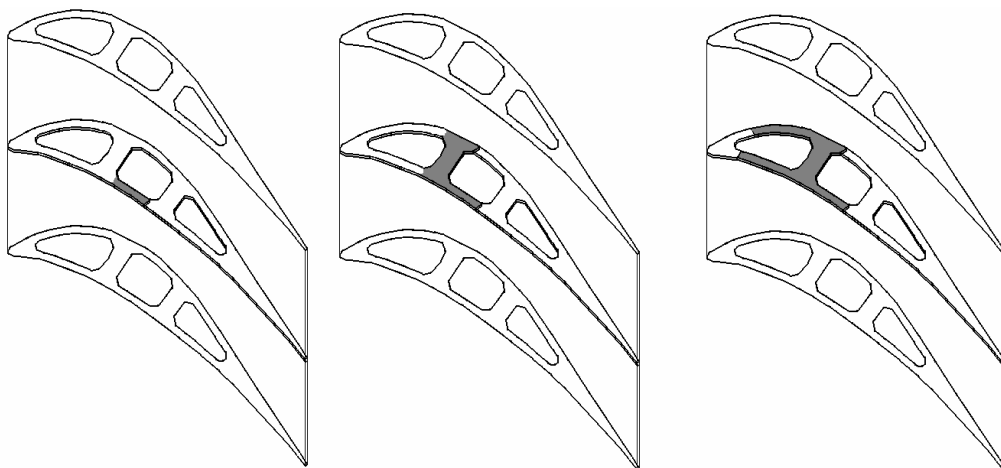
**Figure 8.** Temperature distribution in cross-sections of blade fragment (a), stress intensity factor (b) and damage parameter (c) distribution in different moment of time.

Опис деформування матеріалу лопатки в умовах повзучості здійснюється рівняннями вигляду

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}, \quad (8)$$

де  $B = B(T)$ ,  $C = C(T)$ ,  $m = m(T)$ ,  $n = n(T)$ ,  $r = r(T)$ ,  $q = q(\sigma, T)$  – константи матеріалу;  $T$  – температура.

Проведене моделювання деформування пера лопатки з урахуванням і без урахування неоднорідного розподілення температур показало, що відмінності напружень є незначними, відповідно незначними на початкових стадіях деформування є і відмінності величин пошкодженості (рис. 8б, в). З часом на стадії встановленої повзучості величини напружень за наявності температурних навантажень призводять збільшення відмінностей пошкодженості у центрі області «А» (рис. 7в): різниця величин параметра пошкодженості досягає 9% і далі збільшується, що пов'язано як із різницею у величинах напружень, так і з залежністю констант рівнянь (7) від температури. Уточнена величина розрахункового ресурсу, отримана при врахуванні температурного навантаження, є на 9% більшою, ніж величина ресурсу  $t_p^*$ , отримана для випадку рівномірного розподілення температур.



**Рисунок 9.** Розповсюдження зони континуального руйнування в пері лопатки



**Figure 9.** Continual fracture zone growth in blade fragment

Проведене моделювання розвитку зони континуального руйнування до повної втрати несучої здатності показало, що для розглядуваного об'єкта величина додаткового ресурсу після локальної втрати несучої здатності є незначною і становить близько 5% розрахункового ресурсу. Це дозволяє зробити важливий висновок, що фактично величина ресурсу лопатки визначається локальною втратою несучої здатності.

**Висновки.** Розроблена в даній роботі методика моделювання процесів континуального руйнування дозволяє проводити визначення величин розрахункового і додаткового ресурсу відповідальних елементів конструкцій, що працюють в умовах тривалого сталого або багатоциклового силового навантаження. Показано, що для різних об'єктів і умов деформування величина додаткового ресурсу може становити як суттєві, так і малі проміжки часу. Таким чином, вирішення питань щодо продовження експлуатації об'єктів після локальної втрати несучої здатності потребує в кожному випадку окремих досліджень.

**Conclusions.** Developed in this paper methods for modelling of continual fracture process allows to determine the calculated and additional lifetime values for responsible structural elements that operate under long-term static and high-cycle loading. It is shown that for different objects and deformation conditions values of additional resources may be of significant and small intervals. Thus, the problem of extending the operation of units after local loss of bearing capacity needs further investigations in every case.

#### Список використаної літератури

1. Бобир, М.І. Пошкоджуваність та руйнування елементів конструкцій [Текст] / М.І. Бобир, А.П. Грабовський, О.П. Халімон. – К. : Наук. думка, 2009. – 392 с.
2. Голуб, В.П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости / В.П. Голуб // Прикл. механика. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 31 – 66.
3. Львов, Г.И. Ползучесть и длительная прочность компонентов газовых турбин с учетом неоднородного распределения температур [Текст] / Г.И. Львов, С.В. Лысенко, Е.Н. Гораш // Пробл. прочности. – 2008. – № 5. – С. 37 – 44.
4. Лелюх, Ю.И. О конечно-элементном решении пространственных задач термовязкоупругопластичности [Текст] / Ю.И. Лелюх, Ю.Н. Шевченко // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 16 – 25.
5. Никитенко, А.Ф. Оценка времени распространения фронта разрушения в элементах конструкций [Текст] / А.Ф. Никитенко // Пробл. прочности. – 2007. – № 6. – С. 13 – 24.
6. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел [Текст] / В.А. Баженов, А.И. Гулярь, А.С. Сахаров, А.Г. Топор. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
7. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: монографія [Текст] / В.А. Баженов, О.І. Гулярь, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
8. Напіваналітичний метод скінченних елементів у задачах динаміки просторових тіл: монографія [Текст] / В.А. Баженов, О.І. Гулярь, О.С. Сахаров, І.І. Солодей. – К.: КНУБА, 2012. – 248 с.
9. Сильверстов, И.Н. Расчет ресурса и длительной прочности с использованием критерия повреждаемости [Текст] / И.Н. Сильверстов. – Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – №6. – С. 116 – 118.

*Отримано 22.8.2013*