

О.Ясній. Імовірнісне моделювання втомного руйнування множинним розтріскуванням за термовтоми / О.Ясній, Я.Пастернак, Г.Сулим // Вісник ТНТУ. — 2014. — Том 73. — № 1. — С.29-37. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

О. Ясній<sup>1</sup>, канд. техн. наук; Я. Пастернак<sup>2</sup>, канд. фіз.-мат. наук;  
Г. Сулим<sup>3</sup>, докт. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

<sup>2</sup>Луцький національний технічний університет

<sup>3</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

## ІМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМНОГО РУЙНУВАННЯ МНОЖИННИМ РОЗТРИСКУВАННЯМ ЗА ТЕРМОВТОМИ

**Резюме.** Одним із фундаментальних чинників, що істотно впливає на міцність елементів конструкції під час їхньої експлуатації, є термовтома матеріалів. Важливим завданням є прогнозування розвитку мережі поверхневих тріщин термовтоми, яка виникає на ранніх етапах експлуатації й значною мірою окреслює майбутню довговічність елемента конструкції.

Аналітично розроблено метод інженерних розрахунків впливу теплової втоми на втомне руйнування матеріалу. Розвиток мікрodefektів запропоновано моделювати на основі принципу механізмів зародження та розвитку тріщин з урахуванням в останньому залежності для коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманої в результаті розгляду подвійно періодичної задачі теорії пружності для нескінченної пластинки із подвійною періодичною мережею паралельних тріщин. Відстані між тріщинами визначено на основі ймовірнісних залежностей, отриманих за діаграмами термовтоми, а розміри дефектів розраховано за формулою Періса. Такий підхід дає змогу ефективно моделювати дію теплових напружень на втому й живучість матеріалів.

Обчислено ймовірнісні залежності пошкодженості  $D$ , довжини мікротріщин і відстаней між ними від кількості термоциклів для сталі 25Х1М1Ф при розмаху внутрішніх температурних напружень  $S_0 = 100 \dots 300$  МПа.

**Ключові слова:** множинне розтріскування, термовтома, сталь 25Х1М1Ф, коефіцієнт інтенсивності напружень.

О. Yasniy, Ia. Pasternak, H. Sulym

## PROBABILISTIC MODELING OF FATIGUE FRACTURE USING MULTIPLE CRACKING UNDER THERMAL FATIGUE

**Summary.** One of the fundamental factors that significantly affect the strength of structural elements during their operation is thermal fatigue of materials. It is important to predict the development of surface cracks network under thermal fatigue that emerges in the early stages of operation and largely determines the lifetime of structural elements. The microcracks growth rate depends on the thermomechanical properties of the material, its structure, temperature and force operation conditions (level, type, method of loading, other external influences), the relative position of microcracks and the distance between them and has a largely statistical nature.

Modern design standards for the industry account for this uncertainty through empirical factor of safety. This makes the design conservative, not giving the proper ways to study and improve it. This approach makes it impossible to quantify the risks associated with the project design. So the critical task is the development and introduction into practice of design the probabilistic models, and the probabilistic methods on their basis, in addition to the existing standards.

Analytical method is developed for engineering calculations of thermal fatigue effect on fatigue fracture of the material. The development of microdefects is proposed to be modeled on the basis of the mechanisms of nucleation and growth of cracks taking into consideration the dependency for stress intensity factors obtained as a result of the solution of doubly periodic problem of elasticity for an infinite plate with a doubly periodic network of parallel cracks. The distances between the cracks were determined based on probabilistic dependencies obtained from thermal fatigue diagrams and the size of defects was calculated by Paris law. This approach enables the efficient modeling of effects of thermal stresses on fatigue and durability of materials.

The probabilistic dependencies of damage  $D$ , the average length of microcracks and the distances between them upon the number of thermal cycles were calculated for 25Cr1MoV steel under internal thermal stresses range  $S_0 = 100 \dots 300$  MPa.

**Key words:** multiple cracking, thermal fatigue, 25Cr1MoV steel, stress intensity factor.

**Постановка проблеми.** Одним із фундаментальних чинників, що істотно впливає на міцність елементів конструкцій під час їхньої експлуатації є термовтома матеріалів. З'ясування цього впливу залишається важливим і поки що недостатньо дослідженим питанням, яке цікавить багато галузей інженерії, таких, як авіабудування [1, 2], електроніка [3, 4], автомобілебудування [5, 6], тепла та атомна енергетики [7-15], металургія та ін. Термічна втома супроводжується розтріскуванням поверхні елементів конструкцій. При цьому типовою є поява мережі поверхневих тріщин навіть у разі відносно невеликих коливань температури. Відомо також, що тріщини термовтоми зупиняють свій ріст при досягненні певної глибини через зниження там температури, а, отже, і градієнта теплових напружень. Це явище часто спостерігається під час експлуатації конструкційних елементів електростанцій [7] і підтверджене експериментально [12] за контрольованих умов.

Таким чином, важливим завданням є прогнозування розвитку мережі поверхневих тріщин термовтоми, яка виникає на ранніх етапах експлуатації й значною мірою окреслює майбутню довговічність елемента конструкції. Швидкість росту мікротріщин залежить від термомеханічних властивостей матеріалу, структури його будови, температурно-силових умов експлуатації (рівень, тип, спосіб навантажування, інших зовнішніх впливів), взаємного розташування мікротріщин та відстані між ними й має великою мірою статистичний характер.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Розвиток мережі тріщин досліджували експериментально й числово, зокрема [7, 16]. З'ясовано, що зменшення швидкості росту на певній глибині під поверхнею тіла, а також міра цього зниження залежать від розмаху та частоти коливань температури, а також коефіцієнта теплопровідності [167, 18]. Однак вплив багатьох інших не менш важливих чинників на термовтому та механізми її розвитку, значення окремих параметрів цього явища залишаються великою мірою ще недостатньо зрозумілими та вивченими.

Сучасні норми проектування для промисловості враховують таку невизначеність за допомогою емпіричних коефіцієнтів запасу міцності, що робить проектування консервативним, не даючи шляхів належного його обґрунтування й покращення. Такий підхід не дає можливості кількісно оцінити ризики, пов'язані з проектними рішеннями. Тому надзвичайно важливими є розроблення і запровадження у практику проектування ймовірнісних моделей, а на їхній основі – ймовірнісних методик як доповнення до існуючих норм.

Не зважаючи на певний досвід застосування ймовірнісних підходів для моделювання множинного розтріскування поверхні елементів конструкцій за термічної втоми, ця проблема вимагає подальшого вивчення та поглибленого розвитку, зокрема при дослідженні впливу цього чинника на втомну міцність конкретних елементів конструкцій, залежно від умов їхньої експлуатації. Окрім того, явище ініціації тріщин (зокрема й температурних) і їхнє перетворення у макродефекти вивчені все ще недостатньо. У більшості випадків вплив температури й силові фактори взагалі не беруть до відома. Запропоновані підходи до оцінювання термічної втоми переважно є цілком детермінованими, а тому не дають можливості враховувати ймовірнісний характер зародження тріщин та їхній подальший розвиток.

У роботі [19], ґрунтуючись на рівняннях теплопровідності, за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) досліджено тривимірне температурне поле робочого ролика фінішного вальцювального стану F2 під час його експлуатації. Такий ролик діаметром 850 мм виготовлений із високохромованої сталі, матеріал вальцювання – сталь SS400, температура слябу на вході у стан становить  $1000^{\circ}\text{C}$ , товщина сталі перед вальцюванням складає 24 мм і 14 мм після, ширина відвальцьованої сталі – 1680 мм. З'ясовано, що найвища температура поверхні даного ролика досягала  $593^{\circ}\text{C}$ , а різниця між мінімальними й максимальними тепловими напруженнями робочої поверхні ролика дорівнювала 146 МПа. Було теж виявлено, що термоциклічне навантажування

сталі 25X1M1Ф [20] збільшує твердість поверхневого шару на 15%, а при  $N > 1000$  cycles зменшує її приблизно до початкового рівня. Проте мікротвердість поверхневого шару монотонно зростає і після 2500 циклів навантаження вона вже у 1,5 раза вища порівняно з вихідним станом.

**Мета роботи.** Створення математичних моделей явищ накопичення термовтомних пошкоджень на етапі зародження мікротріщин, а також розвитку в умовах термовтоми вже сформованої мережі тріщин із використанням значень коефіцієнтів інтенсивності напружень із розв'язку для двоперіодичної системи тріщин.

**Модель множинного розтріскування.** Під дією теплового циклічного навантаження матеріал деградує та втомлюється. Пов'яжемо цей процес із нагромадженням у ньому пошкоджень, зокрема у вигляді мікротріщин. З огляду на ймовірнісний характер локалізації місць зародження цих мікродфектів та їхню велику кількість, вважатимемо, що останні після завершення кожного нового циклу теплового навантажування будуть рівномірно розподіленими в матеріалі. Сумарний вплив теплової втоми характеризуватимемо величиною пошкодженості  $D$  ( $0 < D < 1$ ), яку задамо відповідно до закону нормального розподілу ймовірностей залежністю

$$D(N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{(N - N_{\max})}{\sqrt{2}s} \right] \quad (1)$$

Тут  $N$  – кількість сприйнятих матеріалом термоциклів;  $N_{\max}$  – математичне сподівання кількості циклів до зародження тріщин;  $s$  – відповідне середньоквадратичне відхилення.

Очевидно, що тріщини у зразку зароджуються тоді, коли пошкодженість досягає свого граничного значення, тобто в матеріалі нагромаджується надто багато мікродфектів, які за достатнього зближення пришвидшено об'єднуються, утворюючи тріщини та магістральні макродефекти. З іншого боку, максимальну пошкодженість можна охарактеризувати мінімальною геометричною відстанню  $d_{\min}$  між дефектами чи їх максимальною густиною  $\rho_{\max} = 2a/d_{\min}^2$  (тут  $a$  – середня півдовжина дефектів), за яких відбувається процес руйнування. Оскільки пошкодженість  $D(N) \in (0, 1)$ , то середню густину дефектів за циклічного теплового навантажування можна описати залежністю

$$\rho(N) = \frac{2a_0}{d^2(N)} = \rho_{\max} D(N) \quad (2)$$

де  $d(N)$  – середня відстань між дефектами за  $N$  циклів теплового навантажування, яку відповідно до (2) можна записати у вигляді

$$d(N) = \sqrt{\frac{2a_0}{\rho_{\max} D(N)}} \quad (3)$$

Тут  $2a_0$  – середня довжина тріщин (мікротріщин, пошкоджень), що зароджуються під дією теплового навантажування.

Оскільки визначальну роль при зародженні мікротріщин і їх розвитку на початкових етапах відіграють теплові напруження, то в цій роботі розглянуто лише термовтому. Середню довжину  $2a$  тріщин пов'яжемо із породженням зі зміною температури циклічним термічним навантаженням формулою Періса [21]

$$\frac{da(N)}{dN} = C(\Delta K)^n \tag{4}$$

де  $C$  та  $n$  – емпіричні параметри, що визначаються експериментально для даного типу навантаження і конкретного матеріалу;  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  – розмах коефіцієнта інтенсивності напружень, який зумовлений внутрішніми тепловими напруженнями, що виникають при циклічному тепловому навантаженні;  $K_{\min}$  та  $K_{\max}$  – відповідно найменший та найбільший КІН нормального відриву.

Очевидно, що  $\Delta K$  є функцією довжин  $2a$  тріщин, відстаней  $d$  між ними та внутрішніх температурних напружень  $S_0$ , що виникають при тепловому навантаженні. Для спрощення розрахунків вважатимемо, що утворену внаслідок термовтоми мережу мікрodefektів можна з достатньою мірою точності наблизити подвійно періодичною системою прямолінійних колінеарних тріщин завдовжки  $2a(N)$ , центри яких розташовані у вузлах квадратної ґратки з періодом повторюваності  $d(N)$  за періодично змінюваного теплового навантаження, яке породжує циклічно змінюване поле внутрішніх теплових напружень з розмахом  $S_0$  (рис.1). Для плоскої подвійно періодичної системи тріщин отримано лише числові розв’язки для КІН [22], бо аналітичні відсутні. Однак на основі досвіду розв’язування плоских і антиплоских подвійно періодичних задач для тріщин і тонких пружних включень [23, 24] з меншою за 1% похибкою ці розв’язки можна апроксимувати аналітичним виразом, отриманим для антиплоскої деформації середовища із подвійно періодичною мережею тріщин [25]

$$K_1(N) \approx K_0(a, d) \sqrt{\pi a(N)} S_0; \quad K_0(a, d) = \sqrt{\frac{K(k)(1+a_m k) \operatorname{sn}(z, k)}{2\lambda a_m (1-a_m k) K(k_r) \operatorname{dn}(z, k)}}; \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{2a(N)}{d(N)}; \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad z = \lambda K(k); \quad a_m = \frac{\operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)}; \quad k_r = \frac{2\sqrt{ka_m}}{1+ka_m}.$$

Тут  $K(k)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду;  $\operatorname{sn}(z, k)$ ,  $\operatorname{cn}(z, k)$ ,  $\operatorname{dn}(z, k)$  – функції Якобі.

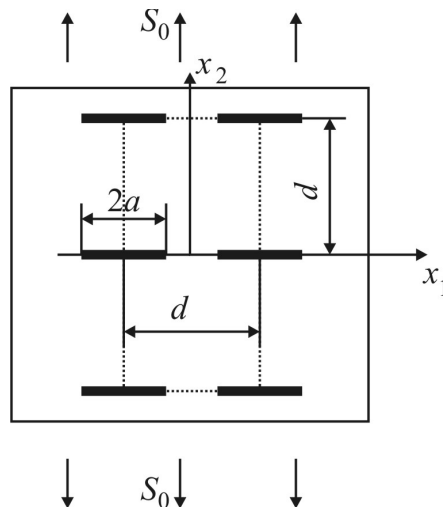


Рисунок 1. Схема задачі про подвійно періодичну систему тріщин у пластині

Figure 1. Scheme of problem of doubly periodic system of cracks in the plate

Співвідношення (1), (3) – (5) разом із початковою умовою  $a(0) = a_0$ , де  $a_0$  – початкова довжина зумовлених термовтомою мікрodefektів, дають можливість методами числового розв’язування відповідних диференціальних рівнянь моделювати термовтому і деградацію матеріалів. При цьому, з огляду на дуже велику кількість  $N$  термоциклів, для числового розв’язування рівнянь (1), (3) – (5) їх доцільно відразу переписати залежно від її десятичного логарифма  $\xi = \lg N$ . Тоді рівняння Періса (4) набуде вигляду

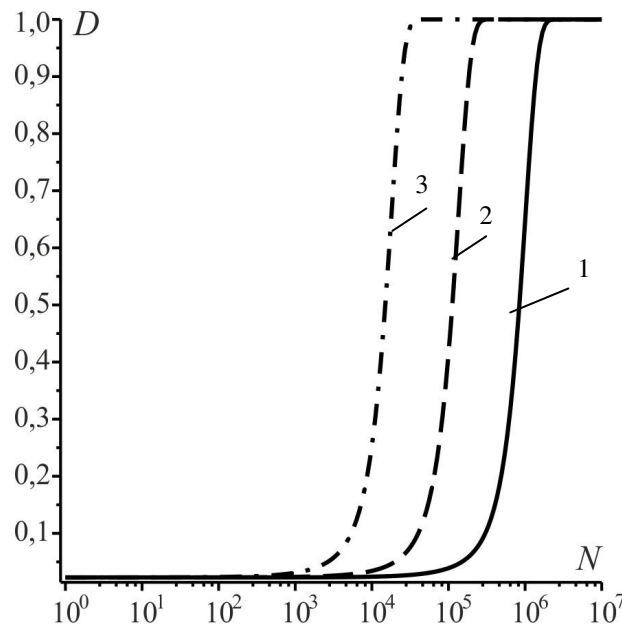
$$\frac{da(\xi)}{d\xi} = 10^\xi \ln 10 \cdot C (\Delta K(\xi))^n \quad (6)$$

**Результати дослідження та їх обговорення.** Дослідимо термовтому сталі 25X1M1Ф. Відповідно до [26] за трикутної форми термоциклу ( $\Delta T = 550^\circ\text{C}$ ), за розмаху температурних напружень  $\Delta S = S_0$  кількість циклів до руйнування зразка із такої сталі (зародження тріщини) визначається апроксимаційною формулою

$$\xi_0 \equiv \lg N_0 = \frac{A - S_0}{B} \quad (7)$$

Тут  $A$ ,  $B$  – параметри, що визначаються з експерименту. Для сталі 25X1M1Ф:  $A = 777,16$  МПа,  $B = 114,29$  МПа. При цьому також додатково припустимо, що у розподілі (1) середньоквадратичне відхилення дорівнює  $s = N_0 / 2$ .

Тоді розрахована за формулою (1) залежність пошкодженості  $D$  від кількості  $N$  циклів теплового навантажування за різних рівнів розмаху навантаження матиме зображений на рис.2 вигляд



**Рисунок 2.** Ймовірнісна залежність пошкодженості  $D$  від кількості термоциклів для сталі 25X1M1Ф, розрахована за (1) при  $s = N_0 / 2$ , а також  $S_0 = 100$  МПа (1), 200 МПа (2), 300 МПа (3)

**Figure 2.** Probabilistic dependency of damage  $D$  upon number of thermal cycles for 25Cr1MoV steel, calculated using (1) under  $s = N_0 / 2$ , and also  $S_0 = 100$  MPa (1), 200 MPa (2), 300 MPa (3)

Суцільні криві відповідають температурним напруженням із розмахом  $S_0 = 100$  МПа (при цьому кількість термоциклів до руйнування відповідно до (7) дорівнюватиме  $N_0 = 8,41 \cdot 10^5$ ); штрихові –  $S_0 = 200$  МПа ( $N_0 = 1,12 \cdot 10^5$ ); штрихпунктирні –  $S_0 = 300$  МПа ( $N_0 = 1,5 \cdot 10^4$ ). Зроблений вибір середньоквадратичного відхилення  $s$  дає можливість локалізувати основний етап нагромадження теплових пошкоджень у межах  $N = 10^3 \div 10^6$  термоциклів (залежно від рівня  $S_0$ ).

Відповідно до [27] втомний ріст тріщин у сталі 25Х1М1Ф за температури 600°C описується такими параметрами формули Періса (6):  $C = 6,6 \cdot 10^{-9}$  мм/цикл,  $n = 3,26$  при  $\Delta K_I$ , обчисленому в МПа $\sqrt{m}$ . Унаслідок термовтоми в матеріалі формується густа мережа досить великих мікротріщин: у середньому зароджуються мікротріщини завдовжки  $2a_0 = 1$  мм, що відповідає розміру 20–30 зерен, а густина утворених мікротріщин дорівнює  $\rho_{\max} = 0,91$  мм $^{-1}$ . На основі розв’язування рівняння (6) з урахуванням виразів (5) для КІН отримано зображені на рис.3 і 4 залежності довжин тріщин і відстаней між ними.

Із рис.3 бачимо, що до моменту досягнення  $N_0$  за заданого навантаження  $S_0$  тріщини зростають у 2–2,5 раза. Причому, за проміжного навантаження у 200 МПа мікротріщини до моменту утворення магістральної тріщини досягають більших довжин, ніж у разі дії навантажень 100 МПа та 300 МПа. Це пояснюється тим, що за навантаження 200 МПа тріщини для свого підростання до макрорівня мають сприйняти ще досить велику порівняно з випадком дії навантаження 300 МПа кількість термоциклів (див. рис.2). А порівняно з навантаженням 100 МПа при дії напружень 200 МПа дефекти відповідно до формули Періса (6) мають значно більші швидкості свого підростання. Отже, тепла втома, з одного боку, істотно впливає на граничні значення довжин мікрodefektів при завершенні руйнування, а з другого, – максимальна інтенсивність цього впливу не обов’язково зумовлена максимальними значеннями термічних та породжуваних ними механічних факторів утворення й підростання дефектів.

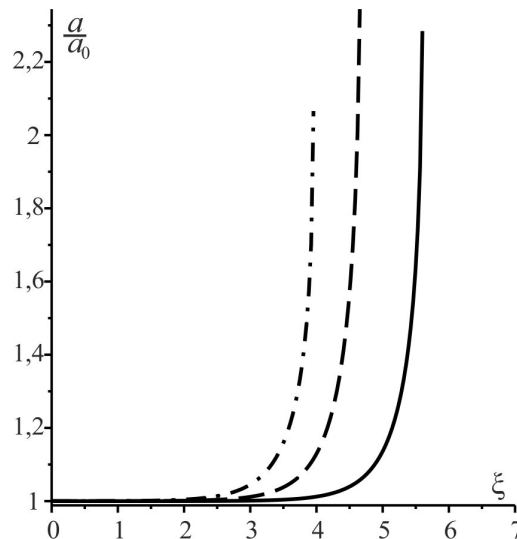
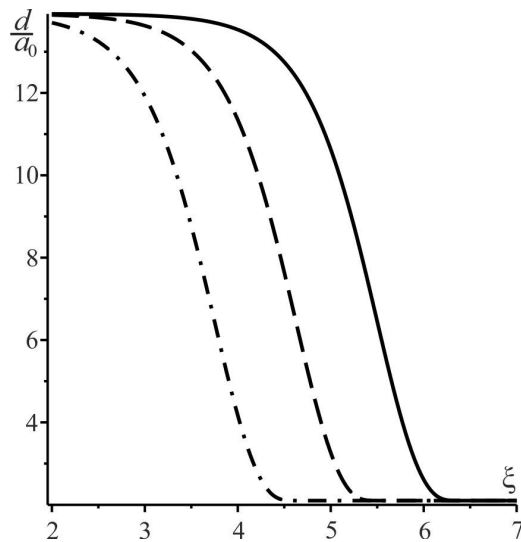


Рисунок 3. Залежність середньої довжини  $2a$  тріщин від логарифма кількості циклів  $\xi = \lg N$  (позначення рис. 2)

Figure 3. Dependency of average cracks length  $2a$  upon logarithm of cycles number  $\xi = \lg N$  (notations as in Fig. 2)

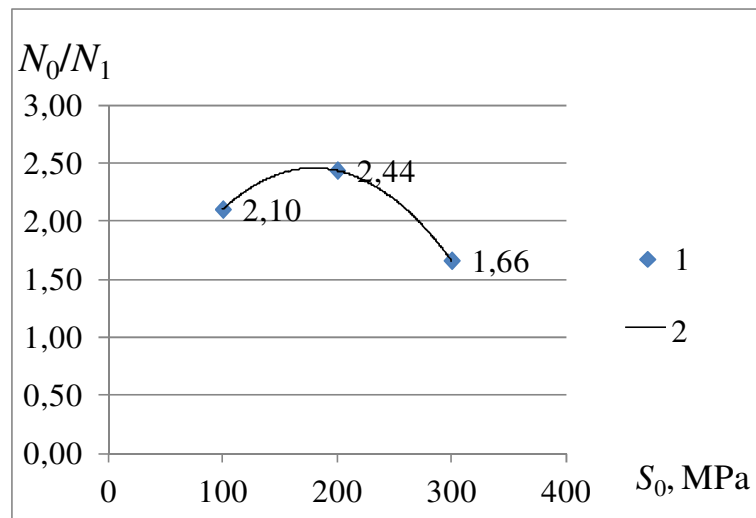
На рис.4 зображено залежність середньої відстані  $d$  між дефектами від десятичного логарифма кількості циклів для зазначених вище трьох значень розмаху термічних напружень  $S_0$ . Зіставляючи рис.3 та рис.4, бачимо, що прогнозоване руйнування матеріалу (вважається, що воно настане, коли середня відстань між тріщинами дорівнюватиме їхній довжині) відбувається при значно меншій кількості циклів, ніж та, що передбачена формулою (7). Зокрема, для  $S_0 = 100$  МПа кількість циклів до руйнування за врахування підростання тріщин дорівнює  $N_1 = 4 \cdot 10^5$ , для  $S_0 = 200$  МПа –  $N_1 = 4,6 \cdot 10^4$ , а для  $S_0 = 300$  МПа ще менше –  $N_1 = 9 \cdot 10^3$ .



**Рисунок 4.** Залежність середньої відстані  $d$  між тріщинами від логарифма кількості циклів  $\xi = \lg N$  (позначення рис. 2)

**Figure 4.** Dependency of average distance  $d$  between cracks upon the logarithm of cycles number  $\xi = \lg N$  (notations as in Fig. 2)

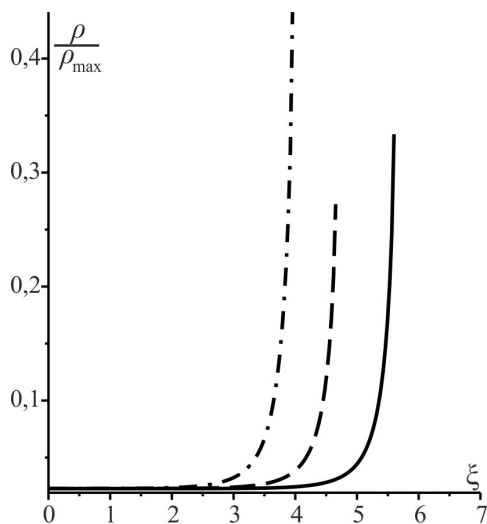
Залежність відношення  $N_0/N_1$  від розмаху теплових напружень  $S_0$  зображено на рис.5, з якого бачимо, що максимальне значення цього відношення досягається при  $S_0=200$  МПа.



**Рисунок 5.** Залежність відношення  $N_0/N_1$  від розмаху температурних напружень  $S_0$ :  
1 – розрахунок; 2 – апроксимація поліномом

**Figure 5.** Dependency of ratio  $N_0/N_1$  upon the range of thermal stresses  $S_0$ :  
1 – calculations; 2 – polynomial fit

На рис.6 зображено залежність густини тріщин  $\rho$  від десятичного логарифма кількості циклів для зазначених вище трьох рівнів навантаження.



**Рисунок 6.** Залежність густини тріщин  $\rho$  від логарифма кількості циклів  $\xi = \lg N$  (позначення рис. 2)

**Figure 6.** Dependency of crack density  $\rho$  upon the logarithm of cycles number  $\xi = \lg N$  (notations as in Figure 2)

Графік отриманої залежності густини тріщин  $\rho = \frac{2a(N)}{d^2(N)}$  вказує на те, що за

врахування у моделі підростання тріщин локалізоване пошкодження (магістральні дефекти) може виникати за значно менших густин дефектів, ніж у випадку врахування лише термоциклової втоми, коли вважається, що розсіяне пошкодження об'єднується у локалізоване за значно більшої їх густини  $\rho_{\max}$ .

**Висновки.** Аналітично розроблено метод інженерних розрахунків впливу теплової втоми на втомне руйнування матеріалу. Розвиток мікрodefektів запропоновано моделювати на основі принципу механізмів зародження та розвитку тріщин з урахуванням в останньому залежності для коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманої в результаті розгляду подвійно періодичної задачі теорії пружності для нескінченної пластинки із подвійно періодичною мережею паралельних тріщин. Відстані між тріщинами визначено на основі ймовірнісних залежностей, отриманих за діаграмами термовтоми, а розміри дефектів розраховано за формулою Періса. Такий підхід дає змогу ефективно моделювати дію теплових напружень на втому і живучість матеріалів.

Обчислено ймовірнісні залежності пошкоженості  $D$ , довжини мікротріщин і відстаней між ними від кількості термоциклів для сталі 25X1M1Ф при розмаху внутрішніх температурних напружень  $S_0=100\dots300$  МПа.

**Conclusions.** The analytical method is developed for engineering calculations of thermal fatigue effect on fatigue fracture of the material. The development of microdefects is proposed to be modeled on the basis of the mechanisms of nucleation and growth of cracks taking into consideration the dependency for stress intensity factors obtained as a result of the solution of doubly periodic problem of elasticity for an infinite plate with a doubly periodic network of parallel cracks. The distances between the cracks were determined based on probabilistic dependencies obtained from thermal fatigue diagrams and the size of defects was calculated by Paris law. This approach enables the efficient modeling of effects of thermal stresses on fatigue and durability of materials.

The probabilistic dependencies of damage  $D$ , the average length of microcracks and the distances between them upon the number of thermal cycles were calculated for 25Cr1MoV steel under internal thermal stresses range  $S_0=100\dots300$  МПа.

**Список використаної літератури**

1. Mansoor M. Restricted life of after burner manifold assemblies due to stress raisers / M. Mansoor, I. Islam, A. Taquir // Eng. Fail. Anal. – 2007. – Vol. 14, No. 7. – P. 1280–1285.
2. Rémy, L. Growth of small cracks and prediction of lifetime in high temperature alloys / L. Rémy, A. Alam, N. Haddar, A. Köster, N. Marchal // Mater. Sci. Eng.: A. – 2007. – Vol. 468–470. – P. 40–50.
3. Liu, X.W. Damage produced in solder alloys during thermal cycling / X.W. Liu, W.J. Plumbridge // J. Electron. Mater. – 2007. – Vol. 36, No. 9. – P. 1111–1120.
4. Ubachs, R.J.L.M. Elasto-viscoplastic nonlocal damage modeling of thermal fatigue in anisotropic lead-



- free solder / R.J.L.M. Ubachs, P.J.G. Schreurs, M.G.D. Geers // *Mech. Mater.* – 2007. – Vol. 39. – P. 685–701.
5. Beck, T. Damage mechanisms of cast Al-Si-Mg alloys under superimposed thermal-mechanical fatigue and high-cycle fatigue loading / T. Beck, D. Lohe, J. Luft, I. Henne // *Mater. Sci. Eng. : A.* – 2007. – Vol. 468–470. – P. 184–92.
  6. Firouzdor, V. Effect of microstructural constituents on the thermal fatigue life of A319 aluminium alloy / V. Firouzdor, M. Rajabi, E. Nejati, F. Khomamizadeh // *Mater. Sci. Eng.: A.* – 2007. – Vol. 454–455. – P. 528–535.
  7. Taheri, S. Some advances on understanding of high cycle thermal fatigue crazing / S. Taheri // *J. Press. Vessel. Technol.* – 2007. – Vol. 129, No. 3. – P. 400–410.
  8. Ancelet, O. Development of a test for the analysis of the harmfulness of a 3D thermal fatigue loading in tubes / O. Ancelet, S. Chapuliot, G. Henaff, S. Marie // *Int. J. Fatigue.* – 2007. – Vol. 29, No. 3 – P. 549–564.
  9. Desmorat, R. Two scale damage model and related numerical issues for thermo-mechanical high cycle fatigue / R. Desmorat, A. Kane, M. Seyedi, J-P. Sermage // *Eur. J. Mech. A. Solids.* – 2007. – Vol. 26, No. 6. – P. 909–935.
  10. Ahmadi, A. Simulation of microcrack growth for different load sequences and comparison with experimental results / A. Ahmadi, H. Zenner // *International Journal of Fatigue.* – 2005. – Vol. 27, No. 8. – P. 853–861.
  11. Missirlian, M. Damage evaluation under thermal fatigue of a vertical target full scale component for the ITER divertor / M. Missirlian, F. Escourbiac, M. Merola, A. Durocher, I. Bobin-Vastra, B. Schedler // *J. Nucl. Mater.* – 2007. – Vol. 367–370, Part. B. – P.1330–1336.
  12. Maillot, V. Thermal fatigue crack networks parameters and stability: an experimental study. / V. Maillot, A. Fissolo, G. Degallaix, S. Degallaix // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – Vol. 42, No. 2 – P. 759–769.
  13. Kamaya, M. A study on the evolution of crack networks under thermal fatigue loading / M. Kamaya, S. Taheri // *Nuclear Engineering and Design.* – 2008. – Vol. 238, No. 9. – P. 2147–2154.
  14. Malésys, N. A probabilistic model to predict the formation and propagation of crack networks in thermal fatigue / N. Malésys, L. Vincent, F. Hild // *International Journal of Fatigue.* – 2009. – Vol. 31, No. 3 – P. 565–574.
  15. Tohgo, K. Monte Carlo simulation of stress corrosion cracking on a smooth surface of sensitized stainless steel type 304 / K. Tohgo, H. Suzuki, Y. Shimamura, G. Nakayama, T. Hirano // *Corrosion Science.* – 2009. – Vol. 51, No. 9. – P. 2208–2217.
  16. Haddar, N. 2D simulation of the initiation and propagation of crack array under thermal fatigue / N. Haddar, A. Fissolo // *Nuclear Engineering and Design.* – 2005. – Vol. 235, No. 9. – P. 945–964.
  17. Haddar, N. Thermal fatigue crack networks: an computational study / N. Haddar, A. Fissolo, V. Maillot // *International Journal of Solids and Structures.* – 2005. Vol. 42, No. 2. – P. 771–788.
  18. Kasahara, N. Structural response function approach for evaluation of thermal striping / N. Kasahara, H. Takasho, A. Yacumpai // *Nuclear Engineering and Design.* – 2002. – Vol. 212, No. 1–3. – P. 281–292.
  19. Li, C. Numerical Simulation of Temperature Field and Thermal Stress Field of Work Roll During Hot Strip Rolling / C. Li, H. Yu, G. Deng, X. Liu, G. Wang // *Journal of Iron and Steel Research, International.* – 2007. – Vol. 14, No. 5. – P. 18–21.
  20. Yasniy, P. Damage and fracture of heat resistance steel under cyclic thermal loading / P. Yasniy, P. Maruschak, R. Bishchak, V. Hlado, A. Pylypenko // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2009. – Vol. 52, No. 1. – P. 22–25.
  21. Paris, P. A critical analysis of crack propagation laws / P. Paris, F. Erdogan // *Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.* – 1963. – P. 528–534.
  22. Wang, G.S. The interaction of doubly periodic cracks / G.S. Wang // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – Vol. 42. – P. 249–294.
  23. Pasternak, Ia. Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelastoelectric medium / Ia. Pasternak // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2012. – 36. – No. 5. – P. 799–811.
  24. Пастернак, Я. Регулярні системи тонких неоднорідностей в анізотропному тілі [Текст] / Я. Пастернак, Г. Сулим // *Вісник ТНТУ.* – 2011. – 16. – № 3. – С. 49–56.
  25. Xiao J. Exact solution for orthotropic materials weakened by doubly periodic cracks of unequal size under antiplane shear / J. Xiao, C. Jiang // *Acta Mechanica Solida Sinica.* – 2009. – Vol. 22, No. 1. – P. 53–63.
  26. Клипачевський, В.В. Використання графічного програмування при випробуваннях матеріалів на термічну втому та циклічну міцність [Текст] / В.В. Клипачевський, М.М.Теслюк // *Проблеми міцності.* – 2011. – №1. – С. 142–152.
  27. Yasniy, O. Probabilistic modeling of surface crack growth in a roll of continuous casting machine / O. Yasniy, P. Maruschak, Y. Lapusta // *International Journal of Fracture.* – 2011. – Vol. 172, No 1. – P. 113–120.

Отримано 10.01.2014