

УДК 539.3

Я. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; Г. Сулим<sup>2</sup>, докт. фіз.-мат. наук;  
Р. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup> Луцький національний технічний університет

<sup>2</sup> Львівський національний університет ім. Івана Франка

## ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ТРИЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

**Резюме.** На основі формалізму Стро та методів теорії функції комплексної змінної побудовано інтегральні рівняння для магнітоелектропружного півпростору з отворами, тріщинами і тонкими включеннями. У цих рівняннях поряд з існуючими додатково враховано задане на межі півпростору навантаження. На основі отриманих інтегральних співвідношень побудовано схему методу граничних елементів для вивчення магнітоелектропружних півпросторів із тонкими неоднорідностями. Ефективність та достовірність числового алгоритму підтверджено зіставленням розв'язків конкретних задач із відомими в літературі. Отримано розв'язки нових задач для тріщин і тонких включень у магнітоелектропружному півпросторі.

**Ключові слова:** півпростір, анізотропний, магнітоелектропружний, тріщина, тонке деформівне включення.

Ia. Pasternak, H. Sulym, R. Pasternak

## INTEGRAL EQUATIONS OF PLANE MAGNETOELECTROELASTICITY FOR A HALF-SPACE WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

**Summary.** This paper presents a novel approach for obtaining the boundary integral equations of magneto-electroelasticity for a half-space. This approach is based on the complex variable technique and the Stroh formalism. There are two fundamental relations used: the Cauchy integral formula and the Stroh orthogonality relations. The Cauchy integral formula is applied to the Stroh complex functions, which define the solution of 2D magneto-electroelasticity. The boundary conditions at the boundary of the half-space are accounted for to obtain the integral formula for the Stroh complex functions inside the half-space. The Stroh orthogonality relations allow obtaining a useful identity, relating the vector of the Stroh complex functions with the displacement, electric and magnetic potentials and tractions, electric displacement and magnetic induction. This relation is applied to the integral formulae obtained and the Somigliana type identities are derived for a magneto-electroelastic half-space. Using the Sokhotski–Plemelj formula the dual boundary integral equations are obtained.

Derived boundary integral equations have several advantages in comparison with the existing ones: (1) these equations are obtained straightforward using a solid elegant complex variable approach; (2) the kernels are derived in transparent and easy way without any preliminary assumptions; (3) the integral formulae obtained account for the load set at the boundary of a half-space; (4) there are explicit closed-form expressions for all kernels of the dual boundary integral equations, which contain only the constants of the Stroh formalism.

Obtained boundary integral equations along with the previously developed model of a thin magneto-electroelastic inclusion are incorporated into the boundary element method. The approach is verified by comparison of the obtained results of particular problems with those referenced in literature. New results are presented for cracks and thin inclusions in the magneto-electroelastic half-space. It is shown that even under the only mechanical load the significant intensity of electric and magnetic fields is present at the tips of inhomogeneity, which is close to the boundary of the half-space.

**Key words:** half-space, anisotropic, magneto-electroelastic, crack, thin deformable inclusion.

**Вступ.** Розвиток сучасних технологій зумовлює потребу все ширшого врахування у розрахункових моделях високотехнологічних матеріалів взаємодії різноманітних фізичних полів. Зокрема, увагу дослідників зосереджено і на таких продуктах

наукомісткого виробництва, як магнітоелектричні композити [1], що завдяки механічному поєднанню п'єзоелектричної та п'єзوماгнітної компонент дають можливість пов'язати всередині одного матеріалу три різних поля (механічне, електричне та магнітне), і таким чином мають значні перспективи до впровадження у приладових та сенсорних системах.

Для математичного опису магнітоелектропружних (МЕП) матеріалів найчастіше використовують лінійні конститутивні співвідношення [1, 2] між градієнтами полів переміщень, електричного і магнітного потенціалів та полями напружень, електричних зміщень і магнітної індукції. Це дає можливість застосовувати при розрахунку виготовлених із таких матеріалів елементів добре апробовані математичні методи розв'язування крайових задач для лінійних систем диференціальних рівнянь у часткових похідних, зокрема, й методи інтегральних рівнянь.

Зазвичай побудова інтегральних рівнянь лінійної магнітоелектропружності складається з двох етапів (див. [2 – 7]): 1) конструювання теорем взаємності робіт та інтегральних співвідношень типу Сомільяни; 2) отримання фундаментального розв'язку. Якщо перше завдання розв'язується однотипними методами як у двовимірному, так і тривимірному випадках, то для вирішення другого використовують різноманітні математичні підходи. Зокрема, для плоских задач широкого використання набув формалізм Стро [2, 7, 8], що подає розв'язок задач магнітоелектропружності через п'ять аналітичних функцій комплексного аргументу.

У роботах [9 – 12] було з'ясовано, що інтегральні рівняння плоских магнітоелектропружності та термо(електро)пружності можна отримати із використанням єдиного підходу, що поєднує формалізм Стро із методами теорії функції комплексної змінної (ТФКЗ). Перевагою запропонованої методології є отримання у доволі простий спосіб компактних виразів для ядер дуальних інтегральних рівнянь і прозора фізична інтерпретація результатів.

Метою цієї роботи є застосування такого комплексного підходу також і до побудови інтегральних рівнянь магнітоелектропружності для півпростору. Окрім отриманих раніше переваг це дасть можливість враховувати задане на межі півпростору навантаження без необхідності побудови відповідних функцій Гріна. Крім цього, практичний інтерес до отримання таких рівнянь зумовлений тим, що досліджень МЕП півпросторів із тріщинами та тонкими включеннями стосуються лише поодинокі роботи [1, 13 – 15], а розв'язування відповідних задач дає можливість оцінити вплив крайових ефектів при аналізі неоднорідних масивних тіл.

**1. Основні співвідношення магнітоелектропружності. Формалізм Стро.** Розглянемо стаціонарні (квазістаціонарні) фізико-механічні поля, що діють в анізотропному МЕП тілі, з яким пов'язана глобальна система координат  $Ox_1x_2x_3$ . Вивчатимемо лише двовимірні електричні, магнітні та механічні поля, за яких переміщення, електричний та магнітний потенціали точок циліндричного тіла не змінюються з координатою  $x_3$  ( $u_{i,3} \equiv 0$ ,  $E_3 = -\phi_{,3} \equiv 0$ ,  $H_3 = -\psi_{,3} \equiv 0$ ). Тобто електромагнітні та механічні поля у кожному нормальному до осі  $x_3$  перерізі  $S$  тіла будуть однаковими. Рівняння рівноваги і теорема Гаусса для електричного й магнітного полів у стаціонарному випадку набудуть вигляду [1, 2]

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad D_{i,i} - q = 0, \quad B_{i,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Тут  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $f_i$  – компоненти вектора об'ємних сил;  $D_i$  – електричне зміщення;  $q$  – густина вільних зарядів, яка для діелектрика, зазвичай, дорівнює нулю;  $B_i$  – компоненти вектора магнітної індукції. У формулах прийняте правило Айнштейна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в нижніх

індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми, тобто  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ .

Конститутивні співвідношення лінійної магнітоелектропружності відповідно до [1, 2] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkm} \varepsilon_{km} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p, \\ D_i &= e_{ikm} \varepsilon_{km} + \kappa_{ip} E_p + \beta_{ip} H_p, \\ B_i &= h_{ikm} \varepsilon_{km} + \beta_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  – деформації;  $E_i = -\phi_{,i}$ ,  $H_i = -\psi_{,i}$  – компоненти векторів напруженості електричного та магнітного полів відповідно;  $u_i$  – складові вектора переміщень точок тіла;  $\phi$ ,  $\psi$  – електричний та магнітний потенціали;  $C_{ijkm}$  – компоненти тензора пружних сталей (тензора жорсткості; модулі пружності);  $e_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  – п'єзоелектричні та п'єзوماгнітні сталі;  $\kappa_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  – діелектрична, магнітна та електромагнітна проникності матеріалу.

Завдяки використанню узагальнених величин [2, 6, 16]

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi; \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = 0; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j; \\ \tilde{C}_{ijkm} &= C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm}, \quad \tilde{C}_{ij5m} = h_{mij}, \\ \tilde{C}_{5jkm} &= h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \quad \tilde{C}_{4j5m} = -\beta_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\beta_{jm} \quad (i, k = 1, 2, 3; j, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

визначальні співвідношення (2) можна записати в уніфікованому компактному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m} \quad (i, k = 1, \dots, 5; j, m = 1, 2). \quad (4)$$

З урахуванням позначень (3) балансові рівняння (1) стаціонарних механічних, електричних та магнітних полів набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i \equiv \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,jm} + \tilde{f}_i = 0 \quad (i, k = 1, \dots, 5; j, m = 1, 2). \quad (5)$$

Згідно з формалізмом Стро загальний однорідний розв'язок рівнянь (5) можна подати у вигляді [2, 7, 8, 16, 17]

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A} \mathbf{f}(z_*)], \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B} \mathbf{f}(z_*)], \quad (6)$$

де  $\tilde{\mathbf{u}}$  – розширений вектор переміщень;  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  – розширена функція напружень, що дає змогу обчислити значення розширених напружень у довільній точці таким чином [2, 7, 8]:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 \equiv [\tilde{\sigma}_{i1}] = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,2}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \equiv [\tilde{\sigma}_{i2}] = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,1}. \quad (7)$$

Вектори-стовпці  $\mathbf{a}_\alpha$  та  $\mathbf{b}_\alpha$  матриць  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5]$  і  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5]$  визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} \boldsymbol{\xi} = p \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{N}^T \boldsymbol{\eta} = p \boldsymbol{\eta}, \quad (8)$$

де  $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T$ ,  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T - \mathbf{Q}$ ;  $Q_{ik} = \tilde{C}_{i1k1}$ ,  $T_{ik} = \tilde{C}_{i2k2}$ ,  $R_{ik} = \tilde{C}_{i1k2} = \tilde{C}_{k2i1}$ ;  $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^T$  – правий власний вектор;  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^T$  – лівий власний вектор матриці  $\mathbf{N}$ ; верхній індекс «Т» означає операцію транспонування. Вектори  $\boldsymbol{\xi}_\alpha$  та  $\boldsymbol{\eta}_\beta$  для власних значень  $p_\alpha$ ,  $p_\beta$  нормують умовою

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha^T \boldsymbol{\eta}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Укладені у вектор  $\mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_5(z_5)]^T$  комплексні потенціали Стро  $F_\alpha(z_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ) є аналітичними функціями комплексних аргументів

$z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$ , де  $p_\alpha$  – власні значення задачі (8) із додатною уявною частиною.  
Записавши умови ортогональності (9) у формі [8]

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^T + \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{I}, \quad (10)$$

на основі (6) легко обчислити значення комплексних потенціалів Стро через дійсні розширені функції переміщень  $\tilde{\mathbf{u}}$  та напружень  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{u}}. \quad (11)$$

**2. Побудова інтегральних подань комплексних потенціалів, розширених переміщень та напружень для півпростору.** Розглянемо магнітоелектропружний півпростір  $x_2 > 0$ , що містить систему гладких замкнених контурів  $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$ .

Відповідно до інтегральної формули Коші [18] вектор  $\mathbf{f}(z_*)$  комплексних потенціалів Стро у довільній точці  $z_*$  ( $\text{Im } z_* > 0$ ) півпростору можна обчислити за контурними значеннями цього вектора

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1). \quad (12)$$

Тут  $\langle F(z_*) \rangle = \text{diag}[F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_5(z_5)]$ . Додатним напрямом обходу контурів є той, за якого зайнята тілом область залишається ліворуч.

Очевидно, що за межами півпростору інтеграли Коші (12) дорівнюють нулю, тобто для точок  $\bar{z}_*$  формула (12) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Нехай на межі  $x_2 = 0$  півпростору задані крайові умови першого роду, тобто відомі значення вектор-функції  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_1, x_2 = 0) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1)$ . Тоді з урахуванням (11) перепишемо (12) у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Так само на основі (13) отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) = - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1). \quad (15)$$

Перейшовши до комплексно спряжених величин та врахувавши, що функції  $\tilde{\mathbf{u}}$  та  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  є дійсними, матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \bar{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) = - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*}{\bar{\tau}_* - z_*} \right\rangle \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1). \quad (16)$$

Інтегральні подання (14), (16) містять невідому функцію  $\tilde{\mathbf{u}}(x_1)$  розширених переміщень поверхні півпростору, яку доцільно виключити. Тому з урахуванням умов ортогональності (10) запишемо другий інтеграл у (14) так:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) = \\ &= - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_{\beta} \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_{\beta}} \right\rangle \overline{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Тут  $\mathbf{I}_1 = \text{diag}[1, 0, 0, 0, 0]$ ,  $\mathbf{I}_2 = \text{diag}[0, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\mathbf{I}_3 = \text{diag}[0, 0, 1, 0, 0]$  і т.д.

Підставивши (16) у (17), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}}(x_1) &= \\ &= \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_{\beta} \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*}{\bar{\tau}_* - z_{\beta}} \right\rangle \overline{\mathbf{f}}(\bar{\tau}_*) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_{\beta} \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_{\beta}} \right\rangle \overline{\mathbf{A}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1) = \\ &= \sum_{\beta=1}^5 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}}(\bar{\tau}_*) + \sum_{\beta=1}^5 \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{A}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1). \end{aligned} \quad (18)$$

На основі (18) інтегральна формула (14) для комплексних потенціалів півпростору набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^5 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}}(\bar{\tau}_*) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle [\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{A}}^T] \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1). \end{aligned} \quad (19)$$

З огляду на співвідношення ортогональності (10)  $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{A}}^T$ . Тому (19) остаточно запишемо так:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \sum_{\beta=1}^5 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}}(\bar{\tau}_*) + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Для побудови інтегральних подань розширених вектора переміщень і тензора напружень у (20) зручно перейти до контурних інтегралів, що містять крайові значення цих величин. Для цього використаємо подання (11) для комплексних потенціалів та врахуємо, що величини  $\tilde{\mathbf{u}}$  та  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  є дійсними. Тоді на основі (20) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma} \left[ \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{A}}^T \right] \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tau_*) + \right. \\ &\left. + \int_{\Gamma} \left[ \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{B}}^T \right] \tilde{\mathbf{u}}(\tau_*) + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(x_1) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здійсимо у (21) інтегрування частинами для виразів, що містять крайові значення розширеної функції напружень. При цьому врахуємо, що відповідно до (7)

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 n_2 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 n_1 = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j n_j = -\tilde{\mathbf{t}}, \quad (22)$$

де  $s$  – дійсна дугова координата контуру  $\Gamma$ ;  $n_j$  – компоненти одиничного вектора  $\mathbf{n}$  зовнішньої нормалі;  $\tilde{\mathbf{t}}$  – розширений вектор напружень. Тоді з огляду на умову

глобальної рівноваги  $\tilde{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(b) = 0$ , де  $a, b$  – початок і кінець контуру інтегрування, інтегральне подання (21) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) = & \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma} \left\langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{\tau}_\beta(s) - z_*) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right] \tilde{\mathbf{t}}(s) ds + \\ & + \int_{\Gamma} \left[ \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{d\bar{\tau}_\beta}{\bar{\tau}_\beta - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right] \tilde{\mathbf{u}}(\tau_*) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \ln(x_1 - z_*) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Тут  $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$  – дійсний диференціал дуги  $\Gamma$ ;  $\tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) = -d\tilde{\varphi}_0(x_1)/dx_1$  – задане крайовими умовами значення розширеного вектора напружень на поверхні  $x_2 = 0$  півпростору.

Для уніфікації зведемо всі інтеграли у (23) до криволінійних інтегралів першого роду. Враховуючи, що  $d\tau_\alpha = dx_1 + p_\alpha dx_2 = -(n_2(s) - p_\alpha n_1(s)) ds$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) = & \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma} \left\langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{\tau}_\beta(s) - z_*) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right] \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\ & - \int_{\Gamma} \left[ \left\langle \frac{n_2(s) - p_* n_1(s)}{\tau_*(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_\beta n_1(s)}{\bar{\tau}_\beta(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right] \tilde{\mathbf{u}}(s) ds + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \ln(x_1 - z_*) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Отже, відповідно до (6) та (24) можна записати інтегральне подання розширеного вектора переміщень у довільній точці  $\xi$  ( $\xi \notin \Gamma$ ) всередині півпростору

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\xi) = & 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A} \mathbf{f}(z_*)] = \\ = & \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^{\text{hs}*}(x_1, \xi) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (25)$$

де  $d\Gamma(\mathbf{x}) \equiv ds(\mathbf{x})$ , а ядра означені виразами

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \right\rangle \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right], \\ \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_* n_1(\mathbf{x})}{Z_*(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right], \\ \mathbf{U}^{\text{hs}*}(x_1, \xi) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln(x_1 - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \right], \quad Z_*(\mathbf{x}) = x_1 + p_* x_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Після диференціювання (24) запишемо

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(z_*) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ -\int_{\Gamma} \left\langle \frac{1}{\tau_*(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{1}{\bar{\tau}_\beta(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right] \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\ &- \int_{\Gamma} \left\langle \frac{n_2(s) - p_* n_1(s)}{(\tau_*(s) - z_*)^2} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_\beta n_1(s)}{(\bar{\tau}_\beta(s) - z_*)^2} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right] \tilde{\mathbf{u}}(s) ds + \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (27)$$

і на основі (7) та (6) отримаємо інтегральне подання розширених напружень у точці  $\xi$  ( $\xi \notin \Gamma$ ) всередині півпростору

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j(\xi) = \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_j^{\text{hs}*}(x_1, \xi) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1, \quad (28)$$

де ядра задані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \left[ \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*}{Z_*(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*}{\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right] \right\}, \\ \mathbf{D}_j^{\text{hs}*}(x_1, \xi) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*}{x_1 - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \right\}, \\ \mathbf{S}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*)(n_2(\mathbf{x}) - p_* n_1(\mathbf{x}))}{(Z_*(\mathbf{x} - \xi))^2} \right\rangle \mathbf{B}^T \right\} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_* \right\rangle \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta n_1(\mathbf{x})}{(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi))^2} \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Легко зауважити, що співвідношення (25) є розширеною тотожністю Сомільяни для магнітоелектропружності [7]. Таким чином, відповідно до [7] ядра  $\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi)$  та  $\mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi)$  відповідають транспонованим функціям Гріна для переміщень і вектора напружень у точці  $\mathbf{x}$  від дії прикладеної у точці  $\xi$  зосередженої сили. Згідно з (26)

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^{\text{hs}})^T &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_\beta (\mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}})^T \left\langle \ln (\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{A}^T \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \bar{\mathbf{A}} \left\langle \ln (\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle (\mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}})^T \mathbf{I}_\beta \mathbf{A}^T \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Відповідно до [8] матриця  $i\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$  є ортогональною, тому (30) можна записати

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^{\text{hs}})^T &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \right\rangle \mathbf{A}^T - \sum_{\beta=1}^5 \bar{\mathbf{A}} \left\langle \ln (\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{I}_\beta \mathbf{A}^T \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \left\langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{A} \left\langle \ln (Z_*(\mathbf{x}) - \bar{Z}_\beta(\xi)) \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right], \end{aligned} \quad (31)$$

що відповідає поданому у [7, 8] фундаментальному розв'язку для півпростору. Аналогічно верифікується ядро  $\mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi)$ .

Перевагами запропонованої методики побудови інтегральних подань розширених

вектора переміщень та тензора напружень  $\epsilon$ : 1) використання єдиного підходу на основі теорії функції комплексної змінної, а не окремо теорем взаємності для побудови рівнянь та ТФКЗ для отримання їхніх ядер; 2) прозорість та простота отримання інтегральних формул без попередніх припущень про структуру ядер [7, 8]; 3) безпосереднє урахування в інтегральних формулах заданого на поверхні півпростору навантаження; 4) побудова у явному вигляді та лише через сталі формалізму Стро ядер (29) інтегральних подань напружень, що в подальшому продуктивно використовуються при побудові дуальних інтегральних рівнянь; 5) зручність подання (24) комплексних потенціалів за потреби здійснення диференціювання за комплексними аргументами.

У подібний спосіб можна також отримати відповідні залежності й у разі аналізу другої основної крайової задачі для півпростору.

**3. Побудова інтегральних рівнянь для магнітоелектропружного півпростору.** Як правило, крайові умови на контурах  $\Gamma$  задають лише половину із компонент вектор-функцій  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  та  $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  ( $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ ). Однак відповідно до (25) та (28) для обчислення розширених переміщень та напружень у півпросторі необхідно знати всі компоненти цих крайових функцій. Для їхнього визначення слід спрямувати точку внутрішності до межі й на основі (25) чи (28) отримати інтегральне рівняння задачі. При цьому запропонований підхід на основі ТФКЗ дає можливість спростити побудову сингулярних інтегральних рівнянь задачі, використовуючи формулу Сохоцького – Племелі [18], яка для гладкої дуги  $\Gamma$  так пов'язує граничне значення інтеграла із його головним значенням:

$$\lim_{z \rightarrow \tau_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2} \phi(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0}. \quad (32)$$

Тут вважається, що точка  $z$  прямує до точки  $\tau_0$  межі  $\Gamma$  зсередини області; CPV означає головне значення інтеграла (Cauchy Principal Value).

Отже, відповідно до (12), (24), (25) та (32) для гладких замкнених контурів  $\Gamma$  у магнітоелектропружному півпросторі отримуємо таке інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^{\text{hs}*}(x_1, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (33)$$

де RPV – головне значення невластивого інтеграла (Riemann Principal Value).

При розв'язуванні задач для тіл із розрізами, інтегральні рівняння (33) вироджуються, тому слід застосовувати дуальні гіперсингулярні інтегральні рівняння. Для їхньої побудови і в цьому випадку можна скористатися засобами ТФКЗ, зокрема, теоремою про голоморфність кусково-аналітичних функцій [18]

$$\frac{1}{2} \Sigma \phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_c} \frac{\Delta \phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau + \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau \right] \quad \forall \tau_0 \in \Gamma_c, \quad (34)$$

де  $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$ ,  $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$ ;  $\Gamma_c$  – система розімкнених дуг на комплексній площині; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_c^+$  та  $\Gamma_c^-$ , утворених розрізами  $\Gamma_c$ .

На основі (24), (25), (28) та (34) отримуємо таку систему дуальних інтегральних рівнянь для магнітоелектропружного півпростору:

- точка колокації у лежить на гладкій поверхні  $\Gamma$  замкненого контуру:



$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_c} [\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^{\text{hs}*}(x_1, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1; \quad (35)$$

- точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій поверхні  $\Gamma_c$  розрізу:

$$\frac{1}{2} \Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^{\text{hs}*}(x_1, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{D}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_j^{\text{hs}*}(x_1, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}_0(x_1) dx_1 \right].$$

Тут HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром (Hadamard Principal Value).

Дуальні інтегральні рівняння (35), (36) сумісно з моделями тонких МЕР включень [6], які можна подати у формі функційних зв'язків

$$\Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^u(\mathbf{y}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})), \quad \Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^t(\mathbf{y}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})) \quad (37)$$

чи навіть функціоналів у разі використання нелінійних моделей матеріалів, дають можливість розв'язувати задачі для півпросторів із отворами, тріщинами та тонкими включеннями, зокрема, й числово за допомогою модифікованого методу граничних елементів [6].

Відповідно до [6, 10] крайові функції стрибків напружень та переміщень поблизу вершин тонких неоднорідностей характеризуються узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції (КІНЕЗМІ), що визначаються в локальній системі координат із початком у вершині через функції стрибка у вершині неоднорідності за формулами

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}(s), \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(s), \quad (38)$$

де  $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}, K_{41}, K_{51}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}, K_{42}, K_{52}]^T$ ;  $K_{ij}$  – узагальнені КІНЕЗМІ. Для тріщини  $K_{11} = K_I$ ,  $K_{21} = K_{II}$ ,  $K_{31} = K_{III}$ ,  $K_{41} = K_{IV} \equiv K_D$ ,  $K_{51} = K_V \equiv K_B$ ,  $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = \mathbf{0}$ , де  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ,  $K_{IV} \equiv K_D$ ,  $K_V \equiv K_B$  – класичні КІНЕЗМІ теорії тріщин [2];  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T$  – дійсний тензор Barnett – Lothe [2].

Дві перші компоненти  $K_{12}^{(2)}$ ,  $K_{22}^{(2)}$  вектора  $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$  позначені верхнім індексом «(2)» для того, щоб відрізнити їх від узагальнених КІН  $K_{12}$  та  $K_{22}$  [19], введених для суто пружних задач. Величини  $K_{12}$  та  $K_{22}$  можна отримати із вектора  $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$  за формулою [6]

$$k_i^{(2)} = S_{ji} \tilde{k}_j^{(2)} \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, 5). \quad (39)$$

Тут  $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{22}, K_{12}]^T$  – вектор узагальнених КІН;  $\mathbf{S} = \sqrt{-1} (2\mathbf{A} \mathbf{B}^T - \mathbf{I})$  – другий дійсний тензор Barnett – Lothe [2].

У локальній системі координат із центром у вершині неоднорідності та

спрямованою уздовж дотичної до серединної поверхні віссю  $Ox_1$  поля переміщень, електричного потенціалу, напружень та електричних зміщень біля вістря включення можна визначити за значеннями узагальнених КІНЕЗМІ за формулами [6, 10]

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}, \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}. \quad (41)$$

Тобто узагальнені КІНЕЗМІ повністю характеризують асимптотичне поле напружень, електричних зміщень та магнітної індукції в околі вершин тріщин і тонких включень.

**4. Числові приклади.** *4.1. Верифікація методу.* Для верифікації отриманих дуальних інтегральних рівнянь (35), (36) розглянемо два приклади розрахунку плоскої деформації ізотропного півпростору, коли наявні лише або стрибки вектора переміщень (тріщина), або розриви поля напружень (абсолютно жорстке тонке включення). Вважається, що залежна від коефіцієнта Пуассона матеріалу стала Мусхелішвілі півпростору дорівнює  $\kappa = 2$ .

На рис. 1 зображено схему задачі для навантаженої внутрішнім тиском прямолінійної тріщини завдовжки  $2a$ , розташованої в ізотропному півпросторі. Отриманий запропонованим підходом із використанням модифікованого методу граничних елементів [6] числовий розв'язок цієї задачі зіставлено із даними довідника [20] у табл. 1.

Табл. 1 засвідчує, що відхилення між розрахованими за допомогою запропонованої схеми МГЕ значеннями КІН та даними праці [20] не перевищує 0,5 %, що свідчить про правильність і високу точність підходу. Зважаючи на те, що при моделюванні поверхні тріщини використано всього 21 тривузловий граничний елемент, можна стверджувати і про його ефективність.

У табл. 2 зіставлено нормовані значення  $k_1 = 2\kappa K_{12} / (p(\kappa - 1)\sqrt{\pi a})$  узагальненого КІН  $K_{12}$  абсолютно жорсткого включення (рис. 2) із даними, розрахованими у працях [21, 22]. Знову ж бачимо дуже добру узгодженість результатів розрахунку трьома різними підходами. При цьому, як і в попередній задачі, для моделювання поверхні тонкого включення використано всього 21 граничний елемент.

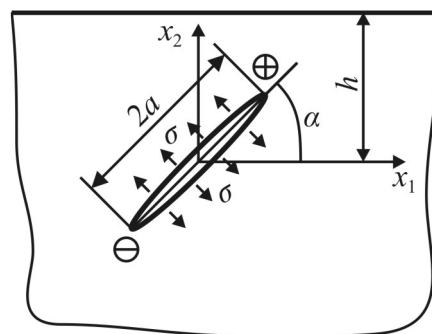
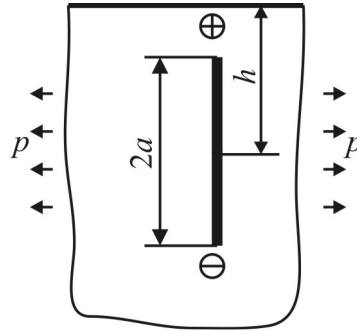


Рисунок 1. Внутрішня нахилена тріщина в півпросторі

Figure 1. Internal inclined crack in the half-space



**Рисунок 2.** Жорстке включення у півпросторі

**Figure 2.** Rigid line inclusion in the half-space

Таблиця 1

КІН тріщини в півпросторі ( $\delta = h/a - \sin \alpha$  – нормована півдовжиною неоднорідності відстань від її вістря до межі півпростору)

$\delta$	$\alpha$	$\frac{K_I^+}{\sigma\sqrt{\pi a}}$		$\frac{K_I^-}{\sigma\sqrt{\pi a}}$		$\frac{K_{II}^+}{\sigma\sqrt{\pi a}}$		$\frac{K_{II}^-}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	
		МГЕ	[20]	МГЕ	[20]	МГЕ	[20]	МГЕ	[20]
4	90	1,0095	1,009	1,0116	1,011	0,0000	0	0,0000	0
	75	1,0109	1,011	1,0132	1,013	0,0028	0,0028	0,0022	0,0022
	60	1,0149	1,015	1,0177	1,017	0,0053	0,0053	0,0037	0,0037
	45	1,0211	1,021	1,0244	1,024	0,0071	0,0071	0,0038	0,0038
	30	1,0289	1,029	1,0323	1,032	0,0080	0,0079	0,0022	0,0022
	15	1,0375	1,037	1,0398	1,039	0,0075	0,0075	-0,0010	-0,0010
	0	1,0454	1,045	1,0454	1,045	0,0055	0,0055	-0,0055	-0,0055
1	90	1,0542	1,054	1,0916	1,091	0,0000	0	0,0000	0
	75	1,0622	1,062	1,1038	1,104	0,0200	0,0200	0,0095	0,0097
	60	1,0872	1,087	1,1400	1,140	0,0410	0,0410	0,0126	0,0128
	45	1,1322	1,132	1,1993	1,199	0,0645	0,0645	0,0027	0,0029
	30	1,2039	1,204	1,2802	1,281	0,0924	0,0925	-0,0272	-0,0271
	15	1,3170	1,317	1,3822	1,383	0,1287	0,1290	-0,0853	-0,0856
	0	1,5099	1,511	1,5099	1,511	0,1841	0,1849	-0,1841	-0,1849
0,4	90	1,1126	1,112	1,2542	1,254	0,0000	0	0,0000	0
	75	1,1282	1,128	1,2835	1,284	0,0445	0,0446	0,0094	0,0103
	60	1,1786	1,178	1,3727	1,375	0,0948	0,0950	0,0014	0,0029
	45	1,2766	1,277	1,5275	1,533	0,1597	0,1599	-0,0439	-0,0429
	30	1,4558	1,456	1,7645	1,773	0,2569	0,2575	-0,1557	-0,1571
	15	1,8197	1,821	2,1379	2,149	0,4389	0,4410	-0,3941	-0,4004
	0	2,8982	2,905	2,8982	2,905	0,9782	0,9940	-0,9782	-0,9940

Таблиця 2

Узагальнені КІН жорсткого включення

$\lambda = a/h$	0,999	0,5	0,2	0,1
$k_1^-$ , МГЕ	0,2169	0,2391	0,2478	0,2493
$k_1^+$ , МГЕ	0,0411	0,2316	0,2474	0,2493
$k_1^-$ , [21]	0,2170	0,2393	0,2480	0,2495
$k_1^+$ , [21]	0,0277	0,2318	0,2476	0,2494
$k_1^-$ , [22]	0,2169	0,2392	0,248	0,2495
$k_1^+$ , [22]	–	0,2318	0,2476	0,2494

4.2. Непроникна тріщина в МЕП півпросторі. Розглянемо МЕП півпростір із магнітоелектричного композиту  $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$  з об'ємною часткою наповнення  $V_f = 0,5$ . Вісь симетрії (напрямок електричної та магнітної поляризації) спрямовано вздовж осі  $Ox_2$ . З урахуванням вибраної осі симетрії усереднені властивості композиту [4, 23] є такими: пружні сталі (ГПа) –  $C_{11} = C_{33} = 226$ ,  $C_{12} = C_{23} = 124$ ,  $C_{13} = 125$ ,  $C_{22} = 216$ ,  $C_{44} = C_{66} = 44$ ,  $C_{55} = (C_{11} - C_{12})/2$ ; п'єзоелектричні коефіцієнти (Кл/м<sup>2</sup>) –  $e_{21} = e_{23} = -2,2$ ,  $e_{22} = 9,3$ ,  $e_{16} = e_{34} = 5,8$ ; п'єзوماгнітні коефіцієнти (Тл) –  $h_{21} = h_{23} = 290,2$ ,  $h_{22} = 350$ ,  $h_{16} = h_{34} = 275$ ; діелектричні проникності (нФ/м) –  $\kappa_{11} = 5,64$ ,  $\kappa_{22} = 6,35$ ; магнітні проникності (нГ/м) –  $\mu_{11} = 297 \cdot 10^3$ ,  $\mu_{22} = 83,5 \cdot 10^3$ ; електромагнітні проникності (нКл/(А·м)) –  $\beta_{11} = 5,367 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta_{22} = 2,7375$ .

Розглянутий МЕП півпростір містить прямолінійну електрично та магнітно непроникну тріщину, що перебуває під дією лише внутрішнього сталого тиску  $\sigma$  так, як зображено на рис. 1. У табл. 3 подано отримані значення КІНЕЗМІ цієї тріщини залежно від кута її нахилу та глибини залягання. При цьому для нормування використано такі розмірні величини:  $D^* = 10^{-9} \sigma \cdot \text{Кл} \cdot \text{Н}^{-1}$ ,  $B^* = 10^{-9} \sigma \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}$ .

Таблиця 3

КІНЕЗМІ тріщини в МЕП півпросторі ( $\delta = h/a - \sin \alpha$ )

$\delta$	$\alpha$	$\frac{K_I^+}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^-}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}^+}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}^-}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_D^+}{D^*\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_D^-}{D^*\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_B^+}{B^*\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_B^-}{B^*\sqrt{\pi a}}$
4	90	1,0092	1,0112	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	75	1,0105	1,0127	0,0025	0,0020	0,0003	-0,0003	0,0109	-0,0130
	60	1,0141	1,0169	0,0050	0,0035	0,0007	-0,0006	0,0210	-0,0249
	45	1,0201	1,0234	0,0069	0,0038	0,0011	-0,0011	0,0299	-0,0351
	30	1,0279	1,0312	0,0080	0,0025	0,0016	-0,0016	0,0378	-0,0432
	15	1,0365	1,0388	0,0076	-0,0007	0,0021	-0,0021	0,0459	-0,0496
	0	1,0445	1,0445	0,0054	-0,0054	0,0025	-0,0025	0,0548	-0,0548
	1	90	1,0526	1,0890	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
75		1,0600	1,1004	0,0183	0,0086	0,0020	-0,0018	0,0631	-0,0960
60		1,0834	1,1350	0,0386	0,0120	0,0044	-0,0041	0,1281	-0,1938
45		1,1265	1,1927	0,0622	0,0035	0,0078	-0,0075	0,2016	-0,2971
30		1,1961	1,2722	0,0901	-0,0249	0,0125	-0,0123	0,3007	-0,4142
15		1,3062	1,3715	0,1252	-0,0817	0,0191	-0,0191	0,4651	-0,5631
0		1,4933	1,4933	0,1780	-0,1780	0,0287	-0,0287	0,7832	-0,7832
0,4		90	1,1097	1,2485	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	75	1,1243	1,2768	0,0413	0,0081	0,0043	-0,0035	0,1265	-0,2223
	60	1,1719	1,3639	0,0898	0,0006	0,0096	-0,0085	0,2677	-0,4619
	45	1,2659	1,5158	0,1535	-0,0429	0,0174	-0,0166	0,4545	-0,7481
	30	1,4387	1,7463	0,2477	-0,1528	0,0298	-0,0304	0,7677	-1,1483
	15	1,7887	2,1029	0,4222	-0,3862	0,0525	-0,0555	1,4514	-1,8495
	0	2,8232	2,8232	0,9478	-0,9478	0,1132	-0,1132	3,6041	-3,6041

Із табл. 3 бачимо, що КІН  $K_I$  та  $K_{II}$  тріщини в МЕП півпросторі є близькими до відповідних значень для ізотропного (табл. 2). Це зумовлено невеликою мірою анізотропією обраного МЕП матеріалу. Проте для останнього характерне істотне зростання КІЕЗ  $K_D$  та КІМІ  $K_E$  із наближенням тріщини до поверхні півпростору,

особливо, коли вони взаємно перпендикулярні. Тому при визначенні граничного стану МЕП тіл із приповерхневими тріщинами дуже важливо враховувати взаємодію полів та у зв'язку із цим рахуватися з можливістю появи ненульових значень КІЕЗ та КІМІ навіть за дії одного лише механічного навантаження.

4.3. *Тонке пружне ізотропне включення в МЕП півпросторі.* Розглянемо МЕП півпростір  $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ , властивості якого подано в попередньому прикладі. Півпростір містить деформівне тонке стрічкове включення завдовжки  $2a$ , розташоване на відстані  $\delta \cdot a$  паралельно до межі. Товщина включення  $2h$  ( $h = 0,01a$ ). Відносна жорсткість включення означимо величиною  $k = G^i/C_{66}$ , де  $G^i$  – модуль зсуву матеріалу включення. Діелектрична та магнітна проникності включення дорівнюють відповідним сталим для вакууму ( $\kappa^i = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-3}$  нФ/м;  $\mu^i = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-2}$  нГ/м), тобто вважається, що включення практично не поляризується. Коефіцієнт Пуассона для включення вважатимемо рівним 0,3. На рис. 3 зображено силову схему задачі (задане лише однорідне поле напружень розтягу на безмежності) та розраховану при розбитті середньої лінії тонкого включення на 21 граничний елемент залежність нормованих значень узагальнених КІНЕЗМІ від відносної жорсткості  $k$  тонкого включення. Суцільні криві відповідають значенню  $\delta = 0,5$ , штрихові –  $\delta = 1$ , штрих-пунктирні –  $\delta = 10$ , пунктирні –  $\delta = 0,1$ .

Із рис. 3 бачимо, що зближення включення з межею півпростору зумовлює істотне зменшення за модулем узагальненого КІМІ  $K_{51}$  та усіх інших КІНЕЗМІ. Збільшення відносної жорсткості  $k$  включення зумовлює очевидне зростання узагальнених КІНЕЗМІ. Для випадку  $\delta = 10$  граничні значення КІНЕЗМІ жорсткого включення відрізняються від значень для такого ж включення у безмежному МЕП середовищі [24] менше як на 0,3 %.

Для близько розташованого до межі півпростору включення ( $\delta = 0,1$ ) узагальнений КІН  $K_{22}$  та КІМІ  $K_{51}$  виходять на значення своїх асимптот при істотних величинах відносної жорсткості  $k$  включення, що слід пов'язувати із впливом згину останнього (при нехтуванні впливом цього ефекту в математичній моделі тонкої неоднорідності таке поведіння вже не є характерним).

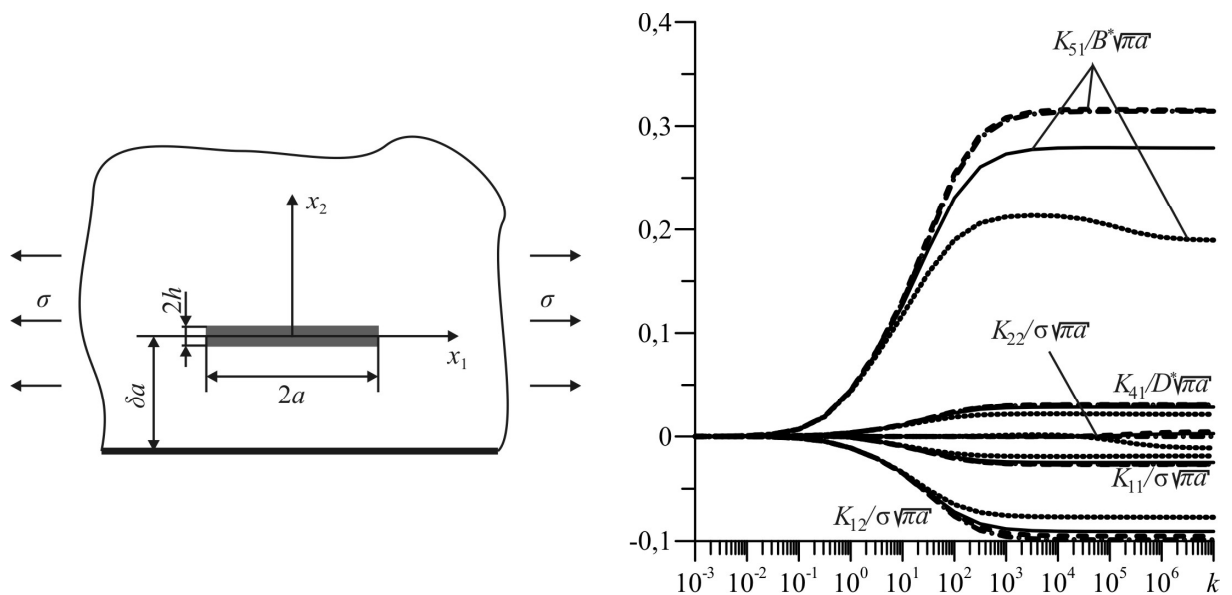


Рисунок 3. Узагальнені КІНЕЗМІ тонкого діелектричного ізотропного пружного включення в МЕП півпросторі

Figure 3. Generalized SEDMIIF of a thin dielectric isotropic elastic inclusion in the MEE half-space

**Висновки.** Формалізм Стро у поєднанні з апаратом ТФКЗ дає можливість зручно, просто й математично коректно отримати інтегральні рівняння плоскої магнітоелектропружності не тільки для безмежних областей, а й для півпростору, враховуючи при цьому задане на його межі магнітоелектросилове навантаження. Ядра отриманих дуальних рівнянь задачі записані у явній формі, причому лише через комплексні сталі формалізму Стро, що істотно спрощує обчислювальні алгоритми методу граничних елементів (зокрема, обчислення ядер для напружень не вимагає постійного визначення добутку розширеного тензора магнітоелектропружних сталей на похідні від ядер на переміщення [7], що практично на порядок скорочує час розрахунку матриці жорсткості системи). Розроблений числовий алгоритм засвідчив свою достовірність, високу точність та ефективність при розрахунку контрольних прикладів та дав змогу розв'язати нові задачі для тонких включень, а також зробити висновок про потребу врахування магнітоелектричних ефектів навіть у разі впливу суто механічного навантаження.

**Conclusions.** The Stroh formalism combined with the complex variable approach allows convenient, easy and mathematically correct obtaining of the boundary integral equations of plane magneto-electro-elasticity not only for infinite domains, but also for a half-space, accounting for a given magneto-electro-mechanical load at its boundary. The kernels of the obtained dual equations are written explicitly in the closed-form, and only through the complex constants of the Stroh formalism, which significantly simplifies the computational complexity of the boundary element algorithm (in particular, the computation of stress kernels does not require permanent evaluation of the product of extended magneto-electro-elasticity tensor and the derivatives of displacement kernels [7], which significantly decrease time required for calculation of the stiffness matrix). Developed numerical algorithm proved its validity, high accuracy and efficiency during calculation of test problems and allowed solving new problems for thin inclusions. It allowed concluding that the magneto-electro-elastic effects in the half-space should be accounted for even under the only mechanical loading.

### Список використаної літератури

1. Калоеров, С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел [Текст] / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
2. Qin Q.H. Green's function and boundary elements of multifield materials / Q.H. Qin. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
3. Ding H. A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media / H. Ding, A. Jiang // Computers and Structures. – 2004. – 82. – P. 1599 – 1607.
4. Fracture of magneto-electro-elastic composite materials using boundary element method (BEM) / F. Garcia-Sanchez, R. Rojas-Diaz, A. Saez, Ch. Zhang // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2007. – 47. – P. 192 – 204.
5. Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media / X. Zhu, Z. Huang, A. Jiang, W.Q. Chen, N. Nishimura // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2010. – 34. – P. 927 – 933.
6. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – 35, No. 4. – P. 678 – 690.
7. Hwu C. Anisotropic elastic plates / C. Hwu. – London: Springer, 2010. – 673 p.
8. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
9. Pasternak Ia. Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magneto-electro-elasticity / Ia. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37, No. 1. – P. 167 – 175.
10. Pasternak Ia. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectro-elastic solids with cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak, R. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37, No. 2. – P. 419 – 433.
11. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2012. – 36, No. 12. – P. 1931 – 1941.
12. Пастернак, Я.М. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі

- формалізму Стро [Текст] / Я.М. Пастернак // Доповіді НАН України. – 2012. – № 11. – С. 66 – 72.
13. Liu Jinxi. Electro-elastic green's functions for a piezoelectric half-space and their application / Liu Jinxi, Wang Biao, Du Shanyi // Applied Mathematics and Mechanics. – 1997. – 18, No. 11. – P. 1037 – 1043.
  14. Tupholme G.E. Hexagonal piezoelectric half-space containing a crack / G.E. Tupholme // Applied Mathematical Modelling. – 2002. – 26. – P. 653 – 664.
  15. Tupholme G.E. Shear crack in a transversely isotropic magnetoelastoelectric half-space / G.E. Tupholme // Mechanics Research Communications. – 2008. – 35. – P. 466 – 474.
  16. Barnett D.M. Dislocation and line charges in anisotropic piezoelectric insulators / D.M. Barnett, J. Lothe // Physica Status Solidi (b). – 1975. – 67. – P. 105 – 111.
  17. Yang J. Special topics in the theory of piezoelectricity / ed. J. Yang. – London: Springer, 2009. – 342 p.
  18. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – Изд. 3-е, испр. и дополн. [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
  19. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
  20. Саврук, М.П. Механика разрушения и прочность материалов; в 4 т. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
  21. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems / C. Atkinson // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – 11, No. 2. – P. 243 – 266.
  22. Бережницький, Л.Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле [Текст] / Л.Т. Бережницький, В.В. Панасюк, Н.Г. Стащук. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
  23. Tian W.Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoelectric solids / W.Y. Tian, U. Gabbert // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2004. – 23. – P. 599 – 614.
  24. Пастернак, Я.М. Двовимірні зв'язані електричні, магнітні та механічні поля в діелектриках із тріщинами та тонкими включеннями [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 71 – 85.

*Отримано 18.04.2013*