

**Вимірювання електропровідності в системі з «прозорими» циліндричними джерелами поля / Ю. Батигін, А. Гнатов, М. Барбашова // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 69. — № 1. — С.162-173. — (приладобудування та інформаційно-вимірювальні технології).**

УДК 621.318

**Ю. Батигін, докт. техн. наук; А. Гнатов, канд. техн. наук;  
М. Барбашова; Є. Чаплигін, канд. техн. наук; О. Сабокар**

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет*

## **ВИМІРЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ В СИСТЕМІ З «ПРОЗОРИМИ» ЦИЛІНДРИЧНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ПОЛЯ**

*Резюме.* Розкрито основи безконтактного способу вимірювання питомої електропровідності листових металів, що ґрунтується на компенсації електромагнітних полів двох соленоїдів у внутрішній порожнині системи з двома листовими металевими зразками. Наведено аналітичні співвідношення для розрахунку основних електромагнітних характеристик представленої системи. Конкретними чисельними оцінками показана працездатність запропонованого способу.

*Ключові слова:* напруженість магнітного поля, питома електропровідність, індукторна система, листові металева заготівля, безконтактний спосіб вимірювання.

**Y. Batygin, A. Gnatov, M. Barbashova, E. Chaplygin, O. Sabokar**

## **MEASUREMENT OF ELECTRIC CONDUCTIVITY IN THE SYSTEM “TRANSPARENT” CYLINDRICAL SOURCE FIELD**

*Summary.* The given article deals with the solution of problems arising at measuring of electrical conductivity of metal samples by traditional methods. Theoretical foundations of the noncontact method of electrical conductivity measuring of sheet metals, based on compensation of electromagnetic fields of two solenoids are discovered. The offered method of electrical conductivity measuring of metals is based on the idea that the two metal sheets are affected by contradirectional magnetic fields from outside. The term "contradirectional" means turning on the sources of the magnetic field at which the vectors of intensity have opposite directions and their amplitudes are that, that in the space between the samples the magnetic flux is equal to zero. The advantage of the given method, in comparison with the known analogues is the lack of electrical links with the object of investigation that allows solving the problem of presence of contacts resistance and conductors proper contacting electromotive force in the measuring contour as well as «device - object of investigation». At small dimensions of investigated metal, the value of the transitive resistance grows in the zone of contacts and, accordingly, the error in definition of the size of measuring. The analytical relations for calculation of the basic electromagnetic performances of certain temporary shapes of currents in coils-sources which are the most simple and accepted for practice - exponential and harmonious dependences, are indicated. Since all the calculated dependences should give quantities of the electrical conductivity with certain scattering caused by corresponding accepted assumptions, but comprehensible to practical use for estimation of possible disagreements and formulation of requirements of their minimization relations of currents in coils-sources in various approximations (exponential signals, harmonious etc.) are written out. It is shown that these dependences are various, as each of approximations has a certain degree of inadequacy to real requirements. It is shown that at an appropriate selection of requirements for measuring, the metal electrical conductivity can be defined with rather a low level of error in comparison with reliable data.

*Key words:* magnetic field intensity, electric conductivity, inductor system, workpiece of sheet metal, non-contact method of measuring.

**Постановка проблеми та аналіз основних досягнень і публікацій.** Відомо безліч способів вимірювання питомої електропровідності металевих зразків, але в кожному з них існують недоліки, які необхідно розглядати й усувати. Однією з проблем цих методів є порівняно невисока точність результату вимірювання, що обмежено класом точності застосовуваних вимірювальних приладів і методична погрішність. Найістотнішим недоліком відомих способів вимірювання питомої електропровідності провідників є наявність опору контактів і проводів, що підводять, а також контактна ЕРС у вимірювальному контурі «прилад – об’єкт дослідження». При малих габаритах останнього зростає значення перехідного опору в зоні контактів і, відповідно, погрішність у визначенні вимірюваної величини. У зв’язку із цим отримувані результати можуть у кілька разів відрізнятись від реальних значень [1, 2].

Привабливим простотою технічної реалізації й широким можливостей є безконтактний спосіб вимірювання питомої електропровідності металів, заснований на ідеї взаємодії зустрічних магнітних полів двох соленоїдів. Такі системи застосовували в техніці формування плазмових згустків [3] і магнітно-імпульсній обробці тонкостінних металів для усунення негативних наслідків проникнення полів крізь оброблювані об’єкти [4].

**Мета роботи.** Теоретичне обґрунтування способу вимірювання питомої електропровідності металів, заснованого на компенсації зустрічних магнітних полів у внутрішній порожнині системи із двох плоских листових зразків.

**Постановка завдання.** Принципова сутність пропонованого способу полягає в наступному.

На два листових зразки із зовнішніх сторін діють зустрічні магнітні поля. Термін «зустрічні» означає ввімкнення джерел магнітного поля, при якому вектори напруженості спрямовані протилежно, а їхні амплітуди такі, що в просторі між зразками магнітний потік обертається в нуль [4].

Як бачимо зі схеми на рис. 1б, джерелами «зустрічних» полів є два плоских соленоїди (індуктор 1 та індуктор 2), які розташовані на зовнішніх поверхнях двох металевих зразків. Один із них є контрольним. Усі його параметри відомі. Нехай це буде металевий лист із товщиною й питомою електропровідністю –  $d_1$  і  $\gamma_1$  відповідно. Для другого зразка відома тільки його товщина –  $d_2$ . Питома електропровідність, яку необхідно визначити,  $\gamma_2=?$

Як довели автори [4], для полів, що являють собою пакети плоских електромагнітних хвиль, отримання нульового потоку в просторі між досить тонкими листовими провідниками можливе при строго певному співвідношенні, що включає їх електрофізичні й геометричні характеристики, а також амплітуди магнітних полів джерел ( $H_{1m}$  і  $H_{2m}$ ). Із цього співвідношення й можна було б визначити необхідну питому електропровідність –  $\gamma_2$ .

$$\gamma_2 \approx \frac{H_{2m}}{H_{1m}} \cdot \frac{(\gamma_1 \cdot d_1)}{d_2}. \quad (1)$$

Вираз (1) отримано, як зазначено раніше, для ідеалізації реальних полів пакетом плоских хвиль, просторово-часова суперпозиція яких забезпечує нуль дотичної компоненти напруженості магнітного поля в порожнині між листовими металами.

Для практичного виконання більше прийнятною є система із двома одновитковими циліндричними соленоїдами, розрахункова модель якої зображена на рис. 1а.

Розв'язування відповідної електродинамічної задачі проведемо в циліндричній системі координат з початком на зовнішній поверхні листового металу з боку індуктора 1 при таких допущеннях:

- індуктори 1 і 2 ідентичні геометрично, розташовані симетрично щодо листових металів;

- витки соленоїдів досить тонкі й «прозорі» для діючих полів, так що їхній метал не чинить ніякого впливу на електромагнітні процеси, що протікають;

- по соленоїдах протікають струми  $J_1(t)$  і  $J_2(t)$ , часові параметри яких такі, що в розрахунках цілком прийнятна відома умова квазістаціонарності електромагнітних процесів,  $\frac{\omega}{c} \cdot l \ll 1$  (тут  $\omega$  – циклічна частота,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $l$  – найбільший характерний геометричний розмір системи, у цьому випадку – це поперечний розмір);

- система має аксіальну симетрію, так що  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  ( $\varphi$  – полярний кут);

- поперечні розміри металевих листів досить великі,  $l \gg 2 \cdot R_2$ , а відстань –  $d_3$  між ними вкрай мала,  $\frac{d_3}{R_{1,2}} \ll 1$ ;

- листові метали є досить тонкостінними з геометричної –  $\frac{d_{1,2}}{R_{1,2}} \ll 1$  і електродинамічної –  $\omega \cdot \tau_{1,2} \ll 1$  точок зору (в останній нерівності  $\tau_{1,2}$  – характерні часи проникнення поля в листові метали:  $\tau_1 = \mu_0 \cdot \gamma_1 \cdot d_1^2$ ,  $\tau_2 = \mu_0 \cdot \gamma_2 \cdot d_2^2$ ,  $\mu_0$  – магнітна проникність вакууму).

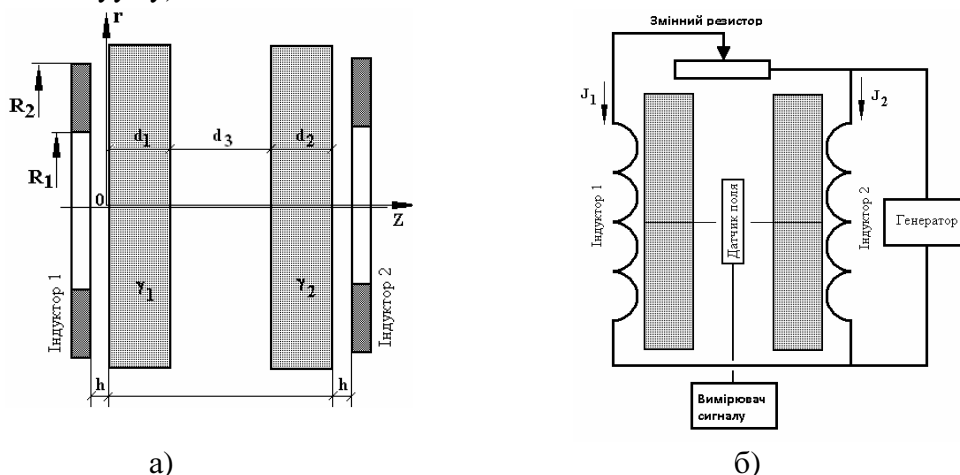


Рисунок 1. Схема вимірювання питомої електропровідності плоских листових металів: а) розрахункова модель; б) схема практичної реалізації

Figure 1. Scheme for measuring the conductivity of flat sheet metal: а) calculation model; б) practical implementation of the scheme

Рівняння Максвелла для збуджених складових вектора електромагнітного поля ( $E_\varphi \neq 0, H_{r,z} \neq 0$ ), перетворених по Лапласу з урахуванням нульових початкових умов, мають вигляд [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = j_\varphi(p, r, z); \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p, r, z); \\ \frac{\partial E_\varphi(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z), \end{cases} \quad (2)$$

де  $p$  – параметр перетворення Лапласа;

$$E_\varphi(p, r, z) = L\{E_\varphi(t, r, z)\}; \quad H_{r,z}(p, r, z) = L\{H_{r,z}(t, r, z)\}; \quad j_\varphi(p, r, z) = L\{j_\varphi(t, r, z)\}.$$

У загальному випадку щільність струму описується залежністю

$$j_\varphi(p, r, z) = (p \cdot \epsilon_0 + \gamma) \cdot E_\varphi(p, r, z) + j_{\varphi 1,2}(p, r, z), \quad (3)$$

де  $j_{\varphi 1,2}(t, r, z)$  – щільність стороннього струму в індукторах 1 і 2 відповідно

$$j_{\varphi 1}(p, r, z) = j_1(p) \cdot f(r) \cdot \delta(z+h), \quad j_1(p) = \frac{J_1(p)}{R_2 - R_1};$$

$$j_{\varphi 2}(p, r, z) = j_2(p) \cdot f(r) \cdot \delta(z+h), \quad j_2(p) = \frac{J_2(p)}{R_2 - R_1};$$

$f(r)$  – функція радіального розподілу струму в кожному з витків індуктора;

$\delta(x)$  – дельта-функція Дірака.

**Розв’язання системи рівнянь Максвелла.** При вирішенні поставленого завдання виділимо такі області:

- 1) півпростір поза першим листовим металом з боку індуктора 1,  $z \in (-\infty, 0]$ ;
- 2) область першого листового металу,  $z \in [0, d_1]$ ;
- 3) смуга вільного простору між листовими металами,  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$ ;
- 4) область другого листового металу,  $z \in [(d_1 + d_3), (d_1 + d_3 + d_2)]$ ;
- 5) вільний півпростір поза другим листовим металом,  $z \in [(d_1 + d_3 + d_2), \infty)$ .

З диференціальних рівнянь – (2) і виразу (3) у рамках прийнятих допущень отримаємо рівняння для азимутального компонента напруженості електричного поля  $E_\varphi(p, r, z)$  у виділених областях.

В області 1,  $z \in (-\infty, 0]$ , отримуємо, що

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(1)}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi^{(1)}(p, r, z)) \right) \approx \mu_0 \cdot p \cdot j_{\varphi 1}(p, r, z). \quad (4)$$

У металі першого листа, область 2,  $z \in [0, d_1]$

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(2)}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi^{(2)}(p, r, z)) \right) - (p \cdot \gamma \cdot \mu_0) \cdot E_\varphi^{(2)}(p, r, z) = 0. \quad (5)$$

Між листовими металами, область 3,  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(3)}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi^{(3)}(p, r, z)) \right) \approx 0. \quad (6)$$

У металі другого листа, область 4,  $z \in [(d_1 + d_3), (d_1 + d_3 + d_2)]$ :

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(4)}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi^{(4)}(p, r, z)) \right) - (p \cdot \gamma \cdot \mu_0) \cdot E_\varphi^{(4)}(p, r, z) = 0. \quad (7)$$

В області 5,  $z \in [(d_1 + d_3 + d_2), \infty)$ , отримуємо, що

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(5)}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi^{(5)}(p, r, z)) \right) \approx \mu_0 \cdot p \cdot j_{\varphi 2}(p, r, z). \quad (8)$$

Умові обмеженості радіального розподілу  $E_\varphi(p, r, z)$  з рівнянь (4) – (8) при  $r = 0$  і  $r = \infty$  задовольняє інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя [6]

$$E_\varphi(p, r, z) = \int_0^\infty E_\varphi(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot \lambda \cdot d\lambda, \quad (9)$$

де  $J_1(\lambda \cdot r)$  – функція Бесселя першого порядку.

Відповідно до (9) рівняння (4) – (8) наведено до звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

а) в області 1,  $z \in (-\infty, 0]$ :

$$\frac{d^2 E_\varphi^{(1)}(p, \lambda, z)}{d z^2} - \lambda^2 \cdot E_\varphi^{(1)}(p, \lambda, z) = K_1(p, \lambda) \cdot \delta(z + h), \quad (10)$$

де  $K_1(p, \lambda) = p \cdot \mu_0 \cdot j_1(p) \cdot f(\lambda)$ ;  $f(\lambda) = \int_0^\infty f(r) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot r \cdot dr$ ;

б) у металі першого листа, область 2,  $z \in [0, d_1]$ :

$$\frac{d^2 E_\varphi^{(2)}(p, \lambda, z)}{d z^2} - (\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma_1) \cdot E_\varphi^{(2)}(p, \lambda, z) = 0; \quad (11)$$

в) між листовими металами, область 3,  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$ :

$$\frac{d^2 E_\varphi^{(3)}(p, \lambda, z)}{d z^2} - \lambda^2 \cdot E_\varphi^{(3)}(p, \lambda, z) = 0; \quad (12)$$

г) у металі другого листа, область 4,  $z \in [(d_1 + d_3), (d_1 + d_3 + d_2)]$ :

$$\frac{d^2 E_\varphi^{(4)}(p, \lambda, z)}{d z^2} - (\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma_2) \cdot E_\varphi^{(4)}(p, \lambda, z) = 0; \quad (13)$$

д) в області 5,  $z \in [(d_1 + d_3 + d_2), \infty)$ :

$$\frac{d^2 E_\varphi^{(5)}(p, \lambda, z)}{d z^2} - \lambda^2 \cdot E_\varphi^{(5)}(p, \lambda, z) = K_2(p, \lambda) \cdot \delta(z - D), \quad (14)$$

де  $D = d_1 + d_3 + d_2 + h$ ,  $K_2(p, \lambda) = p \cdot \mu_0 \cdot j_2(p) \cdot f(\lambda)$ ;  $f(\lambda) = \int_0^\infty f(r) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot r \cdot dr$ .

Загальні інтеграли рівнянь для напруженості електричного поля у виділених областях мають вигляд:

а) у півпросторі поза першим листовим металом з боку витка індуктора 1,  $z \in (-\infty, 0]$ , умові обмеженості для  $z \rightarrow -\infty$  задовольняє функція

$$E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = C_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda z} + \frac{K_1(p, \lambda)}{\lambda} \cdot \eta(z+h) \cdot sh(\lambda \cdot (z+h)), \quad (15)$$

де  $C_1(p, \lambda)$  – довільна стала інтегрування;

б) у металі першого листа, область 2,  $z \in [0, d_1]$ :

$$E_{\varphi}^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q_1(p, \lambda) \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q_1(p, \lambda) \cdot z}, \quad (16)$$

де  $q_1(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma_1}$  – хвильове число в металі першого листа,  $D_{1,2}(p, \lambda)$  – довільні сталі інтегрування;

в) між листовими металами, область 3,  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$ :

$$E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = A_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda z} + A_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda z}, \quad (17)$$

де  $A_{1,2}(p, \lambda)$  – довільні сталі інтегрування;

г) у металі другого листа, область 4,  $z \in [(d_1 + d_3), (d_1 + d_3 + d_2)]$ :

$$E_{\varphi}^{(4)}(p, \lambda, z) = B_1(p, \lambda) \cdot e^{q_2(p, \lambda) \cdot z} + B_2(p, \lambda) \cdot e^{-q_2(p, \lambda) \cdot z}, \quad (18)$$

де  $q_2(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma_2}$  – хвильове число в металі другого листа;  $B_{1,2}(p, \lambda)$  – довільні постійні інтегрування;

д) в області 5,  $z \in [(d_1 + d_3 + d_2), \infty)$ , умові обмеженості для  $z \rightarrow \infty$  задовольняє функція

$$E_{\varphi}^{(5)}(p, \lambda, z) = C_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda z} - \frac{K_2(p, \lambda)}{\lambda} \cdot [sh(\lambda(z-D)) \cdot \eta(z-D) - 0.5 \cdot \exp(\lambda(z-D))], \quad (19)$$

де  $C_2(p, \lambda)$  – довільна стала інтегрування.

За допомогою рівняння (2) і виразів (15) – (19) знайдемо дотичні компоненти напруженості магнітного поля в кожній з виділених областей:

а)  $z \in [-\infty, 0]$ ,

$$H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p\mu_0} \left( C_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \eta(z+h) ch(\lambda(z+h)) \right); \quad (20)$$

б)  $z \in [0, d_1]$ ,

$$H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{q_1(p, \lambda)}{p\mu_0} (D_1(p, \lambda) \cdot e^{q_1(p, \lambda) \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q_1(p, \lambda) \cdot z}); \quad (21)$$

в)  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$ ,

$$H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p \cdot \mu_0} (A_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda z} - A_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda z}); \quad (22)$$

г)  $z \in [(d_1 + d_3), (d_1 + d_3 + d_2)]$ ,

$$H_r^{(4)}(p, \lambda, z) = \frac{q_2(p, \lambda)}{p\mu_0} (B_1(p, \lambda) \cdot e^{q_2(p, \lambda) \cdot z} - B_2(p, \lambda) \cdot e^{-q_2(p, \lambda) \cdot z}); \quad (23)$$

д)  $z \in [(d_1 + d_3 + d_2), \infty)$ ,

$$H_r^{(5)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p\mu_0} \cdot (C_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda z} + \frac{K_2(p, \lambda)}{\lambda} \cdot [ch(\lambda(z-D)) \cdot \eta(z-D) - 0.5 \cdot \exp(\lambda(z-D))]). \quad (24)$$

З умови безперервності дотичних компонентів напруженості електромагнітного поля на границях виділених областей отримуємо системи алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих довільних сталих інтегрування у виразах (15) – (24).

Враховуючи те, що нас цікавить електромагнітне поле між листовими металами, визначенню підлягають невідомі сталі інтегрування –  $A_{1,2}(p, \lambda)$  у формулах для компонентів напруженості (17) і (22).

Після всіх математичних перетворень для спрощення системи рівнянь ураховуємо, що найчіткіший прояв електродинамічних характеристик листових металів повинен мати місце при інтенсивному проникненні (а не при «ідеальному екрануванні») електромагнітних полів у внутрішній простір між ними, а також те, що «прозорість» для діючих полів реалізується при досить низьких робочих частотах [4, 5].

Отримуємо, що часовому режиму в отриманих рівняннях для коефіцієнтів  $A_{1,2}(p, \lambda)$  відповідають граничні переходи при  $|p\mu_0\gamma_{1,2}| \rightarrow 0$ , точніше при  $|p\mu_0\gamma_{1,2}| \ll \lambda^2$ , а також при  $q_{1,2}(p, \lambda) \rightarrow \lambda$ .

У результаті, після тотожних перетворень, отримуємо систему рівнянь для знаходження  $A_{1,2}(p, \lambda)$

$$\begin{cases} A_1(p, \lambda) \cdot \frac{p\mu_0\gamma_1 d_1}{\lambda} + 2A_2(p, \lambda) = -p\mu_0 j_1(p) \cdot \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot e^{-\lambda h} \\ 2A_1(p, \lambda) e^{\lambda(d_1+d_3+d_2)} + A_2(p, \lambda) \frac{p\mu_0\gamma_2 d_2}{\lambda} e^{-\lambda(d_1+d_3+d_2)} = p\mu_0 j_2(p) \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda h} \end{cases} \quad (25)$$

Із системи (25) знаходимо невідомі  $A_{1,2}(p, \lambda)$ .

$$\begin{cases} A_1(p, \lambda) = -\frac{(p\mu_0 \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda h})}{V} \left( 2j_2(p) + j_1(p) \frac{p\mu_0\gamma_2 d_2}{\lambda} e^{-\lambda(d_1+d_3+d_2)} \right) \\ A_2(p, \lambda) = \frac{(p\mu_0 \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda h})}{V} \left( j_2(p) \frac{p\mu_0\gamma_1 d_1}{\lambda} + 2j_1(p) e^{\lambda(d_1+d_3+d_2)} \right), \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{де } V = \left( \frac{p\mu_0\gamma_1 d_1}{\lambda} \cdot \frac{p\mu_0\gamma_2 d_2}{\lambda} \cdot e^{-\lambda(d_1+d_3+d_2)} - 4e^{\lambda(d_1+d_3+d_2)} \right).$$

У просторі між листовими металами (область 3,  $z \in [d_1, (d_1 + d_3)]$ ) образ збудженого електричного поля описується співвідношенням (17), що після підстановки формул (26) для  $A_{1,2}(p, \lambda)$  і відповідних зворотних інтегральних перетворень дасть аналітичний вираз для просторово-часової залежності напруженості при низьких частотах діючих полів.

Якщо в просторі між металами в якості датчика поля, показаного на рис. 1а, помістити замкнений контур з металу з питомою електропровідністю –  $\gamma_3$ , то дане

електричне поле стане причиною появи в ньому струму провідності  $j_{\varphi}^{(3)} = \gamma_3 \cdot E_{\varphi}^{(3)}$ . При  $j_{\varphi}^{(3)} \approx 0$  і, відповідно,  $E_{\varphi}^{(3)} \approx 0$  між струмами індукторів-джерел з'являється однозначна залежність, яка визначається, як, наприклад, в роботі [4], питомими електропровідностями та геометрією листових металів.

Кажучи про практичне використання цієї залежності для визначення невідомої провідності, аналогічно формули (1), то вона повинна бути достатньо простою.

Прийmemo, що товщина металів і відстань між ними настільки малі, що експоненти у виразах (26) і (17) з достатнім ступенем строгості можна вважати такими, що дорівнюють одиниці.

У цьому випадку з (17) отримуємо, що

$$E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda) \approx A_1(p, \lambda) + A_2(p, \lambda), \quad (27)$$

$$\text{де } A_1(p, \lambda) \approx -\frac{(p\mu_0 \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda h})}{V} \left( 2j_2(p) + j_1(p) \frac{p\mu_0 \gamma_2 d_2}{\lambda} \right),$$

$$A_2(p, \lambda) \approx \frac{(p\mu_0 \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda h})}{V} \left( j_2(p) \frac{p\mu_0 \gamma_1 d_1}{\lambda} + 2j_1(p) \right).$$

Залежність (27) прирівнюємо до нуля й виконуємо зворотнє перетворення Фур'є-Бесселя. Враховуючи, що  $\int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda r) \cdot d\lambda = \frac{1}{r^2}$ ,  $\int_0^{\infty} J_1(\lambda r) \cdot d\lambda = \frac{1}{r}$ , [6], отримаємо

$$j_1(p) \left( 1 - p \cdot \frac{r}{2} \cdot \mu_0 \gamma_2 d_2 \right) \approx j_2(p) \left( 1 - p \cdot \frac{r}{2} \cdot \mu_0 \gamma_1 d_1 \right), \quad (28)$$

де  $r$  – радіус довільної окружності, де напруженість електричного поля перетворює в нуль.

Слід зазначити вірогідність отриманого результату. При  $r \rightarrow \infty$ , тобто на окружностях досить великого радіуса, поле, збуджуване в розглянутій системі, наближається до поля пакета плоских електромагнітних хвиль, і вираз (28) переходить у залежність (1).

У виразі (28) перейдемо в простір оригіналів.

$$j_1(t) - \frac{dj_1(t)}{dt} \cdot \left( \frac{r}{2} \right) \cdot \mu_0 \gamma_2 d_2 \approx j_2(t) - \frac{dj_2(t)}{dt} \cdot \left( \frac{r}{2} \right) \cdot \mu_0 \gamma_1 d_1. \quad (29)$$

Формула (29) містить часові залежності. Для того, щоб виключити їх, варто задатися певною часовою формою струмів в індукторах-джерелах. Найбільш простими й прийнятними для практики є а) експоненціальна й б) гармонійна залежності.

а. Нехай  $j_1(t) = j_{1m} \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ ,  $j_2(t) = j_{2m} \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ . Тут  $j_{1,2m}$  – амплітуди щільностей струмів,  $\alpha$  – деяка стала часу, яка за необхідності може бути вибрана довільним чином.

Тоді невідому питому електропровідність, нехай це буде  $\gamma_2$ , знайдемо з виразу

$$\gamma_2 = \frac{1}{\alpha \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 d_2)} \left[ \frac{J_{2m}}{J_{1m}} \cdot \left( 1 + \alpha \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_1 d_1) \right) - 1 \right], \quad (30)$$



де  $J_{1,2m}$  – амплітуди струмів в індукторах-джерелах,  $r$  – радіус витка, де фіксується нульовий струм, у порожнині між листовими металами.

Знову ж, для досить більших « $r$ » вираз (30) трансформується в залежність (1).

б. Нехай  $j_1(t) = j_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,  $j_2(t) = j_{2m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Тут  $j_{1,2m}$  – амплітуди щільностей струмів,  $\omega$  – циклічна частота сигналу, яка також, як і у випадку експоненти, може бути вибрана довільним чином.

Вираз (29) набуде вигляду

$$j_{1m} \left( \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \omega \left( \frac{r}{2} \right) \mu_0 \gamma_2 d_2 \right) \approx j_{2m} \left( \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \omega \left( \frac{r}{2} \right) \mu_0 \gamma_1 d_1 \right). \quad (31)$$

Вираз (31) містить часові залежності. Від них можна позбутися, якщо в правій і лівій частинах (31) перейти до середніх значень квадратів відхилень у часі за період.

Обидві частини виразу піднесемо до квадрата й проінтегруємо за часом  $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ . Після виконання всіх необхідних математичних перетворень отримуємо формулу для розрахунку питомої електропровідності досліджуваного металевго зразка.

$$\gamma_2 = \frac{1}{\omega \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 d_2)} \sqrt{\left[ \left( \frac{J_{2m}}{J_{1m}} \right)^2 \cdot \left( 1 + \left( \omega \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_1 d_1) \right)^2 \right) - 1 \right]}. \quad (32)$$

Слід зазначити, що й формула (30), і формула (32) дають однаковий результат у випадку ідентичних зразків. Тобто при  $\frac{J_{2m}}{J_{1m}} \approx 1$  і  $d_1 \approx d_2$  питомі електропровідності

$$\gamma_2 \approx \gamma_1.$$

Для виведення більш наближеного співвідношення, що визначає невідому питому електропровідність металевго аркуша  $\gamma_2 = ?$ , можна зробити інакше.

Вираз (31) перепишемо у вигляді

$$\left( \frac{2}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r} \right) \cdot (j_{1m} - j_{2m}) \cdot \sin(\omega t) - (j_{1m} \cdot \gamma_2 d_2 - j_{2m} \cdot \gamma_1 d_1) \cdot \cos(\omega t) \approx 0. \quad (33)$$

В (33) виділимо модуль і фазово-часову залежності.

$$\sqrt{\left( \frac{2}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r} \cdot (j_{1m} - j_{2m}) \right)^2 + (j_{1m} \cdot \gamma_2 d_2 - j_{2m} \cdot \gamma_1 d_1)^2} \cdot \sin(\omega t + \xi) \approx 0, \quad (34)$$

де  $\xi$  – деяка «початкова» фаза.

Використання рівності (34) для будь-якого моменту часу можливо тільки при

$$\left( \frac{2}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r} \cdot (j_{1m} - j_{2m}) \right)^2 + (j_{1m} \cdot \gamma_2 d_2 - j_{2m} \cdot \gamma_1 d_1)^2 \approx 0. \quad (35)$$

Різниця струмів в обмотках індукторів-джерел ( $j_{1m} - j_{2m}$ ) є величина обмежена й досить мала.

При досить високих робочих частотах, але які не порушують умову «прозорості» листових металів, і більших радіусів можна вважати, що

$$\left( \frac{2}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r} \cdot (j_{1m} - j_{2m}) \right) \ll (j_{1m} \cdot \gamma_2 d_2 - j_{2m} \cdot \gamma_1 d_1). \quad (36)$$

Тоді з (35) знаходимо

$$\gamma_2 \approx \frac{j_{2m}}{j_{1m}} \cdot \frac{(\gamma_1 \cdot d_1)}{d_2}. \quad (37)$$

Вираз (37) ідентичний формулі (1).

На закінчення виконаємо деякі числові оцінювання, необхідні для розуміння рівня вірогідності отриманих результатів.

**Числові оцінювання.** Очевидно, що всі розрахункові залежності (30), (32), (37) повинні давати величини питомої електропровідності з певним розкидом, обумовленим відповідними прийнятими допущеннями, але прийнятними для практичного використання.

Для оцінювання можливих розбіжностей і формулювання умов їхньої мінімізації випишемо відносини струмів в індукторах-джерелах у різних наближеннях (експонентні сигнали, гармонійні й т.д.). Ці залежності, природно, повинні бути різними, оскільки кожне з наближень має певний ступінь неадекватності реальним умовам.

Наприклад, прийнята в розгляді експоненціальна часова залежність насправді повинна мати досить крутий фронт, що на початковому етапі процесу проникнення не відповідає умові «прозорості» металевих листів.

Питома електропровідність, розрахована по квадратичних відхиленнях, досить умовно розділяє струм, порушуваний в обмотці датчика поля, на компоненти, зумовлені струмами кожного з індукторів джерел.

Формула для обчислення питомої електропровідності (37) отримана в ідеалізації високих робочих частот і досить великого радіуса контуру датчика поля.

Отже, послідовно з (30), (32) і (37) знаходимо, що

$$\frac{J_{2m}}{J_{1m}|_{\text{exp}}} = \frac{\left( 1 + \alpha \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_2 d_2) \right)}{\left( 1 + \alpha \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_1 d_1) \right)}. \quad (38)$$

$$\frac{J_{2m}}{J_{1m}|_{\text{sin}}} = \sqrt{\frac{\left( 1 + \left[ \omega \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_2 d_2) \right]^2 \right)}{\left( 1 + \left[ \omega \cdot \frac{r}{2} \cdot (\mu_0 \gamma_1 d_1) \right]^2 \right)}}. \quad (39)$$

$$\frac{J_{2m}}{J_{1m}|_{\text{simple}}} \approx \frac{(\gamma_2 \cdot d_2)}{(\gamma_1 \cdot d_1)} \quad (40)$$

Тепер зазначимо, що параметри металевих листів відомі апіорі.

«Контрольний» зразок виконаний з мідної фольги: товщина –  $d_1 = 0,0001$  м, питома електропровідність –  $\gamma_1 = 6 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. Досліджуваний об’єкт – електротехнічна сталь: товщина –  $d_2 = 0,001$  м, питома електропровідність –  $\gamma_2 = 0,2 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>.

Радіус витка датчика в просторі між листами  $r \approx 0,05$  м. Робоча частота сигналів в обмотках індукторів-джерел  $f = 10$  кГц и  $\omega = 2\pi \cdot 10^3$  Гц. Для експоненціального сигналу  $\alpha = \omega$ . При даному значенні частоти ефективна глибина для міді становить  $\sim 0,0064$  м, що набагато більше товщини «контрольного» зразка. Тобто для нього задовольняється вимога «прозорості». Для прийнятої сталі ця вимога задовольняється тим більше.

За допомогою формул (38), (39), (40) обчислимо значення для струмів. Потім підставимо їх у вираз для питомої електропровідності – (30), (32), (37). Кінцеві результати розрахунків оформимо у вигляді таблиці.

Таблиця 1

Відн. струмів	$\gamma_{2\text{exp}}$	$\gamma_{2\text{sin}}$	$\gamma_{2\text{simple}}$
$\left. \frac{J_{2m}}{J_{1m}} \right _{\text{exp}} \approx 0,385$	$0,2 \cdot 10^7$	$2,26 \cdot 10^7$	$2,3 \cdot 10^7$
$\left. \frac{J_{2m}}{J_{1m}} \right _{\text{sin}} \approx 0,343$	$0,17 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,205 \cdot 10^7$
$\left. \frac{J_{2m}}{J_{1m}} \right _{\text{simple}} \approx 0,333$	$0,17 \cdot 10^7$	$0,19 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$

З даних табл. 1 випливає, що розбіжності в результатах розрахунку питомої електропровідності не перевищують  $\sim 30$  % і в середньому становлять близько  $\sim 10$  %. Природно, що зменшити діапазон значень, а, отже, й вірогідність у визначенні вимірюваної величини, можна збільшенням параметра  $(\omega \cdot r)$ . Уже при  $r = 0,1$  м максимальна розбіжність становить менше  $\sim 20$  %. Збільшення частоти у два рази, тобто до 20 кГц, також можливе. При цьому ефективна глибина проникнення поля зменшується до  $\sim 0,00046$  м, що усе ще припустимо за умовою «прозорості» мідного листа товщиною  $\sim 0,0001$  м. Як показують обчислення, дане збільшення частоти дозволяє знизити максимальний діапазон до  $\sim 10$  %.

**Висновки.** Запропоновано й теоретично обґрунтовано безконтактний спосіб вимірювання питомої електропровідності металів, перевагою якого в порівнянні з відомими аналогами є відсутність електричних контактів з об’єктом дослідження. Показано, що при належному виборі умов вимірювання питома електропровідність металу може бути визначена з досить низьким рівнем похибки в порівнянні з достовірними величинами.

**Conclusions.** According to investigations the following conclusions can be made:

1. The non-contact measurement method of the electrical conductivity of metals is proposed and theoretically interpreted.

2. The advantage of the method as compared with the available ones is the lack of electrical contact with the object of the study.

3. It is shown that under appropriate choice of measurement conditions the conductivity of the metal can be determined with sufficiently low level of error in comparison with true values.

### **Список використаної літератури**

1. Батыгин, Ю.В. Расчет электродинамических усилий в индукционной индукторной системе с ферромагнитным массивным экраном и листовой заготовкой [Текст] / Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов // *Електротехніка і електромеханіка*. – Харків. – 2009. – № 4. – С. 56 – 59.
2. Батыгин, Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий [Текст] / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хименко // Том 1. Изд. второе, переработанное и дополненное; под общей ред. д.т.н., проф. Батыгина Ю.В. – Харьков: Изд. МОСТ-Торнадо, 2003. – 285 с.
3. Батыгин, Ю.В. Магнитно-импульсные методы и системы для притяжения тонкостенных листовых металлов [Текст] / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, А.В. Бажинов // *Труды международной научно-технической конференции «Магнитно-импульсная обработка металлов. Пути совершенствования и развития»*. – Самара: 18 – 19 сентября 2007. – С. 3 – 13.
4. Туренко, А.Н. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий [Текст] / А.Н. Туренко, Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов // Том 3. Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями: монография. – Харьков: ХНАДУ, 2009. – 240 с.
5. Batygin, Yu.V. Direction Change of the Force Action upon Conductor under Frequency Variation of the Acting magnetic Field. Proceedings of the 1-st International Conference on High Speed Metal Forming / Yu.V. Batygin, V.I. Lavinsky, L.T. Khimenko. // March 31 / April 1. – Dortmund: Germany. 2004. – P. 157 – 160.
6. Батыгин, Ю.В. Физические основы возможных направлений развития магнитно-импульсной обработки тонкостенных металлов [Текст] / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хименко // *Електротехніка і електромеханіка*. – Харків. – 2004. – № 2. – С. 80 – 84.
7. Батыгин, Ю.В. Электродинамические процессы в цилиндрической индукционной индукторной системе для магнитно-импульсного притяжения листовых заготовок [Текст] / Ю.В. Батыгин, А.Ю. Бондаренко, Е.А. Чаплыгин // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – Харків. – 2007. – № 11(47). – С. 109 – 117.
8. Батыгин, Ю.В. Расчет усилий в индукционной индукторной системе прямоугольной геометрии с ферромагнитным массивным экраном и заготовкой [Текст] / Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов, Г.С. Сериков // *Електротехніка і електромеханіка*. – Харків. – 2009. – № 3. – С. 61 – 64.
9. Шнеерсон, Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверх сильных токов [Текст] / Г.А. Шнеерсон. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 200 с.
10. Дарков, А.В. Сопrotивление материалов [Текст] / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1969. – 730 с.

*Отримано 13.12.2012*