

А.Власюк. Числове моделювання впливу тепло-масопере-несення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки / А.Власюк, Н.Федорчук // Вісник ТНТУ. — 2014. — Том 73. — № 1. — С.224-237. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

А. Власюк¹, докт. техн. наук; Н. Федорчук²

¹*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука*

²*Національний університет водного господарства та
природокористування*

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ВНАСЛІДОК УТВОРЕННЯ ДЕПРЕСІЙНОЇ ЛУНКИ

Резюме. Сформульовано постановку та проведено числове моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан (НДС) ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки. Реалізовано числове конформне відображення криволінійної складеної області, що містить область фільтрації та область сухого ґрунту, на параметричний прямокутник в оберненій постановці. Отримано числовий розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі НДС методом скінченних різниць. Використовуючи розроблене програмне забезпечення, проведено серію числових експериментів та здійснено їх аналіз.

Ключові слова: крайова задача, напружено-деформований стан, тепло-масоперенесення, депресійна лунка, вільна поверхня, числове конформне відображення, метод скінченних різниць.

A. Vlasyuk, N. Fedorchuk

NUMERICAL MODELLING OF HEAT AND MASS TRANSFER EFFECT ON THE STRESS-STRAINED STATE OF SOIL ARRAY AS A RESULT OF DEPRESSIONAL HOLE FORMATION

Summary. The statement was formulated and the numerical modelling of the mass-transfer effect on stress-strained state (SSS) of soil mass as a result of formation of the depressional hole was carried out. The numerical conformal mapping of curvilinear composite area containing the area of filtration and the area of dry ground on parametric rectangle in inverse statement was constructed. The mathematical model of the ground array SSS taking into account the influence of heat and mass transfer in a complex area was set. The numerical results of corresponding two-dimensional regional task of SSS have been obtained by the method of finite differences with the use of numerical conformal mappings. For the numerical decision this task is carried out in the integrated environment of the object oriented programming of Visual Studio 2012 in programming of C# language. The series of numerical experiments have been carried out and results are presented as charts of distribution of the fields of displacements, tensions, deformations and also pressure concentration of salts and temperature. The analysis of the obtained results was carried out.

It is shown that taking into account the processes of heat and mass transfer in the water saturated area of the ground array and process of heat transfer in the area of soil in the natural state changes distribution of displacements, deformations and tensions, that is, displacement in the water saturated area of the ground array at taking into account the heat and mass transferring, are increased greatly comparing with the corresponding values of displacements during filtration of clean water and absence of processes of heat and mass transfer; in the area of soil in the natural state of displacement heat and mass transfer exceeds the corresponding values of displacements without heat and mass transfer; distribution of deformations considerably grows in the water saturated area and grows a little in the area of natural soil; distribution of tensions increases in the area of free surface of underground waters.

Taking into account processes of heat and mass transfer in investigated area the greatest displacements are observed in water saturated soil and free underground waters. Deformations reach maximum values in the area of free underground waters and the lower part of the researched area. The maximum values of tensions are observed in the area of free underground waters and within the boundaries of the researched area.

Key words: boundary value problem, stress-strained state, heat and mass transfer, depressional hole, free surface, numerical conformal mapping, method of finite differences.

Умовні позначення:

НДС – напружено-деформований стан;
 $\mathbf{u} = (U, V)$ – вектор зміщень;
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформації;
 $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень;
 $c(x, y, t)$ – концентрація сольового розчину;
 $T(x, y, t)$ – температура;
 $h(x, y, t)$ – п'єзометричний напір;
 X, Y – компоненти масової сили;
 $\lambda(c, T), \mu(c, T)$ – коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації сольового розчину та температури;
 $E(c, T)$ – модуль Юнга, що залежить від концентрації сольового розчину та температури;
 ν – коефіцієнт Пуассона;
 $\mathbf{D}, \mathbf{D}_T, \lambda_T, \mathbf{K}, \mathbf{v}_c, \mathbf{v}_T$ – тензори коефіцієнтів конвективної дифузії, термодифузії, ефективної теплопровідності вологого ґрунту, фільтрації, хімічного та термічного осмосів відповідно;
 \mathbf{v} – вектор швидкості фільтрації сольового розчину;
 \mathbf{q}_T – вектор потоку тепла;
 \mathbf{n} – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області;
 γ – константа швидкості масообміну;
 C_m – концентрація граничного насичення;
 n_p – пористість ґрунту;
 ρ, c_p – густина та питома теплоємність порового розчину;
 c_T – питома теплоємність ґрунту при сталому об'ємі;
 α_T – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур (T_0, T) ;
 a – коефіцієнт гідропружності.

Постановка проблеми. В даний час дедалі більшого значення набуває розвиток промисловості, гідроенергетичного та цивільного будівництва. В зв'язку з цим зростає вплив техногенних факторів на навколишнє середовище. Зокрема, відбувається забруднення ґрунтів та ґрунтових вод різними хімічними речовинами та відходами виробництва. На поведінку ґрунтових основ також може впливати і температурний режим, основними причинами зміни якого можуть бути сезонні та добові коливання температур, захоронення відходів виробництва та ін. Вищеописані фактори найчастіше стають причиною порушення несучої здатності ґрунтових основ, а відповідно – зміни їх напружено-деформованого стану.

При будівництві міст, особливо промислових комплексів, може значно змінюватися положення вільної поверхні ґрунтових вод. Як правило, з розвитком міста й у процесі експлуатації промислових підприємств у місцях високого знаходження ґрунтових вод спостерігається їх зниження, і, навпаки, в районах глибокого знаходження ґрунтових вод або їх відсутності спостерігається поява й підвищення рівня ґрунтових вод. Рух вільної поверхні ґрунтових вод призводить до виникнення різноманітних об'ємних сил і відповідно – до зміни напружено-деформованого стану ґрунтового масиву.

Про важливість проблеми дослідження НДС ґрунтових основ у складних гідрогеологічних умовах також свідчить статистика аварій споруд, що побудовані на таких ґрунтах.

Яскравим прикладом є проблема водозабору. При відкачуванні води із дренажної щілини змінюється положення кривої депресії й утворюється депресійна

лунка, внаслідок чого змінюється НДС в оточуючому масиві ґрунту. Це може призвести до осідання земної поверхні, утворення тріщин у ній та порожнин.

Враховуючи вищесказане, актуальною задачею є числове моделювання та дослідження НДС ґрунтових масивів із урахуванням процесів тепло-масоперенесення й наявності вільної поверхні ґрунтових вод.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача дослідження НДС ґрунтів при врахуванні фільтрації чистої води та без неї досліджена та описана в працях [1, 2]. В роботі [3] вперше розв'язано одновимірну задачу НДС нескінченного шару ґрунту з урахуванням впливу масоперенесення при фільтрації сольових розчинів. Дослідженням задач НДС ґрунтових масивів за наявності переносу солей фільтраційними потоками в ізотермічних умовах та наявності вільної поверхні ґрунтових вод присвячені роботи [4–7]. Однак питання оцінювання НДС ґрунтових масивів при врахуванні фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, впливу тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні ґрунтових вод недостатньо вивчене.

Метою даної роботи є постановка задачі та удосконалення математичної моделі НДС ґрунтового масиву при утворенні депресійної лунки з урахуванням процесів тепло-масоперенесення; побудова числового конформного відображення досліджуваної області; формулювання математичної моделі задачі НДС ґрунтового масиву в комплексній області та її числового розв'язання методом скінченних різниць із використанням числових конформних відображень; отримання результатів числових експериментів у вигляді графіків розподілу полів зміщень, напружень, деформацій, а також напору, концентрації солей та температури; аналіз впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву за наявності вільної поверхні ґрунтових вод.

Постановка задачі. Розглядається задача моделювання процесу інтенсивної відкачки ґрунтових вод на укосі при плоско-вертикальній безнапірній фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах за наявності рухомої вільної поверхні (рис.1).

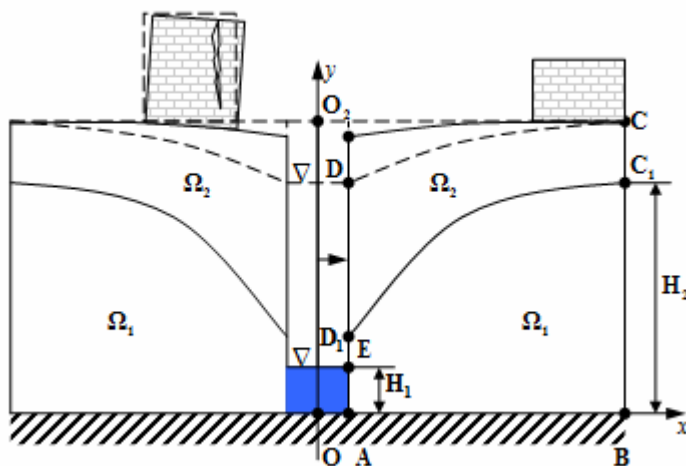


Рисунок 1. Розрахункова схема до прогнозування осідання земної поверхні при зниженні вільної поверхні ґрунтових вод у результаті відкачування рідини із дренажної щілини

Figure 1. Calculation scheme for prediction of land surface subsidence on the decreased free surface of ground waters resulting from the pumping out of liquid from the drainage crack

На рис.1 введені такі позначення: Ω_1 – область водонасиченого ґрунту; Ω_2 – область ґрунту в природному стані. Задані значення п'езометричних напорів \tilde{H}_1 та \tilde{H}_2 у лівому (AE) та правому (BC₁) водних басейнах відповідно, причому $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$. У правому басейні задано значення концентрації солей \tilde{C}_1 , а в лівому – умову швидкого виносу солей. Значення температури задані в лівому та правому водних басейнах \tilde{T}_1 та \tilde{T}_2 відповідно ($\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$), а також на границях області ґрунту, що знаходиться в

природному стані ($DC \cup CC_1$, D_1D) та проміжку височування (ED_1) – \tilde{T}_3 , \tilde{T}_4 та \tilde{T}_5 відповідно.

Під впливом градієнтів напору, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є. Нижня основа ґрунтового масиву (AB) вважається теплоізолюваною та непроникною.

НДС досліджується в рамках лінійної теорії пружності, що описується рівняннями Ламе.

Необхідно розрахувати значення зміщень, напружень, деформацій та розподіл поля температури у водонасиченій області ґрунтового масиву та в області ґрунтового масиву, що знаходиться в природному стані, а також розрахувати розподіл поля напору та концентрації солей у водонасиченій області за умови, що відсутні зміщення нижньої основи ґрунтового масиву.

Математична модель задачі в змінних x , y фізичної області. Математичну модель задачі НДС ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки з урахуванням впливу тепло-масоперенесення в двовимірному випадку можна описати такою крайовою задачею [1–11]:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \right. \\ & \left. + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} = X, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \mu(c, T)\Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \right. \\ & \left. + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \frac{\partial T}{\partial y} = Y, \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T)\nabla c) - \mathbf{v}\nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_1(t), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T\nabla T) - \rho c_p \mathbf{v}\nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T)\nabla h - \mathbf{v}_c(c)\nabla c - \mathbf{v}_T\nabla T) = a \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_1(t), \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T)\text{grad}h + \mathbf{v}_c(c)\text{grad}c + \mathbf{v}_T\text{grad}T, \quad \text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{v}T - \lambda_T\nabla T, \quad (6)$$

$$(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{n}})|_{C_1D_1} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi(x, y, t) = (y - h(x, y, t))|_{C_1D_1} = 0, \quad h|_{C_1D_1 \cup D_1E} = y, \quad (7)$$

$$u_n = u_s = 0, \quad (x, y) \in AB, \quad (8)$$

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad (x, y) \in AE \cup ED_1 \cup BC_1 \cup D_1D \cup C_1C \cup CD, \quad (9)$$

$$[u_n] = [u_s] = 0, [\sigma_n] = [\tau_s] = 0, (x, y) \in C_1 D_1, \quad (10)$$

$$l_1 h(x, y, t)|_{\Gamma_T} = \tilde{H}_1(x, y, t), l_2 c(x, y, t)|_{\Gamma_T} = \tilde{C}_1(x, y, t), l_3 T(x, y, t)|_{\Gamma_T} = \tilde{T}_1(x, y, t), (x, y, t) \in \Gamma_T, \quad (11)$$

$$[T]|_{C_1 D_1} = 0, [q_T]|_{C_1 D_1} = 0, \quad (12)$$

$$h(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), (x, y) \in \Omega_1(t), \quad (13)$$

$$T(x, y, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(x, y), (x, y) \in \Omega_i(t), i = \overline{1, 2}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T}\theta, \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \alpha_T \bar{T}\theta, \quad (15)$$

де $(x, y) \in \Omega$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $l_i, i = \overline{1, 3}$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно для напору, концентрації солей та температури на бічній поверхні Γ_T циліндра $Q_T = \Omega \times (0; T]$; t – час, $t > 0$; $\theta = \frac{E(c, T)}{1-\nu}$, $\bar{T} = T - T_0$.

Тут: (1) – система рівнянь НДС для масиву ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах з урахуванням тепло-масоперенесення для водонасиченого ґрунту та теплоперенесення для ґрунту в природному стані; (2), (3) – описують сольовий та тепловий режими ґрунтового масиву; (4), (5) – задача фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах; (6) – закон Фур'є. Співвідношення (7) задають вільну поверхню $C_1 D_1$. Крайові умови та умови спряження ідеального контакту для зміщень та температури, а також крайові умови для напору та концентрації солей мають вигляд (8) – (14) відповідно; (15) – деформації та напруження з урахуванням неізотермічного режиму.

Математична модель задачі в змінних ξ, η області параметричного прямокутника. Для числового розв'язання задачі (1) – (15) використано метод скінченних різниць із застосуванням числових конформних відображень в оберненій постановці [12, 13]. У зв'язку з цим здійснено числове конформне відображення області Ω площини (x, y) (рис.2) на параметричний прямокутник Ω_ζ площини (ξ, η) (рис.3).

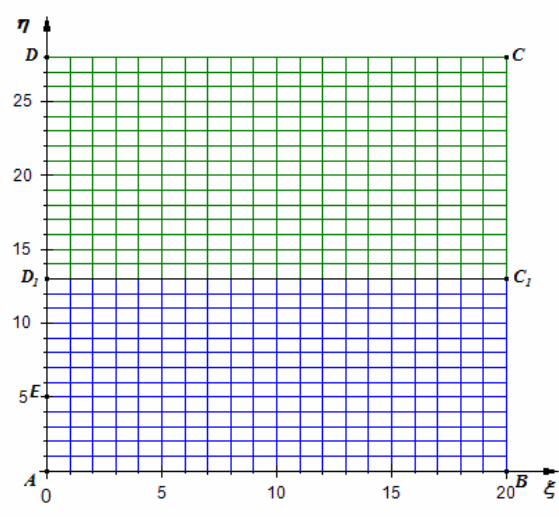
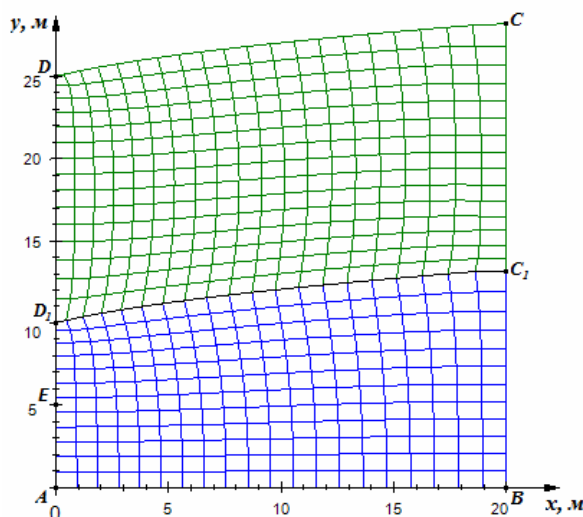


Рисунок 2. Конформна різницева сітка у фізичній області

Figure 2. Conformal differential network in physical area

Рисунок 3. Образ конформної різницевої сітки в параметричному прямокутнику

Figure 3. Image of conformal differential network in parametric rectangle

Координати точок областей Ω і Ω_ζ при оберненому конформному відображенні зв'язані умовами Коші-Рімана [12, 13]

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (16)$$

На сторонах параметричного прямокутника Ω_ζ і кривій депресії C_1D_1 задані такі крайові умови:

$$\begin{aligned} x(0, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in AE \cup ED_1 \cup D_1D, \\ x(a_1, \eta) &= a, \quad (\xi, \eta) \in BC_1 \cup C_1C, \\ y(\xi, 0) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in AB, \\ y(\xi, b_1) &= f(t), \quad (\xi, \eta) \in CD, \\ y(\xi, b_0) &= h, \quad (\xi, \eta) \in C_1D_1, \end{aligned}$$

де $f(t)$ – деяка функція, що характеризує процес просідання верхньої межі ґрунту; h – значення п'єзометричного напору на вільній межі (кривій депресії) C_1D_1 .

При конформному відображенні областей маємо такий зв'язок між похідними:

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{y_\eta}{J_1}, & \eta_x = \frac{-y_\xi}{J_1}, \\ \xi_y = \frac{-x_\eta}{J_1}, & \eta_y = \frac{x_\xi}{J_1}, \\ \xi_t = -x_{\bar{t}}\xi_x - \xi_y y_{\bar{t}}, & \eta_t = -x_{\bar{t}}\eta_x - \eta_y y_{\bar{t}}, \end{cases} \quad (17)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{J_1},$$

де J, J_1 – якобіани прямого та оберненого відображень відповідно, $J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

На основі (17) отримуємо аналогічні зв'язки для других похідних $\xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$.

Перетворені рівняння НДС системи (1) у змінних ξ, η області параметричного прямокутника при залежності коефіцієнтів Ламе від концентрації фільтруючого розчину та температури набудуть вигляду

$$P_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + P_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + P_3 \frac{\partial U}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial U}{\partial \eta} + P_5 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(V, T), \quad (18)$$

$$L_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + L_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + L_3 \frac{\partial V}{\partial \xi} + L_4 \frac{\partial V}{\partial \eta} + L_5 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = F_2(U, T),$$

де $P_i, L_i, i=1,5, F_1(V, T), F_2(U, T)$ – відомі функції коефіцієнтів $\lambda(c, T), \mu(c, T)$ та похідних функцій $\lambda(c, T), \mu(c, T), x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ по змінних ξ, η .

Рівняння масоперенесення в неізотермічних умовах (2) при перетворенні до змінних ξ, η області параметричного прямокутника набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + Q_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + Q_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} + Q_3(c - C_m) + Q_4 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) = Q_5 \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}}, \quad (19)$$

де

$$Q_1 = -\frac{1}{D(c, T)} [(\bar{V}_1 - n_p x_{\tilde{t}}) y_{\eta} - (\bar{V}_2 - n_p y_{\tilde{t}}) x_{\eta}], \quad Q_2 = -\frac{1}{D(c, T)} [(-\bar{V}_1 + n_p x_{\tilde{t}}) y_{\xi} + (\bar{V}_2 - n_p y_{\tilde{t}}) x_{\xi}],$$

$$Q_3 = \frac{-J_1 \gamma}{D(c, T)}, \quad Q_4 = \frac{D_T(c, T)}{D(c, T)}, \quad Q_5 = \frac{n_p J_1}{D(c, T)},$$

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{J_1} \left[\left(k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \eta} \right) y_{\xi} - \left(k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \xi} \right) y_{\eta} + v_c \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_T \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial T}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right],$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{J_1} \left[-\left(k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \eta} \right) x_{\xi} + \left(k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \xi} \right) x_{\eta} + v_c \left(-\frac{\partial c}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_T \left(-\frac{\partial T}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial T}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \right].$$

Рівняння теплоперенесення (3) при перетворенні до змінних ξ, η області параметричного прямокутника набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + Z_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + Z_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} = Z_3 \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}}, \quad (20)$$

де

$$Z_1 = -\frac{1}{\lambda_T} \left[(\tilde{V}_1 - c_T x_{\tilde{T}}) y_{\eta} - (\tilde{V}_2 - c_T y_{\tilde{T}}) x_{\eta} \right], \quad Z_2 = -\frac{1}{\lambda_T} \left[(\tilde{V}_2 - c_T y_{\tilde{T}}) x_{\xi} - (\tilde{V}_1 + c_T x_{\tilde{T}}) y_{\xi} \right], \quad Z_3 = \frac{J_1 c_T}{\lambda_T},$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 = \frac{1}{J_1} & \left[\left(\rho c_{\rho} k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial \eta} \right) y_{\xi} - \left(\rho c_{\rho} k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial \xi} \right) y_{\eta} + \right. \\ & \left. + v_c \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_T \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial T}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 = \frac{1}{J_1} & \left[- \left(\rho c_{\rho} k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial \eta} \right) x_{\xi} + \left(\rho c_{\rho} k(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial \xi} \right) x_{\eta} + \right. \\ & \left. + v_c \left(- \frac{\partial c}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_T \left(- \frac{\partial T}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial T}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Фільтрація підземних вод у ґрунтовому масиві в змінних ξ , η описується крайовою задачею

$$A_h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + B_h \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + C_h \frac{\partial h}{\partial \xi} + D_h \frac{\partial h}{\partial \eta} + A_c \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + B_c \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + A_T \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + B_T \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0, \quad (21)$$

де A_h , B_h , C_h , D_h , A_c , B_c , A_T , B_T – деякі відомі коефіцієнти.

Компоненти вектора швидкості фільтрації при перетворенні до нових змінних ξ , η області параметричного прямокутника будуть мати вигляд

$$v_1(c, T) = \frac{1}{J_1} \left[-k_1(c, T) \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_{c_1} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_{T_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial T}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right], \quad (22)$$

$$v_2(c, T) = \frac{1}{J_1} \left[-k_2(c, T) \left(- \frac{\partial h}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_{c_2} \left(- \frac{\partial c}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_{T_2} \left(- \frac{\partial T}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial T}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \right]. \quad (23)$$

У змінних ξ , η деформації та напруження (15) матимуть вигляд

$$\varepsilon_x = \frac{1}{J_1} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} y_{\xi} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{J_1} \left(- \frac{\partial V}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} x_{\xi} \right), \quad (24)$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta. \quad (25)$$

Аналогічно перетворюються крайові умови та умови спряження для зміщень і температури, а також крайові умови для напору та концентрації солей при переході до змінних ξ , η відповідно.

Для побудови різницевих схем розглянутої вище крайової задачі побудовано числове конформне відображення області Ω_{ξ} на область Ω , використовуючи розроблений в [12, 13] алгоритм. У результаті реалізації такого відображення (рис.2,

рис.3) обчислено значення координат $(x_{i_1, i_2}, y_{i_1, i_2})$, $i_1 = \overline{0, m_1}$, $i_2 = \overline{0, m_2}$ отриманої різницевої сітки як прообразів точок (ξ_{i_1}, η_{i_2}) , $i_1 = \overline{0, m_1}$, $i_2 = \overline{0, m_2}$ параметричного прямокутника у вигляді двох двовимірних масивів.

Для розв'язку системи рівнянь (18) та для знаходження наближених значень п'єзометричного напору з розв'язку відповідної крайової задачі фільтрації (21) використано метод Гауса-Зейделя. Для розв'язку задач масоперенесення в неізотермічних умовах (19) і теплоперенесення (20) використано локально-одновимірний метод О.А. Самарського [14] з використанням монотонної різницевої схеми. Значення концентрації солей та температури отримано методом прогонки.

Програмна реалізація та результати числових експериментів. Розглянуто приклад моделювання НДС ґрунтового масиву протяжністю 20м та висотою 28м із урахуванням перенесення солей фільтраційним потоком у неізотермічних умовах за наявності вільної поверхні ґрунтових вод. Тип ґрунтового масиву – суглинок.

Для числового розв'язання поставленої крайової задачі здійснено програмну реалізацію в інтегрованому середовищі об'єктно-орієнтованого програмування Visual Studio 2012 мовою програмування C #.

Створена програма є комплексом розв'язування таких задач: побудова числового конформного відображення області, що складається із області водонасиченого ґрунту, в якому відбуваються процеси фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах, а також процеси тепло-масоперенесення, і області ґрунту в природному стані, в якому відбувається процес теплоперенесення; розв'язок задачі фільтрації, знаходження розподілу поля напору та концентрації сольових розчинів у області водонасиченого ґрунту, а у всій області дослідження – знаходження розподілу поля температури, розрахунку поля зміщень, деформацій та напружень; побудова графічних зображень отриманих числових результатів.

На основі програмної реалізації задачі були проведені числові експерименти з такими вихідними даними:

$$n = 0,4, \quad D = 2 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{\text{доба}}, \quad D_T = 2 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{\text{доба}}, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{kg}{m^3},$$

$$c_\rho = 4,2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{kg \cdot \text{град}}, \quad c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{Дж}{m^3 \cdot \text{град}}, \quad \gamma_{зс} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{Па}{m}, \quad \gamma_{np} = 1,7 \cdot 10^4 \frac{Па}{m},$$

$$\lambda_T = 108 \cdot 10^3 \frac{Дж}{m \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \quad \lambda_1 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \lambda_2 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\mu_1 = 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad E_1 = 2,34 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\nu_c = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{m^{-5}}{kg \cdot \text{доба}}, \quad \nu_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \tilde{C}_1(t) = 350 \frac{e}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_1(t) = 5^0 C,$$

$$\tilde{T}_2(t) = 25^0 C, \quad \tilde{T}_3(t) = 25^0 C, \quad \tilde{T}_4(t) = 5^0 C, \quad \tilde{T}_5(t) = 5^0 C, \quad \tilde{H}_1 = 5 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2 = 13 \text{ м},$$

$$\tilde{C}_0(x) = 8 \frac{e}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_0^1(x) = 5^0 C, \quad \tilde{T}_0^2(x) = 5^0 C.$$

Значення залежностей $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$ і $K(c, T)$ взяті аналогічно як у роботах [6, 10, 15, 16]. Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію числових експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при $t = 1080$ діб.

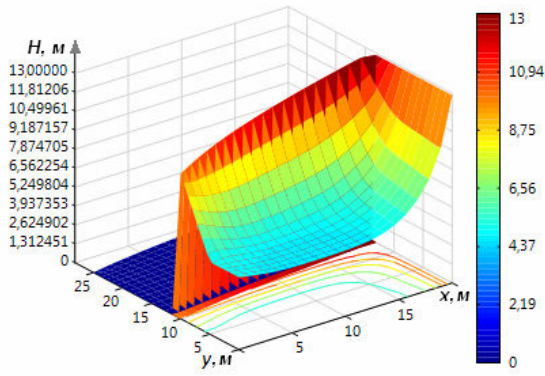


Рисунок 4. Графік розподілу поля п'єзометричного напору з урахуванням фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах

Figure 4. Graph of distribution of the field of piezometer pressure taking into account filtration of salt solutions in unisothermal conditions

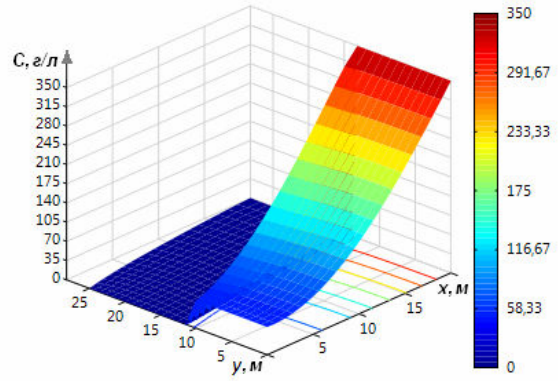


Рисунок 5. Графік розподілу поля концентрації солей у неізотермічних умовах

Figure 5. Graph of distribution of the field of salts concentration in unisothermal conditions

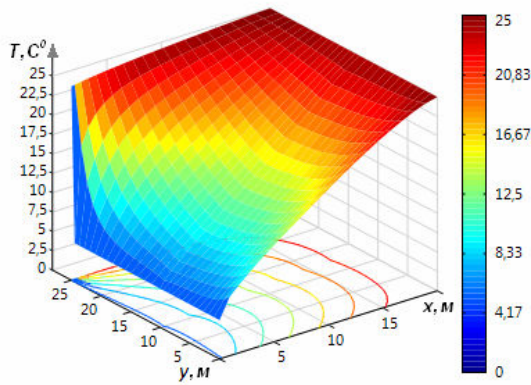


Рисунок 6. Графік розподілу поля температури при фільтрації сольових розчинів

Figure 6. Graph of distribution of the field of temperature during filtration of salt solutions

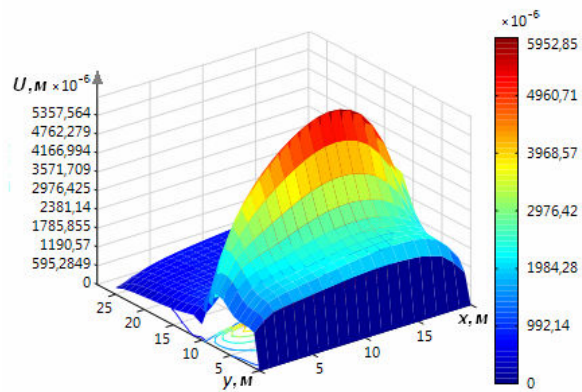


Рисунок 7. Графік розподілу поля змішень уздовж осі Ox із урахуванням тепло-масоперенесення

Figure 7. Graph of distribution of the field of displacements along the axis Ox taking into account heat and mass transferring

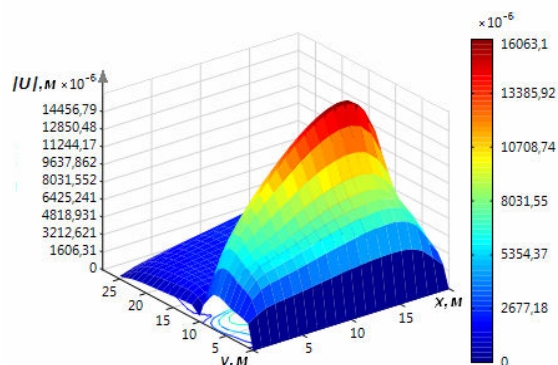
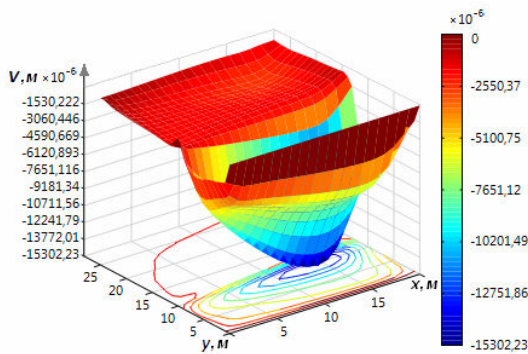


Рисунок 8. Графік розподілу поля зміщень уздовж осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

Figure 8. Graph of distribution of the field of displacements along the axis Oy taking into account heat and mass transferring

Рисунок 9. Графік розподілу поля модуля вектора зміщень із врахуванням тепло-масоперенесення

Figure 9. Graph of distribution of the field of displacements vector module taking into account heat and mass transferring

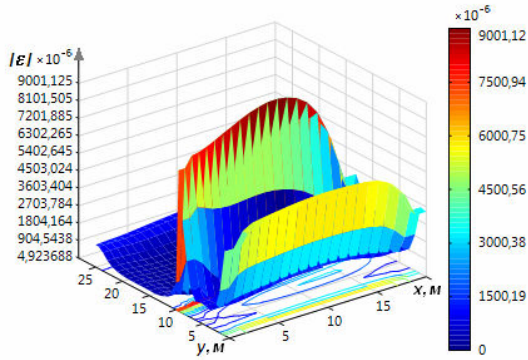


Рисунок 10. Графік розподілу поля модуля деформацій із урахуванням тепло-масоперенесення

Figure 10. Graph of distribution of the field of the module of deformations taking into account heat and mass transferring

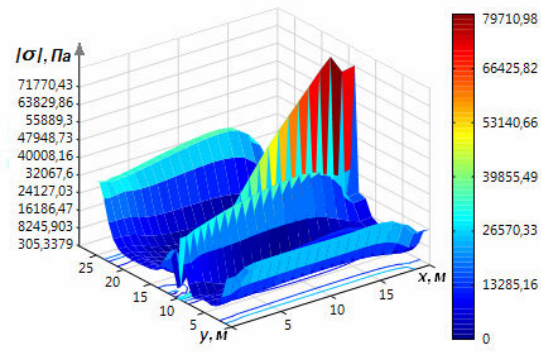


Рисунок 11. Графік розподілу поля модуля напружень із урахуванням тепло-масоперенесення

Figure 11. Graph of distribution of the field of the module of tensions taking into account heat and mass transferring

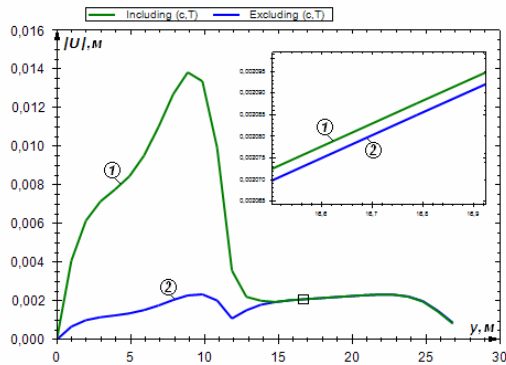


Рисунок 12. Графік розподілу модуля вектора зміщень $|U|$ уздовж осі Oy з урахуванням тепло-масоперенесення ① та без урахування тепло-масоперенесення ② у площині перерізу $x = 10\text{ м}$

Figure 12. Graph of distribution of displacements vector module $|U|$ along the axis Oy taking into account heat and mass transferring ① and without consideration of heat and mass transferring ② of inplane cut $x = 10\text{ m}$

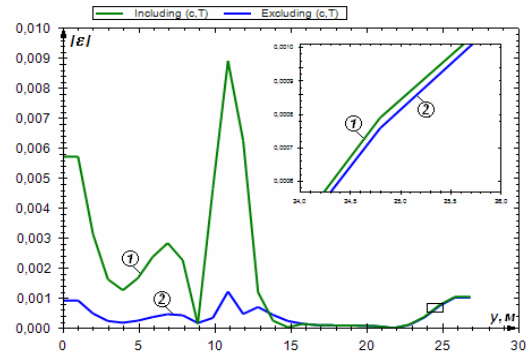


Рисунок 13. Графік розподілу модуля деформацій $|\epsilon|$ уздовж осі Oy з урахуванням тепло-масоперенесення ① та без урахування тепло-масоперенесення ② у площині перерізу $x = 10\text{ м}$

Figure 13. Graph of distribution of module displacements $|\epsilon|$ along the axis Oy taking into account heat and mass transferring ① and without consideration of heat and mass transferring ② of inplane cut $x = 10\text{ m}$

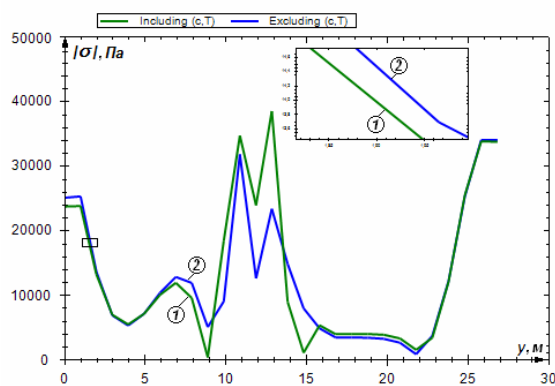


Рисунок 14. Графік розподілу модуля напружень $|\sigma|$ уздовж осі Oy з урахуванням тепло-масоперенесення ① та без урахування тепло-масоперенесення ② у площині перерізу $x = 10$ м

Figure 14. Graph of distribution of module displacements $|\sigma|$ along the axis Oy taking into account heat and mass transfer ① and without consideration of heat and mass transfer ② of inplane cut $x = 10$ m

Обговорення результатів. Аналізуючи графіки розподілу полів зміщень (рис.7 – рис.9), можна зробити висновок, що найбільшим значенням зміщень підлягають області водонасиченого ґрунту та вільної поверхні ґрунтових вод. Це можна пояснити наявністю у водонасиченому ґрунті фільтраційного потоку та тепло-масоперенесення. З рис.12 бачимо, що зміщення у водонасиченій області ґрунтового масиву при врахуванні тепло-масоперенесення значно збільшуються в порівнянні з відповідними значеннями зміщень при фільтрації чистої води та відсутності процесів тепло-масоперенесення. В області ґрунту в природному стані зміщення з урахуванням теплоперенесення теж перевищують відповідні значення зміщень без урахування теплоперенесення. Деформації (рис.10, рис.13) досягають максимальних значень в області вільної поверхні ґрунтових вод та нижньої межі досліджуваної області. Як бачимо з рис.11, рис.14, максимальні значення напружень спостерігаються в області вільної поверхні ґрунтових вод та на межах розглядуваної області. Врахування процесів тепло-масоперенесення у водонасиченій області ґрунтового масиву та процесу теплоперенесення в області ґрунту в природному стані змінює розподіл деформацій та напружень (рис.13, рис.14), а саме: розподіл деформацій значно зростає у водонасиченій області й дещо зростає в області природного ґрунту; розподіл напружень збільшується в області вільної поверхні ґрунтових вод. Таким чином, тепло-масоперенесення суттєво впливає на деформаційні характеристики ґрунтового масиву.

Висновки. Сформульовано постановку та проведено числове моделювання задачі НДС ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки з урахуванням тепло-масоперенесення та фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах. Побудовано числове конформне відображення криволінійної області дослідження, що містить область фільтрації та область ґрунту в природному стані, на параметричний прямокутник в оберненій постановці. Отримано числовий розв'язок поставленої крайової задачі. На основі розробленого програмного забезпечення проведено числові експерименти, результати яких наведено у вигляді графіків. Здійснено аналіз отриманих результатів. Показано, що врахування процесів тепло-масоперенесення суттєво впливає на деформаційні характеристики ґрунтового масиву. Це дало можливість спрогнозувати осідання земної поверхні, оцінити зміну НДС, несучу здатність ґрунтового масиву і стійкість споруд, що знаходяться на даній поверхні.

Conclusions. The paper formulated the statement and carried out the numerical modelling of SSS problem of soil mass as a result of formation of the depressed hollow taking into account heat and mass transfer and filtration of salt solution in unisothermal conditions.

The numerical conformal mapping of curvilinear composite area containing the area of filtration and the area of dry ground on parametric rectangle in inverse statement has been constructed. The numerical solution of stated regional boundary value problem by the method of finite differences has been obtained. On the basis of the developed software a series of numeral experiments was conducted whose results are presented in figures. The results of analysis are carried out. It is shown that taking into account of processes of heat and mass transfer substantially influences on deformation descriptions of the soil masses. It makes possible to predict the subsidence of land surface, to evaluate SSS change and the carrying capability of soil mass and the stability of structures situated on this surface.

Список використаної літератури

1. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 1991. – 432с.
2. Дейнека, В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения [Текст] / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наукова думка, 1998.–615с.
3. Власюк, А.П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення [Текст] / А.П. Власюк, Є.І.Катерина / Вісник Львів. ун-ту. Сер. «Прикл. матем. та інформ.», 1999. – Вип.1. – С. 50–55.
4. Власюк, А.П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки [Текст] / А.П. Власюк // Вісник РДТУ. – Рівне. – Вип. 3(5). – Ч.2. – 2000. – С. 57–62.
5. Кузло, М.Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод [Текст] / М.Т. Кузло, І.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2005. – Вип. 2(30). – С. 282–287.
6. Кузло, М.Т. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів [Текст] / М.Т. Кузло, І.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2006. – Вип. 4(36). – Ч.2. – С. 209–214.
7. Філатова, І.А. Математичне моделювання НДС багатопарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод [Текст] / І.А. Філатова // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. науки. – Вип. 1. – 2008. – С. 161–165.
8. Федорчук, Н.А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод [Текст] / Н.А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: «Технічні науки»: зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова Нац. акад. наук України, Кам.-Под. нац. ун-т ім. І. Огієнка. – Кам'янець-Подільський: Кам.-Под. нац. ун-т ім. І.Огієнка, 2010. – Вип. 4 – С. 204–215.
9. Філатова, І.А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах [Текст] / І.А. Філатова, Н.А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. науки. – Вип. 3. – 2011. – С. 218–226.
10. Власюк, А.П. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів [Текст] / А.П. Власюк, Н.А.Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. науки. – Вип. 1. – 2012. – С. 131–136.
11. Коваленко, А.Д. Термоупругость [Текст] / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с.
12. Власюк, А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с «плавающими» узлами [Текст] / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – Киев. 1989. – 55 с.
13. Власюк, А.П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь [Текст] / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – Київ. 1994. – 23 с.
14. Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – М: Наука, 1989. – 616с.
15. Власюк, А.П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: монографія [Текст] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув, 2008. – 416 с.
16. Власюк, А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій: монографія [Текст] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув, 2010. – 277 с.

Отримано 24.10.2013