

I. Кузь. Одновісний розтяг пружно-пластичних пластин з квадратним отвором різної орієнтації / I. Кузь, О. Куз // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.52-59. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

I. Кузь<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; О. Кузь<sup>2</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка»

## ОДНОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ РІЗНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ

**Резюме.** На основі числового розв'язування крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваного матеріалу з урахуванням розвантаження з'ясовано вплив орієнтації квадратного отвору в пластині на її напружено-деформований стан за одновісного розтягу.

**Ключові слова:** пластина, квадратний отвір, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.

I. Kuz', O. Kuz'

## ONE-AXIS STRETCHING OF THE ELASTO-PLASTIC PLATES WITH SQUARE HOLE OF DIFFERENT ORIENTATION RELATIVELY THE AXIS OF STRETCHING

**Summary.** Effective numerical methods for solving 2D problems related to the theories of elasticity and plasticity have been worked out. The variation-difference method of building finite difference schemes is extended to domains with curvilinear boundaries and disconnected domains.

The application of the variation-difference method for solving problems of the theory of small elasto-plastic deformations relatively the plates with a hole, taking into account the linear strengthening of the material and unloading, has been developed. For solving the resultant systems of nonlinear and linear equation, the Newton-Kantorovich method and combined iterative method (gradient and cyclic Chebyshev's one) were proposed to be used. The choice of iteration parameters of the methods for solving the obtained systems of linear and nonlinear algebraic equations was made.

The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions, medium and domain parameters.

A variety of problems concerning one-axis stretching of the plates with the square hole of different orientation relatively the axis of stretching is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed, the remaining deformations and the limit loads are obtained.

The influence of the orientation of square hole in the plate onto the stress magnitude was found. The orientation of the hole does not make essential influence onto the shape of zones of generation and development of residual deformations, but it essentially impacts onto magnitudes of the components of the stress tensor and its intensity, and therefore the moment of the beginning of plastic deformation. That is, in a plate with rotated square hole the initial plastic deformations appear under the tension 45% less than in a non-rotated one.

**Key words:** plate, square hole, theory of small elastic-plastic deformations, linear strengthening, unloading, variation-difference method.

**Постановка проблеми.** Дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів конструкцій, послаблених отворами, є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій займають багатозв'язну область, мають скінченні розміри та часто перебувають в умовах допустимого пластичного деформування, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач теорії пластичності значно обмежена, а у більшості випадків і неможлива.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в багатозв'язних областях є варіаційно-різницевий метод із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в

області, складеній з прямокутників [1 – 3]. Проте врахування розвантаження у цих задачах та отримання полів залишкових деформацій дало б змогу краще з'ясувати напружено-деформований стан пластини та її міцність.

**Мета роботи.** З'ясувати вплив орієнтації квадратного отвору на напружено-деформований стан пружно-пластичної пластини з урахуванням зміцнення матеріалу та розвантаження.

**Постановка задачі та числовий метод її розв'язування.** Розглядається плоска задача деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у боготозв'язній області  $V$  з межею  $\Sigma$ , яка моделює напружено-деформований стан у пластині з квадратним отвором (рис. 2, 5). З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$\left( C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{k,l} \right)_{,j} = 0 \quad (1)$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні  $\Sigma$  ( $\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma$ )

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{k,l} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \quad (2)$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$\lambda(\varepsilon_u) = K - (2/3)\mu(\varepsilon_u), \quad \mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)). \quad (3)$$

Тут  $u_i, P_i^0, n_j$  – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні  $\Sigma_\sigma$  відповідно;  $\varepsilon_u$  – інтенсивність тензора деформацій ( $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ ;  $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}$ );  $K$  – модуль об'ємного стиску;  $\omega(\varepsilon_u)$  – функція пластичності Ільюшина [4];  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ . За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$v_1 = u_x(x, y), \quad v_2 = u_y(x, y), \quad v_3 = u_z \equiv 0. \quad (4)$$

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція  $\omega(\varepsilon_u)$  має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma)(\varepsilon_u - \varepsilon_s) / \varepsilon_u, & \varepsilon_u > \varepsilon_s; \\ 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\gamma \equiv \mu' / \mu$  – параметр зміцнення;  $2\mu \equiv \text{tg } \alpha$ ;  $2\mu' \equiv \text{tg } \alpha'$ .



Рисунок 1. Графік залежності  $\sigma_u \sim \epsilon_u$  для матеріалу з лінійним зміцненням

Figure 1. Graph of dependence  $\sigma_u \sim \epsilon_u$  for the material with linear strengthening

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \quad (6)$$

де компоненти тензорів  $e'_{ij}$  і  $s'_{ij}$  відповідають початку процесу розвантаження.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо різницевий аналог цієї задачі, причому будемо виходити з її варіаційної постановки, тобто використовуватимемо варіаційно-різницевий метод побудови різницевої схеми [5].

Оскільки область  $V$  є багатозв'язною, то використовуємо такі криволінійні координати  $\beta^1, \beta^2$ , що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (7)$$

переводить її в модельну область  $V_0$  (прямокутник розмірами  $l_1 \times l_2$  або область, складену з прямокутників). У цій області лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \vec{X} \cdot \vec{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\vec{\beta}) \vec{P}^0 \cdot \vec{v} d\Sigma, \quad (8)$$

де  $D^{ijkl} = C^{imkn}(\vec{\beta}) B_m^j B_n^l$ ,  $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$ ,  $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$ ,  $\sqrt{g} = \det \underline{A}$ ,

$$g(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

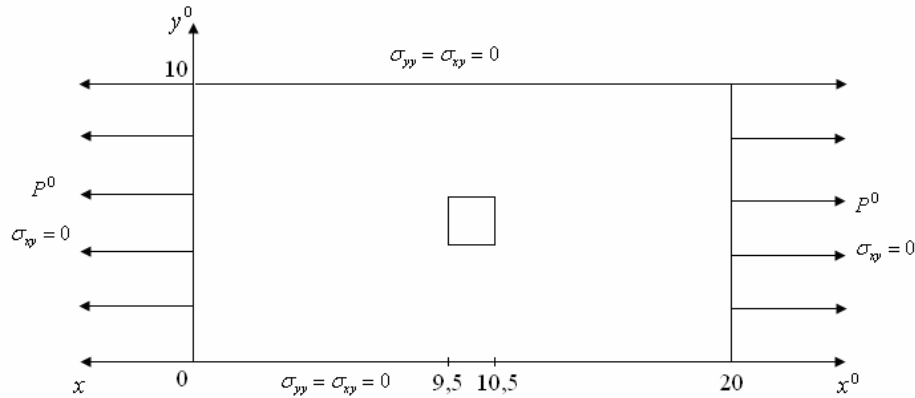
Замінивши у (8) всі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана  $L_0^h$  за допомогою дискретного аналога відображення (7), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в криволінійній  $V_1$  та в модельній  $V_0$  областях. Для визначення стаціонарної точки  $L_0^h$  матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{v}^h) + \vec{F}^h = 0, \quad (9)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона – Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів.

Описаний метод реалізований у вигляді пакета програм, який враховує різні крайові умови, параметри області та середовища. Цей пакет був розвинений на врахування розвантаження у пружно-пластичних задачах, а також проведено підбір ітераційних параметрів методів розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь (9).

**Результати числових досліджень.** На рис. 2 зображено геометрію пластини з крайовими умовами на зовнішній межі.



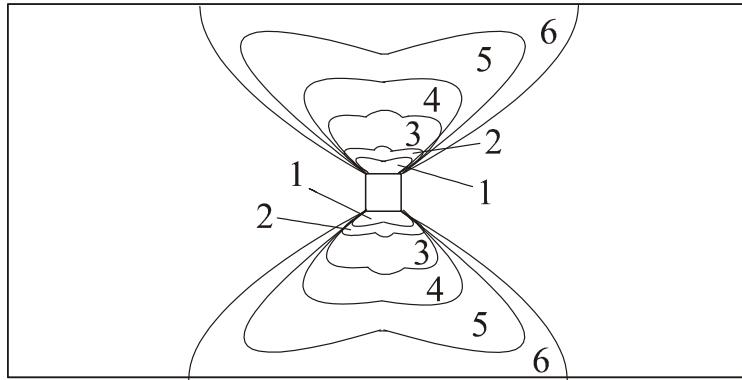
**Рисунок 2.** Пластина з квадратним отвором та крайовими умовами на зовнішній межі

**Figure 2.** Plate with the square hole and boundary conditions on the external border

Тут введені безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/l$  та  $y^0 \equiv y/l$ , де  $l$  – сторона квадратного отвору. Квадратний отвір є вільним від навантажень ( $\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$ ). До правого та лівого країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження  $\sigma_{xx}^0 = P^0 \equiv P/\sigma_s$ . Тут і надалі розрахунки проводились на сітці  $101 \times 51$  до зменшення початкової нев'язки  $\|\vec{P}(\vec{v}^0) + \vec{F}\|$  методу (9) у  $10^4$  разів.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень  $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$  можна з'ясувати області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також оцінити міцність пластини. Згідно з умовою течіння Губера – Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень  $\sigma_u^0$  досягає безрозмірної межі течіння  $\sigma_s^0 = 1$ . Згідно з критерієм міцності (найбільшої інтенсивності дотичних напружень) небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень  $\sigma_u^0$  досягає безрозмірної величини  $\sqrt{2/3}\sigma_B^0$ , де  $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$  – безрозмірна межа міцності [6].

На рис. 3 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для алюмінієвої пластини з квадратним отвором, зображеної на рис. 2 (модуль пружності  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,315$ ; параметр зміцнення  $\gamma = 0,1$  (див. рис. 1); межа течіння  $\sigma_s = 100$  МПа, межа міцності  $\sigma_B = 115$  МПа). Як бачимо з рис. 3, області пластичних деформацій розвиваються вертикально догори і вниз від верхньої та нижньої сторін отвору відповідно у формі, подібній на крила метелика.

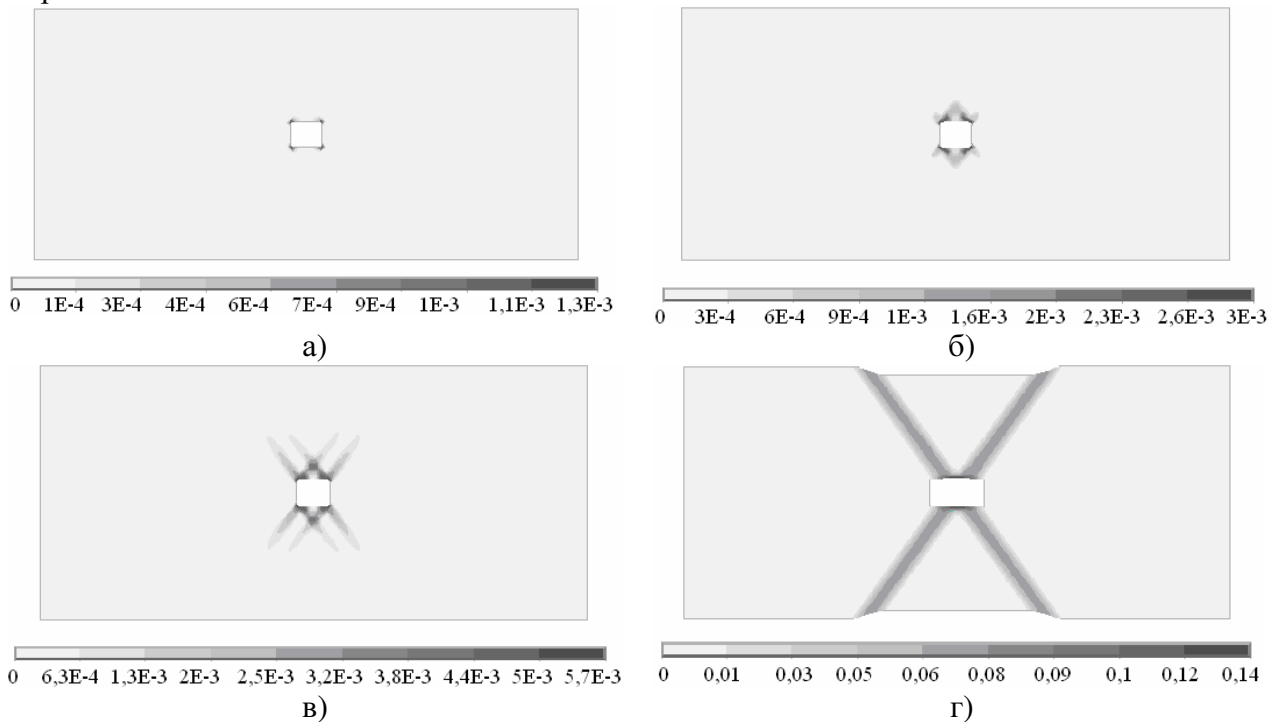


**Рисунок 3.** Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні  $P^0$  у пластині з квадратним отвором

**Figure 3.** Diagram of the plastic deformations development zones for step enlarging of the loading  $P^0$  in the plate with the square hole

На рис. 3 зона 1 побудована при  $P^0 = 0,632$ , зона 2 – при  $P^0 = 0,802$ , зона 3 – при  $P^0 = 0,852$ , зона 4 – при  $P^0 = 0,88$ , зона 5 – при  $P^0 = 0,895$ , зона 6 – при  $P^0 = 0,902$ .

На рис. 4 зображено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним отвором (див. рис. 2), попередньо навантаженого збільшеним навантаженням  $P^0$ . Також на цих рисунках бачимо, як буде деформуватися отвір і сама пластинка (див. рис. 4в, г) після розвантаження від покроково збільшеного значення  $P^0$ .



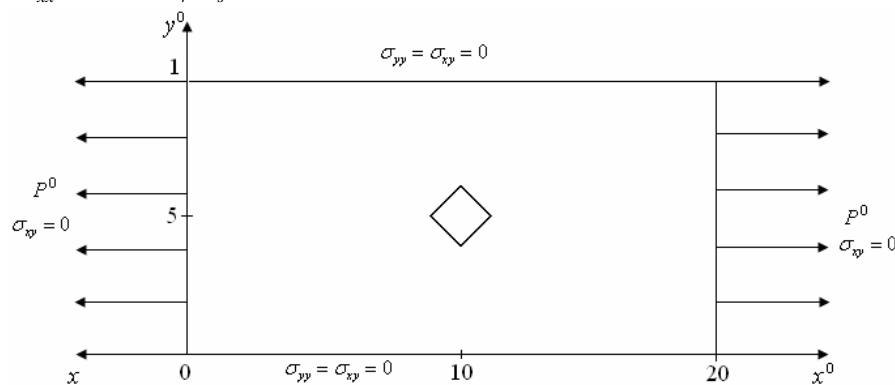
**Рисунок 4.** Діаграми інтенсивності тензора залишкових деформацій при:  
а)  $P^0 = 0,632$ ; б)  $P^0 = 0,802$ ; в)  $P^0 = 0,895$ ; г)  $P^0 = 0,902$  у пластині з квадратним отвором

**Figure 4.** Diagrams of intensity of the residual deformations tensor intensity at:  
а)  $P^0 = 0,632$ ; б)  $P^0 = 0,802$ ; в)  $P^0 = 0,895$ ; г)  $P^0 = 0,902$  in the plate with the square hole

Як бачимо з рис. 4а, залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження при  $P^0 = 0,632$  біля всіх вершин квадратного отвору.

При  $P^0 = 0,902$  у пластині з квадратним отвором на нижній та верхній сторонах отвору досягається межа міцності. На рис. 4г можна побачити, як може проходити руйнування пластини (вздовж темних ліній (можливі лінії ковзання) під кутом до верхньої та нижньої сторін отвору).

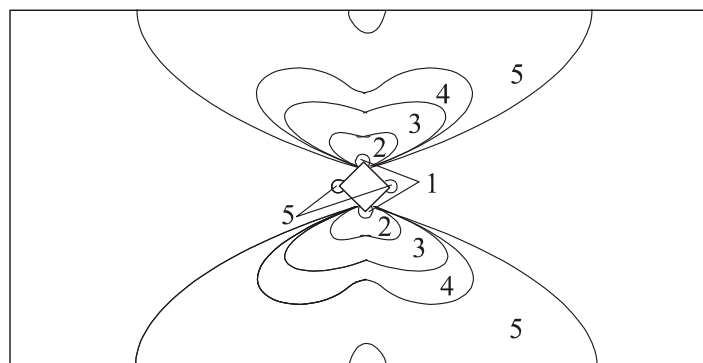
Тепер з'ясуємо, як впливає орієнтація отвору на напружений стан пластини. На рис. 5 зображено геометрію пластини з таким же за розміром квадратним отвором, як і на рис. 2, який, проте, повернутий на кут  $45^\circ$  щодо осі розтягу. Тут введені безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/l$  та  $y^0 \equiv y/l$ , де  $l$  – сторона квадратного отвору. Квадратний отвір є вільним від навантажень ( $\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$ ). До правого та лівого країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне горизонтальне розтягувальне напруження  $\sigma_{xx}^0 = P^0 \equiv P/\sigma_s$ .



**Рисунок 5.** Пластина з повернутим квадратним отвором та крайовими умовами на зовнішній межі

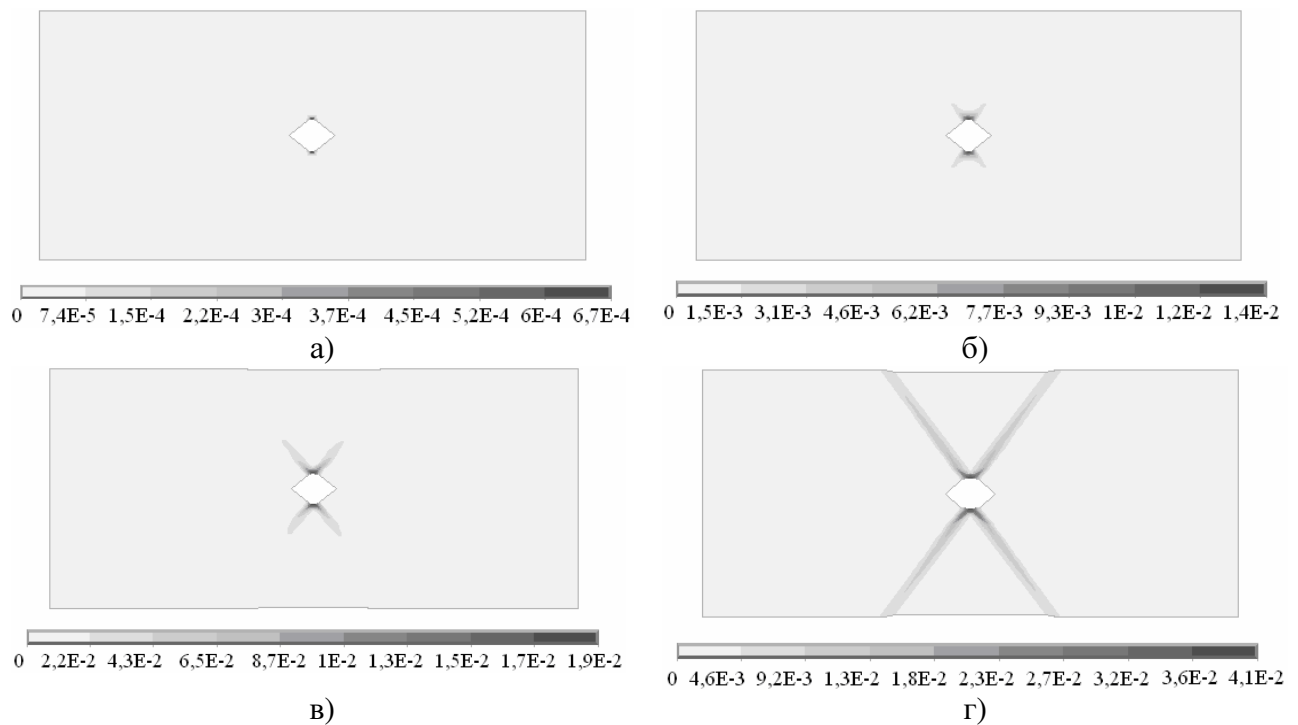
**Figure 5.** Plate with rotated square hole and boundary conditions on the external border

На рис. 6 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для алюмінієвої пластини з повернутим квадратним отвором, зображеної на рис. 5 (модуль пружності  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,315$ ; параметр зміцнення  $\gamma = 0,1$  (див. рис. 1); межа течіння  $\sigma_s = 100$  МПа; межа міцності  $\sigma_B = 115$  МПа). Як бачимо з рис. 6, області пластичних деформацій розвиваються вертикально вгору і вниз від верхньої та нижньої сторін отвору відповідно у формі, схожій на сердечка (подібно до пластини з неповернутим отвором).



**Рисунок 6.** Діаграма областей розвитку пластичних деформацій при покроковому збільшенні  $P^0$  у пластині з повернутим квадратним отвором

**Figure 6.** Diagram of the plastic deformations development zones under the step enlarging of the loading  $P^0$  in the plate with rotated square hole



**Рисунок 7.** Діаграми інтенсивності тензора залишкових деформацій при: а)  $P^0 = 0,348$ ; б)  $P^0 = 0,802$ ; в)  $P^0 = 0,859$ ; г)  $P^0 = 0,866$  у пластині з повернутим квадратним отвором

**Figure 7.** Diagrams of the residual deformations tensor intensity at:  
а)  $P^0 = 0,348$ ; б)  $P^0 = 0,802$ ; в)  $P^0 = 0,859$ ; г)  $P^0 = 0,866$  in the plate with rotated square hole

На рис. 6 зона 1 побудована при  $P^0 = 0,348$ , зона 2 – при  $P^0 = 0,604$ , зона 3 – при  $P^0 = 0,802$ , зона 4 – при  $P^0 = 0,859$ , зона 5 – при  $P^0 = 0,866$ .

На рис. 7 зображено розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з повернутим квадратним отвором (див. рис. 5) після щораз більшого рівня напруження  $P^0$ . Також на цих рисунках бачимо, як буде деформуватися отвір і сама пластинка (див. рис. 7г) внаслідок розвантаження після щораз більшого навантаження  $P^0$ .

Як бачимо з рис. 6 та 7а, внаслідок розвантаження перші пластичні деформації з'являються біля верхнього та нижнього кутів отвору ( $P^0 = 0,348$ ).

При  $P^0 = 0,866$  у пластині з повернутим квадратним отвором біля нижньої та верхньої вершин отвору досягається межа міцності. На рис. 7г можна побачити, як може проходити руйнування пластини (від верхнього та нижнього кутів отвору вздовж темних ліній (можливі лінії ковзання) під кутом до його верхньої та нижньої сторін пластини відповідно).

**Висновки.** З'ясовано вплив орієнтації квадратного отвору у пластині на величини напружень. Орієнтація отвору практично не впливає на форму зон зародження та розвитку залишкових деформацій, проте істотно впливає на величини компонент тензора напружень та його інтенсивність, а відтак і момент початку пластичного деформування. Зокрема, у пластині з повернутим квадратним отвором перші пластичні деформації з'являються за напруження на 45% меншого, ніж при неповернутому. Таким чином, отримані діаграми як активних, так і залишкових деформацій дають можливість виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм міцності оцінити міцність пластин з квадратним отвором різної орієнтації.

**Conclusions.** The influence of the orientation of square hole in a plate onto the stress magnitude is found out. The orientation of the hole does not make essential influence onto the shape of zones of generation and development of residual deformations, but it essentially impacts onto magnitudes of the components of the stress tensor and its intensity, and therefore the moment of the beginning of plastic deformation. That is, in a plate element with rotated square hole the initial plastic deformations appear under the tension 45% less than in a non-rotated one. Thus, the obtained diagrams of the intensity of the stress tensor allow us to find the domains of their maximal concentration and, under the respective strength criterion, to estimate the strength of plates with square hole of different orientation.

#### Список використаної літератури

1. Кузь, І. Числове розв'язування плоскої задачі деформаційної теорії пластичності про деформування металевго кутника [Текст] / І. Кузь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 203 – 209.
2. Кузь, І. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням [Текст] / І. Кузь, І. Тімар // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148 – 154.
3. Кузь, О. Напружено-деформований стан пружно-пластичної пластини з квадратним отвором або абсолютно жорстким включенням [Текст] / О. Кузь // Матер. наук.-практ. конф. «Математичне моделювання складних систем». Сер. фіз.-мат. та тех. науки. (Львів, 12 – 14 травня 2010р.). – Львів, 2010. – С. 88 – 89.
4. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории [Текст] / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
5. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
6. Божидарник, В.В. Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів: Світ, Т.1. – 1999. – 532 с., Т.2. – 1999. – 419 с.

*Отримано 25.05.2013*