

УДК 539.3

Г. Сулим¹, докт. фіз.-мат. наук; Н. Оліярник¹;
Я. Пастернак², канд. фіз.-мат. наук

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Луцький національний технічний університет

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ З ЛІНІЙНО ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ РІЗНОЇ ДОВЖИНИ ТА ОРІЄНТАЦІЇ

Резюме. Задачу поздовжнього зсуву анізотропних тіл із лінійно періодичними системами тонких включень зведено до системи крайових сингулярних інтегральних рівнянь. Числовий розв'язок останньої отримано за допомогою модифікованого методу граничних елементів. Розглянуто приклади антиплоскої деформації анізотропного тіла з двома та трьома стовпчиками паралельних дефектів. Досліджено вплив довжини, кута нахилу до осі та періоду розміщень включень, що формують періодичну структуру на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Порівнянням із даними окремих аналітичних розв'язків для тріщин і абсолютно жорстких включень підтверджено достовірність отриманих результатів. Також здійснено розрахунки напружено-деформованого стану тіла та значень коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершин тонких неоднорідностей у разі зміни міри анізотропії (ортотропії) матеріалу.

Ключові слова: лінійна періодичність, анізотропія, антиплоска деформація, тонке включення.

H. Sulym, N. Oliiarnyk, Ia. Pasternak

LONGITUDINAL SHEAR OF ANISOTROPIC SOLIDS CONTAINING SINGLY PERIODIC SETS OF THIN INHOMOGENEITIES OF UNEQUAL SIZE AND ORIENTATION

Summary. It is known, that artificial introduction of some sort of inhomogeneities (inclusions of different rigidity, overlays, etc.) into a homogeneous material can dramatically change and improve its physical and mechanical properties. However, due to induction of high stress concentration there is also a danger of premature fracture. In view of this, the design and analysis of such inhomogeneous materials is closely related to the problems of studying of the stress-strain state of solids with isolated inclusions or their systems, including regularly placed inhomogeneities. For example, using singly or doubly periodic sets of thin inhomogeneities one can model composite materials and layered rocks.

Applying the coupling principle for continua of different dimension and Somigliana identity for displacements in a solid with a cut under the antiplane deformation the general integral equations for a problem of a solid with a system of cuts have been obtained. Using the direct summation of kernels the system of singular integral equations for a solid with a singly periodic set of thin inhomogeneities was obtained. Numerical solution of the latter is obtained using the modified boundary element method.

The paper presents numerical calculations of the problems of antiplane shear of a solid with two or three columns of parallel defects of the type of a crack (very soft inclusion) or a rigid line inclusion. It is observed that in the case of rapprochement of columns of inhomogeneities the generalized stress intensity factors (SIF) increase. On the contrary for a constant distance between the columns, the decrease in the period vector causes the decrease in SIF of cracks, which can be explained by the shielding effect. For a solid containing three columns of rigid line inclusions the increase (decrease) in length of central inclusions causes the increase (decrease) in generalized SIF of the latter. The analysis of influence of length, inclination angle, and the period vector on the stress intensity factors of singly periodic inclusions is carried out. Besides, the paper studies the influence of mechanical properties of a solid, in particular its anisotropy (orthotropy), on generalized SIF. The numerical analysis is carried out for different measures of anisotropy and corresponding plots are presented. The validity of the obtained results is confirmed by the solution of particular examples for singly periodic cracks and rigid line inclusions in isotropic medium. Obtained results can be used in the analysis of reinforced composite materials, periodic sets of defects in rocks, regular systems of defects of structural elements made of anisotropic materials.

Key words: singly periodic, anisotropy, antiplane deformation, thin inclusion.

Вступ. Відомо, що умисне впровадження в однорідний матеріал різних неоднорідностей (включень різної жорсткості, накладок тощо) може значно покращувати його фізико-механічні властивості. Однак при цьому внаслідок формування значної концентрації напружень існує також небезпека передчасного руйнування. У зв'язку з цим при проектуванні та дослідженні таких неоднорідних матеріалів виникають задачі вивчення напружено-деформованого стану тіл як із поодинокими включеннями, так і системами, у тому числі й регулярно розташованих неоднорідностей. Наприклад, за допомогою лінійно та подвійно періодичних систем тонких неоднорідностей часто описують композитні матеріали та шаруваті гірські породи.

Лінійно періодичні системи дефектів чи структур в умовах поздовжнього зсуву ізотропного тіла розглянуто у монографіях [1, 2] та багатьох статтях [3 – 7], зокрема у роботах [3, 8], коли періодичну структуру утворює одна та дві тріщини. Значно складнішими щодо побудови аналітичного розв'язку є задачі про тіла зі скінченними системами тріщин. Антиплоска деформація системи з п'яти включень вивчена у [2, 9], системи тонких тріщин та включень досліджено у [10, 11]. У більшості цих робіт розглянуто періодичні системи неоднорідностей в тілах з ізотропного матеріалу. Проте на зміну напружено-деформованого стану тіла може впливати не лише прикладене зовнішнє навантаження, а й анізотропні властивості матриці або параметри включення (геометрія, орієнтація чи взаємне розміщення системи включень). Тому важливою є задача антиплоского деформування анізотропних тіл зі системами довільно направлених дефектів різної довжини, яка на сьогодні практично не досліджена.

Метою роботи є побудова загального підходу, що дав би можливість розглядати антиплоску деформацію анізотропних тіл із системами тонких неоднорідностей, коли періодичну структуру формують включення різної довжини та орієнтації. При побудові розв'язку задачі використано підхід безпосереднього підсумовування ядер інтегральних рівнянь [2, 12] та запису на їхній основі загальних співвідношень періодичної задачі. Ефективність відповідного підходу для задачі плоскої деформації тіл із лінійно періодичними системами включень підтверджено в роботі [12].

1. Формулювання задачі. Розглянемо антиплоску деформацію безмежного пружного тіла із системою тонких пружних включень однакової жорсткості. На спільній межі тіла та включень виконуються умови ідеального механічного контакту.

Згідно з принципом спряження континуумів різної вимірності [2] кожне включення моделюємо лінією Γ_s ($s \in \mathbb{R}$) розривів полів напружень $\Sigma t^s = t^{+s} + t^{-s}$ та переміщень $\Delta w^s = w^{+s} - w^{-s}$ (тут $w^{\pm, s}$ і $t^{\pm, s}$ контактні переміщення та напруження, що виникатимуть на берегах Γ_s^{\pm} включення). Тоді, відповідно до формули Сомільяни, інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків Γ_s ($s \in \mathbb{R}$) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma w^s(\mathbf{y}) &= \sum_s \left[\text{RPV} \int_{\Gamma_s^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + w^\infty(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} \Delta t^s(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\sum_s \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + \sigma_{3j}^\infty \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де $\mathbf{y} \in \Gamma_k$ ($k \in \mathbb{N}$) – точка колокації; w, t – ненульові компоненти векторів переміщень та напружень $(0; 0; w)$ та $(0; 0; t)$; $\Delta t = t^+ - t^-$, $\Sigma w = w^+ + w^-$; $t^\pm = \sigma_{3j}^\pm n_j^\pm$ (n_j^\pm – компоненти векторів нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_s^\pm); знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_s^+ та Γ_s^- , утворених розрізом Γ_s ; σ_{3j}^∞ , $w^\infty(\mathbf{y})$ – задані на безмежності навантаження та відповідне йому поле переміщень у суцільному бездефектному матеріалі. Індекси у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла відповідно до залежностей формалізму Stroh [13] мають такий вигляд [14]:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[A^2 \ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(n_2 - n_1 p) \frac{AB}{Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{jk} \frac{\partial W}{\partial y_k} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p) \frac{AB}{Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{jk} \frac{\partial T}{\partial y_k} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p) \frac{B^2(n_2 - n_1 p)}{[Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = x_1 + px_2 - (y_1 + py_2)$. Комплексні сталі p , A та B визначаються із рівняння

$$\left[Q + 2Rp + Tp^2 \right] A = 0, \quad B = (R + pT) A = -(Q + pR) A / p, \quad (3)$$

де $Q = C_{11}$, $T = C_{22}$, $R = C_{12} = C_{21}$ – коефіцієнти, що аналогічні відповідним матрицям Stroh у плоскій задачі. Відповідно до [13] розв'язування рівняння (3) зводиться до задачі на власні вектори і власні значення формалізму Stroh

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{N} \boldsymbol{\xi} &= p \boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{N}^T \boldsymbol{\eta} &= p \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $N_1 = R/T$, $N_2 = 1/T$, $N_3 = R^2/T - Q$; $\boldsymbol{\xi} = [A, B]^T$ і $\boldsymbol{\eta} = [B, A]^T$ – відповідно правий і лівий власні вектори матриці \mathbf{N} , що нормуються умовою $\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta} = 1$.

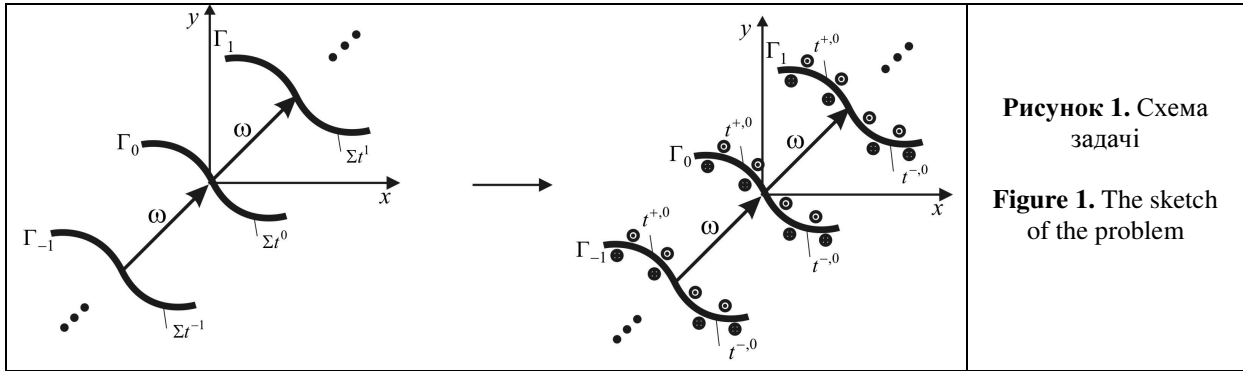


Рисунок 1. Схема задачі
Figure 1. The sketch of the problem

Періодична система включень формується шляхом нескінченної кількості почергових поступальних переміщень однієї неоднорідності на сталу відстань ω , що породжує систему ідентичних одне одному тонких включень. Тоді унаслідок трансляційної симетрії за такого навантажування структури можна стверджувати, що розриви напружень Σt^s та переміщень Δw^s є однаковими для кожного включення (рис. 1).

Тобто рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2} \Sigma w^0(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma_0^+} W^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + w^\infty(\mathbf{y}),$$

$$\frac{1}{2} \Delta t^0(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[\sigma_{3j}^\infty + \text{CPV} \int_{\Gamma_0^+} D_j^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_0^+} S_j^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \quad (5)$$

де ядра $\mathbf{K}^p = [W^p, T^p, D_j^p, S_j^p]$ мають загальний вигляд

$$\mathbf{K}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\omega, \mathbf{y}). \quad (6)$$

Тут $\omega = (\omega_{x_1}, \omega_{x_2})$ – вектор періоду.

Тобто у (5) відповідно до (2) та (6) необхідно обчислити суми

$$S_1^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u + s\omega), \quad S_2^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + s\omega} = \frac{dS_1^p}{du}, \quad S_3^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + s\omega]^2} = -\frac{dS_2^p}{du}, \quad (7)$$

де $u = Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\omega = Z(\omega)$.

Оскільки сума S_1^p розходиться у звичайному сенсі, то подамо її у вигляді головної частини та деякої безмежної сталої C_∞^p . Матимемо

$$S_1^p = \ln \left[\frac{u\pi}{\omega} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{u}{s\omega} \right)^2 \right) \right] + C_\infty^p, \quad (8)$$

де

$$C_\infty^p = \ln \left(\frac{\omega}{\pi} \right) + \sum_{s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \ln(s\omega).$$

Відповідно до формули (4.22.1) довідника [15]

$$\sin z = z \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{s\pi} \right)^2 \right),$$

отже, вираз (8) можна записати так:

$$S_1^p = \ln \sin \left(\frac{u\pi}{\omega} \right) + C_{\infty}^p. \quad (9)$$

Диференціюючи (9) двічі за змінною u , отримаємо

$$S_2^p = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \left(\frac{u\pi}{\omega} \right), \quad S_3^p = \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{u\pi}{\omega} \right). \quad (10)$$

Таким чином, для розв'язування задач із лінійно періодичними системами тонких включень в ядрах (2) інтегральних рівнянь (5) необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rightarrow S_1^p, \quad [Z(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{-1} \rightarrow S_2^p, \quad [Z(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{-2} \rightarrow S_3^p.$$

За умови $\int_{\Gamma_s^+} \Sigma t^s d\Gamma = 0$ рівноважного навантаження кожного з розрізів Γ_s

(фактично рівноваги кожного окремого включення) відповідно до (5) стала C_{∞}^p не впливатиме на розв'язок задачі, тому при розрахунках її можна відкинути.

Для розв'язування сформульованої задачі інтегральних рівнянь (5) недостатньо. Повну систему рівнянь отримаємо, долучивши до (5) співвідношення математичної моделі тонкого включення [14]

$$\Sigma w^0(\mathbf{y}) = F^w(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t), \quad \Delta t^0(\mathbf{y}) = F^t(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t). \quad (11)$$

2. Розв'язування задачі. Систему крайових інтегральних рівнянь (5) розв'язуватимемо модифікованим методом граничних елементів [16, 17]. Для цього криву Γ_0 апроксимуємо за допомогою n тривузлових граничних елементів. Крайові функції Σt^0 та Δw^0 апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями.

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо у формі поліномів Лагранжа [18] для системи вузлів $\xi_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового розривного граничного елемента,

$$\phi_1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (12)$$

Для елементів, що моделюють приторцеві ділянки включення використаємо описані в [16, 17] спеціальні функції $\phi_p^{\Delta u}$ та $\phi_p^{\Sigma t}$, які враховують кореневу особливість напружень у вершині неоднорідності і дають можливість визначати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) з високою точністю. Останні обчислюємо за формулами

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \quad (13)$$

де $L = -2\sqrt{-1}B^2$ – дійсне число, що відповідає тензору Барнет – Лоте \mathbf{L} [13] у випадку плоскої анізотропії.

3. Числові результати.

Приклад 1. Розглянемо безмежне пружне тіло із лінійно періодичною системою тонких неоднорідностей типу тріщина (жорсткість $k = 10^{-10}$) чи абсолютно жорстке включення (АЖВ, жорсткість $k = 10^{10}$) довжиною $2a$, розмішених з періодом d , де d

– відстань між центрами сусідніх дефектів. На нескінченості тіло навантажене зусиллями $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$.

Згідно з аналітичним розв’язком [2] значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в умовах поздовжнього зсуву для систем паралельних (K_{31}^{*np}) і співвісних (K_{31}^{*cn}) тріщин та включень визначали з формул (14). Результати розрахунку нормованих КІН $K_{3j} = K_{3j}^* \tau \sqrt{\pi a}$ ($j=1,2$) за аналітичним розв’язком та запропонованим в роботі підходом наведено в таблиці 1. Тут і у наступних прикладах для розбиття осі неоднорідності у МГЕ брали 20 граничних елементів.

$$K_{3j} = K_{3j}^* \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{3j}^{*np} = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{d}}, \quad K_{3j}^{*cn} = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}. \quad (14)$$

Дані у табл. 1 свідчать про достовірність отриманих результатів і можливість використання запропонованого підходу до вивчення тіл як із тріщинами, так і з системами абсолютно жорстких включень. Відхилення результатів від аналітичного розв’язку для систем тріщин менше 0,5%. Очевидним є зменшення значень узагальнених КІН при зближенні паралельних тріщин між собою, тобто зменшенні періоду d (екранувальний ефект тріщин). Унаслідок зближення співвісних тріщин УКІН зростають, а для великих відстаней $d \geq 20/3$ вони практично збігаються з аналітичним розв’язком для однієї ізольованої тріщини в безмежному середовищі. Відносна похибка у випадку паралельних АЖВ не перевищує 0,9%, для співвісних включень – менше 0,6%. Зміна відношення d/a впливає на значення УКІН наступним чином: для великих d/a УКІН практично збігаються із аналітичним розв’язком, далі із зближенням паралельних включень УКІН спадають, зменшення періоду для співвісних АЖВ навпаки спричиняє зростання УКІН.

Таблиця 1

	d/a	$AP, (14)$	K_{31}^*		K_{32}^*	
			МГЕ	$\delta, \%$	МГЕ	$\delta, \%$
$\omega = (0; d)$	100/3	0,9985	0,9988	0,03	0,9986	0,01
	8/3	0,8377	0,8382	0,06	0,838	0,04
	4/3	0,6456	0,6463	0,11	0,6463	0,11
	8/9	0,5314	0,5323	0,17	0,5325	0,21
	4/9	0,3761	0,3777	0,43	0,3792	0,82
$\omega = (d; 0)$	100/3	1,0015	1,0018	0,03	1,0015	–
	20/3	1,0398	1,0401	0,03	1,0399	0,01
	10/3	1,2084	1,2089	0,04	1,2089	0,04
	8/3	1,4326	1,4315	0,08	1,4338	0,16
	7/3	1,8039	1,8089	0,28	1,8144	0,58

Приклад 2. Розглянемо безмежне пружне тіло в якому періодичну структуру формують дві неоднорідності довжиною $2a$, одна з яких розміщена вдовж осі Ox , а інша – під кутом α до осі, як це зображено на візрці до рис. 2. Відстань між центрами двох неоднорідностей, розміщених у сусідніх стовпчиках, дорівнює $2s = 4a$, вектор періоду $\omega = (0; d) = (0; 3a)$. Відносна жорсткість включення характеризується відношенням $k = G^i / c_{55}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу неоднорідності, товщина $h = 0,001a$. Межа тіла навантажена зусиллями τ , так що воно перебуває в умовах всебічного зсуву. Для розбиття осі неоднорідності у МГЕ брали 20 граничних

елементів.

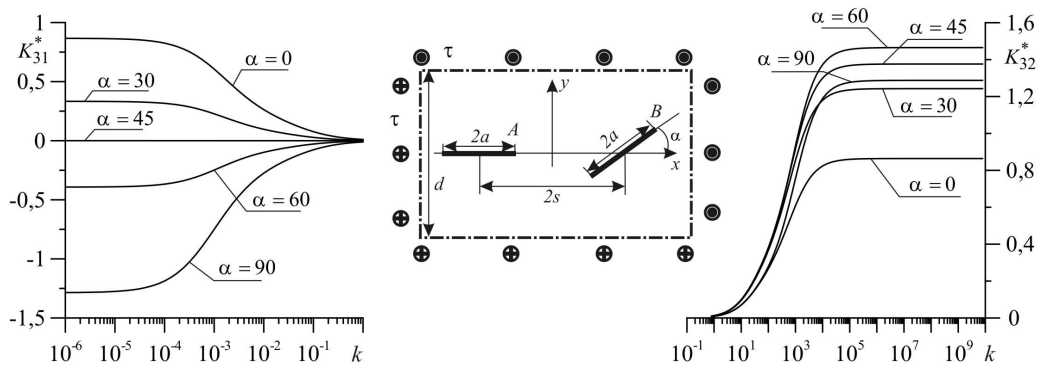


Рисунок 2. Залежність нормованих УКІН K_{31}^* та K_{32}^* від кута нахилу включення до осі Ox

Figure 2. Dependence of normalized GSIF K_{31}^* and K_{32}^* on the inclusion inclination angle

На рис. 2 зображена залежність нормованих узагальнених КІН $K_{31}^* = K_{31}/\tau\sqrt{\pi a}$, $K_{32}^* = K_{32}/\tau\sqrt{\pi a}$ біля вістря В дефекту від відносної жорсткості включень k . Здійснено розрахунки для таких значень кута нахилу включення $\alpha: 0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ$. Виявлено, що при фіксованій відстані $2s$ між стовпцями неоднорідностей зі зростанням кута α значення УКІН у разі податного включення зменшуються, а у разі абсолютно жорсткого включення – збільшуються. Потрібно також зазначити, що зміна кута α істотно не впливає на сусіднє включення, оскільки значення УКІН біля вістря А практично не змінюються. Таке твердження вірне для зазначеної вище відстані між стовпцями, адже при подальшому зближенні стовпців взаємодія між включеннями посилюватиметься і УКІН будуть змінюватися (таблиця 2).

Таблиця 2

s	α		0	30	45	60	90
4a	K_{31}^*	A	0,8667	0,8644	0,8639	0,8639	0,8639
		B	0,8643	0,3333	0,0006	0,3945	1,2863
	K_{32}^*	A	0,8665	0,8655	0,8642	0,8636	0,8636
		B	0,8639	1,2426	1,3761	1,4651	1,2874
3a	K_{31}^*	A	0,8895	0,8680	0,8639	0,8640	0,8639
		B	0,8669	0,3552	0,0017	0,3910	1,2835
	K_{32}^*	A	0,8894	0,8788	0,8686	0,8634	0,8636
		B	0,8665	1,2446	0,3777	1,4665	1,2902

Приклад 3. Розглянемо безмежне тіло, що містить три стовпчики абсолютно жорстких включень різної довжини. Центральне включення завдовжки $2a$ і нахилене під кутом α до осі Ox , інші два завдовжки $2b$ розміщені вздовж осі Ox . Вектор періоду $\omega = (0; d) = (0; 3a)$. Схема задачі зображена на рис. 3. Відношення довжини сторони центрального включення до сторони бічного включення позначимо $D = a/b$. Для розбиття осі неоднорідності у МГЕ брали 20 граничних елементів.

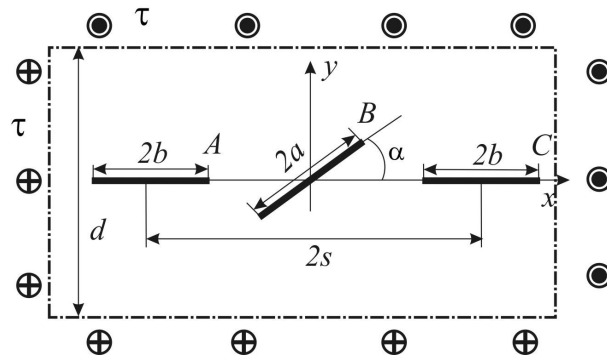


Рисунок 3. Схема задачі

Figure 3. The sketch of the problem

Досліджено вплив параметрів відносної довжини, нахилу та розміщення включень на значення КІН K_{32}^* . Здійснено розрахунки узагальнених КІН у вістрях А, В та С (табл. 3).

Таблиця 3

s	α	$D = 0,5$			$D = 1$			$D = 2$		
		K_{32}^*			K_{32}^*			K_{32}^*		
		A	B	C	A	B	C	A	B	C
2,5a	0	0,924	0,7875	0,8695	0,9575	0,9650	0,8731	0,7632	0,9236	0,7017
	30	0,9145	1,0011	0,8692	0,9029	1,2507	0,8690	0,7128	1,2458	0,6904
	45	0,8976	1,0259	0,8676	0,8739	1,3624	0,8654	0,6856	1,3679	0,6810
	60	0,8832	0,9976	0,8660	0,8613	1,4496	0,8636	0,6739	1,4564	0,6762
	90	0,8665	0,7415	0,8639	0,8639	1,2870	0,8636	0,6766	1,2870	0,6765
3a	0	0,8787	0,7086	0,8653	0,8896	0,8923	0,8666	0,7008	0,8797	0,6844
	30	0,8785	0,9621	0,8653	0,8789	1,2472	0,8655	0,6908	1,2449	0,6815
	45	0,8743	1,0078	0,8649	0,8687	1,3721	0,8643	0,6812	1,3737	0,6782
	60	0,8699	0,9909	0,8644	0,8634	1,4597	0,8636	0,6762	1,4620	0,6764
	90	0,8639	0,7415	0,8636	0,8636	1,2870	0,8636	0,6764	1,2870	0,6764
3,5a	0	0,8683	0,6871	0,8641	0,8721	0,8731	0,8646	0,6844	0,8688	0,6791
	30	0,8685	0,9491	0,8642	0,8691	1,2443	0,8642	0,6816	1,2434	0,6782
	45	0,8672	1,0005	0,8640	0,8656	1,3747	0,8638	0,6782	1,3752	0,6771
	60	0,8657	0,9878	0,8638	0,8636	1,4631	0,8636	0,6764	1,4639	0,6764
	90	0,8636	0,7415	0,8636	0,8636	1,2870	0,8636	0,6764	1,287	0,6764

Проаналізувавши результати, наведені в таблиці 3, можна зробити такі висновки: 1) у крайніх випадках розміщення центрального включення $\alpha = 0^\circ$ і $\alpha = 90^\circ$, коли його довжина в порівнянні з сусідніми включеннями зменшується (збільшується), то КІН також зменшуються (збільшуються), незалежно від s ; 2) за однакової довжини включень і $\alpha = 0^\circ$, при великих s значення КІН у всіх вершинах практично однакові; 3) збільшення кута нахилу α збільшує КІН у будь-якому випадку, причому їхній максимум досягається при $\alpha = 45^\circ$; 4) при віддаленні стовпців між собою, тобто зростанні s , значення КІН спадають.

Приклад 4. З огляду на попередній приклад, дослідимо взаємодію трьох стовпців паралельних жорстких включень в умовах анізотропії матеріалу тіла. Розглянемо випадки, коли центральне включення лежить у площині, перпендикулярній до площини розміщення двох інших включень. Схеми задач зображені на візирях до рис.4. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що характеристика анізотропії матеріалу визначається співвідношенням $c = c_{44}/c_{55}$ та $c_{45} = 0$, тобто розглядаємо ортотропне тіло.

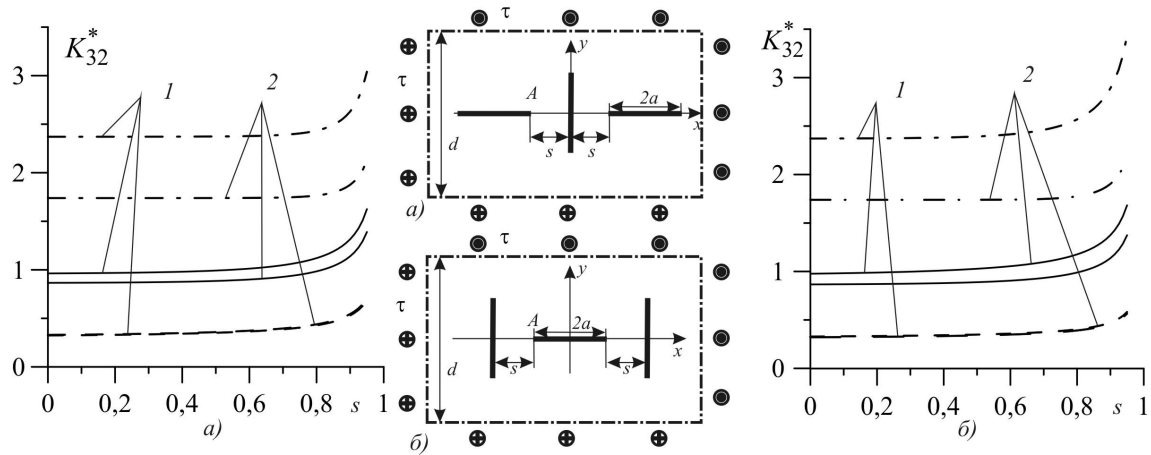


Рисунок 4. Вплив ортотропії матеріалу на узагальнені КІН K_{32}^*

Figure 4. The influence of material orthotropy on the generalized SIF K_{32}^*

Досліджено вплив параметра міри анізотропії c на значення узагальнених КІН у вершині A включення (рис. 4) для двох значень періоду $(0; 3a)$ – криві 1 та $(0; 6a)$ криві 2 на рис. 4. Суцільні лінії відповідають випадку ізотропного матеріалу ($c = 1$), штрихові – $c = 0,1$, штрихпунктирні – $c = 10$. Як бачимо з рис. 4 у результаті зближення крайніх включень до центрального узагальнені КІН зростають, причому їхні значення практично не відрізняються як у випадку горизонтального (рис. 4а) так і вертикального (рис. 4б) розміщення центрального включення. При ортотропії $c > 1$ значення K_{32}^* більші за відповідні КІН ізотропного випадку, а для $c < 1$ коефіцієнти практично збігаються. Також бачимо зростання значень КІН у разі віддалення рядків включень між собою.

Висновки. Побудовано аналітично-числовий підхід до розв’язування задачі антиплоского деформування анізотропного тіла із лінійно періодичною системою тонких неоднорідностей. Обчислено узагальнені КІН у випадку наявності в тілі двох та трьох стовпців паралельних дефектів типу тріщина та абсолютно жорстке чи пружне включення. Верифікацію отриманих результатів здійснено шляхом зіставлення із даними аналітичного розв’язку для ізотропного тіла. Виявлено, що у разі зближення стовпців неоднорідностей УКІН зростають натомість за фіксованої відстані між стовпцями, зі зменшенням періоду повторюваності тріщин КІН зменшуються – спрацьовує екранувальний ефект. За наявності у тілі трьох стовпців абсолютно жорстких включень зі збільшенням (зменшенням) довжини центрального включення КІН збільшуються (зменшуються). Також здійснено розрахунки КІН у випадку зміни кута нахилу одного із включень до осі. Крім того, досліджено вплив механічних характеристик тіла, а саме, міри анізотропії матеріалу на значення КІН. Здійснено розрахунки для параметра міри анізотропії $c < 1$ та $c > 1$, побудовано графічні залежності. Результати роботи можуть бути використані при дослідженні армованих композитів, періодичних систем дефектів гірських породах, регулярних систем дефектів конструкційних елементів із анізотропних матеріалів.

Conclusions. The paper develops analytic-numeric approach for solution of the problem of antiplane shear of anisotropic solid containing a singly periodic set of thin inhomogeneities. The generalized SIF are calculated for the case of a solid containing two or three columns of parallel defects of the type of a crack, a rigid line inclusion, or an elastic inclusion. Verification of the obtained results is proved by comparison of them with the analytic solutions for an isotropic solid. It is observed that in the case of rapprochement of

columns of inhomogeneities the generalized SIF increase. On the contrary, for a constant distance between the columns, the decrease in the period vector causes the decrease in SIF of cracks, which can be explained by the shielding effect. For a solid containing three columns of rigid line inclusions the increase (decrease) in length of central inclusions causes the increase (decrease) in generalized SIF of the latter. Also SIF are calculated in a case of inclined inclusions. Besides, the paper studies the influence of mechanical properties of a solid, in particular its anisotropy (orthotropy), on generalized SIF. The numerical analysis is held for the anisotropy of $c < 1$ and $c > 1$ and corresponding plots are presented. Obtained results can be used in the analysis of reinforced composite materials, periodic sets of defects in rocks, regular systems of defects of structural elements made of anisotropic materials.

Список використаної літератури

1. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Баренблатт, Г.И. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде [Текст] / Г.И. Баренблатт, Г.П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1961. – 25. – № 1. – С. 46 – 55.
4. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наук. думка. – 1976. – 444 с.
5. Стадник, М.М. Определение напряженно-деформированного состояния в теле с системой тонких туннельных включений [Текст] / М.М. Стадник, И.Я. Горбачевский // Львов. – 1986. – 52 с. (Препринт / АН УССР Физ.-мех. ин-т; № 110).
6. Сулим, Г.Т. Періодична задача для системи компланарних тонких стрічок в умовах поздовжнього зсуву [Текст] / Г.Т. Сулим // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – 40. – Вип. 2. – С. 91 – 99.
7. Kondo, T. The interaction between two or periodic parallel cracks in an anisotropic medium under longitudinal shear / T. Kondo // Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll. – 1986. – 22. – No. 4. – P. 179 – 187.
8. Новиков, В.Г. Напряженное состояние плоскости с периодической системой параллельных пар трещин продольного сдвига [Текст] / В.Г. Новиков, Б.М. Тулинов // Прикладная математика и механика. – 1984. – 48. – № 5. – С. 877 – 880.
9. Божидарник В.В. Концентрація напружень на пружних стрічках при поздовжньому зсуві ізотропного масиву [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – Львів: Світ, 1990. – Вип. 246. – С. 11 – 14.
10. Сулим, Г.Т. Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1990. – Вып. 243. – С. 10 – 12.
11. Опанасович, В.К. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень [Текст] / В.К. Опанасович, М.С. Драган // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 71 – 77.
12. Пастернак, Я.М. Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з періодичними системами тонких неоднорідностей [Текст] / Я.М. Пастернак // Вісн. Дон. нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки. – 2012. – № 1. – С. 83 – 90.
13. Ting, T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
14. Bozhydarnyk, V. BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities // V. Bozhydarnyk, Ia. Pasternak, H. Sulym, N. Oliyarnyk // Acta mechanica et automatic. – 2011. – 5, No. 4. – P. 11 – 16.
15. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 951 p.
16. Pasternak, Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678 – 690.
17. Pasternak, Ia.M. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure / Ia.M. Pasternak, H.T. Sulym // Proc. Int. Conf. “Integral Equations – 2010”, 25 – 27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104 – 108.
18. Portela, A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / A. Portela, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – 33. – P. 1269 – 1287.

Отримано 27.08.2013